绪　言

社会生产中存在许多值得令人深思探索的问题.

一笔资金，可以投到几个项目中以获得利润. 问如何投资,使总利润更大一些,甚至最大？

每年暑假，各个单位接受一批毕业生，又有一批工作岗位. 每人对每个岗位存在是否适合的问题. 如何分配工作，使最多的人上岗？还有，如果能够测算出一个人在各个岗位工作一年能够创造多少财富,如何分配工作,使得总财富最大？

一项工程由若干个工序所组成. 完成每个工序所需的天数是已知的. 工程师可以安排任务，在若干天内完成. 不同的安排可能完工的天数不一样. 如何安排,使得工期更短,甚至最短？

车间有若干种产品可以生产. 已知各产品的一个单位所需诸种资源各多少和售后利润若干. 给定了资源限量，车间主任确定了一个生产方案，就能创造一笔利润. 各种方案也许有不同的利润. 那么如何组织生产,使得总利润更大,甚至最大？

为了保证正常生产,工厂需要储存一定量的资源,从而发生仓储成本. 如何使得这成本更小，甚至最小？在生产过程中，设备不断老化，产量随之下降. 如果更新,产量可以提高,但得增加成本. 问应该采取什么策略，使得总效益最大？

几个矿区有相同品位的精矿粉各若干. 几个炼铁厂各需精矿粉若干吨. 运输部长确定一个运输方案，发生一笔总成本. 不同方案发生不同的总成本. 如何组织,使总成本低一些,甚至达到最低？

化工厂用某个方案进行生产某种产品，其收得率为若干. 能否改变生产方案而得到更大的收得率？

所有这些问题都是管理工作、经济工作中非常重要的问题,都能在实践过程中通过摸索得到改进，获得更多的利润大家都在这样做，并不断地前进. 经验的总结往往是可意会而难以言传的. 人们希望找到科学的方法,就是那些能够重复实现的、能够传授的、而且相当有效的方法.

经过半个多世纪的研究，上述问题以及大量其它的问题已经得到相当多的成果. 在解决各种问题的同时，有关的理论、方法和应用又汇集成一门学问，叫做运筹学.

运筹学是用科学的方法研究各种优化问题，即有关“多、快、好、省”问题的学问. 它的理论内容丰富，它的实践背景和应用范围涉及到工业、农业、军事、经济、管理科学、计算机科学等领域. 它具有鲜明的实用性和经济性.

无论从理论、方法到实践，运筹学在继续发展. 各个学科领域继续不断地向运筹学提出各种任务.

现在可以这样说，在任何一个企业，运筹学能够在投资、实施各种任务，人员分配，提高产品的质量、产量和利润，设务更新，物资的储存和调运等等，即几乎在管理、经济工作中的每一个重要方面，无论是效益上还是观念上，都能起到良好的作用.

应该说,为了经济现代化、管理现代化,对从事这两类工作的所有人员来说,运筹学是不可或缺的手段，对所有有关专业的学生来说，运筹学是一门诱人的学问.

第一部分　线性规划

本部分通过讲解产品结构优化问题来讨论线性规划它由前四章所组成.

第 1 章通过产品结构优化问题和线性规划模型，讲解几何解法和基本概念.

第 2 章集中讲求解线性规划模型的方法. 许多教材使用 n 维空间概念和方法以建立单纯形方法. 这是学习线性规划的一个难点. 我们提出一个基本概念：指归形式以它为主导，从一元一次方程出发，花不多的篇幅，就导得人们熟知的单纯形方法.

第 3 章集中讨论产品结构优化问题中所出现的诸多实际问题，如改变资源量、利润率、技术参数以及约束条件对答案的影响等等. 在求解的过程中，我们先建立方程之间的恒等变换公式，再用它解决所提的问题.

第 4 章除了进一步介绍线性规划的另一些基本应用问题外，着重讨论发现产品结构优化问题的客观基础和一般过程，在从事产品结构优化工作时所应注意的诸项实务. 还有在用计算机求解线性规划问题时，使用软件包的一般操作过程简介.

第 1 章　线性规划与产品结构优化问题

本章共分三节. 讨论产品结构优化问题的提出，简单问题的几何解法和一些基本概念. 最后引出线性规划.

§ 1.1　一个简单问题的提出

例 **1.1**　某加工车间要把多余的 27 kg 塑料和 290 度电加工成甲、乙两种管状的产品. 生产 1 m 甲产品需要 2 kg 塑料和 40 度电. 生产 1 m 乙产品需要 3 kg 塑料和 10 度电. 售出 1 m 甲产品的利润是 7 元，1 m 乙产品的是 6 元. 问如何组织生产.

人们设计了下面的一个表.

表 1.1

	甲(m)	乙(m)	限值
售出利润(元)	7	6	?
塑料(kg)	2	3	27
电(度)	40	10	290

先来核对表 1.1 与题目。

最上行与最左列叫做说明行和说明列. 余下的数据，共有 3 行，被一横线分成两部分. 共有 3 列，被一竖线所分开. 可以合并这些数据与说明，按行或按列来阅读.

按列可知：第一列是讲甲产品的. 生产 1 m 需 2 kg 塑料和 40 度电，可得利润 7 元.. 第二列是讲乙产品的. 生产 1 m 需 3 kg 塑料和 10 度电，可得利润 6 元. 第三列在竖线之右，它讲可供应的资源至多是 27 kg 塑料和至多 290 度电. 还用一个？表示不知道总利润至多有多少. 这一列，叫做限值列.

按行阅读：横线之上是讲售出的利润率. 1 m 甲产品的利润为 7元，1 m 乙产品的利润为 6 元.. 还要问总利润是多少. 横线之下，第一行是讲塑料的. 生产 1 m 甲产品需 2 kg，生产 1 m 乙产品需 3 kg，而总共只有 27 kg 塑料. 另一行是讲电能源的. 生产 1 m 甲产品需 40 度电，1 m 乙产品需 10度电，而总共可供使用的电是 290度.

所以，所有的数据与产品、原料、能源的关系都是一致的. 由此看来，对这种问题，用表格来“叙述”题目比用文字要清晰简明得多.

车间内，小赵建议生产 9 m 乙产品就可以了. 这样，27 kg 塑料全都用掉，剩下 200度电. 小钱则建议生产 7 m 甲产品和 1 m 乙产品. 这时 290 度电全部用完，剩下 10 kg 塑料. 小钱认为，他的方案比小赵的好，因为(总)利润有 55(=7×7 + 6×1)元，而小赵的方案，利润只有 54(= 7×0 +6×9) 元.

孙师傅有经验，他认为，如果生产甲、乙产品各 5m，利润还要大很多，有 65 (=7×5+6×5) 元..

车间李主任是一位生活经验与管理经验丰富的人. 他懂得，凡是处理一件事情，有多个方案

可供随意采用时，就有可能按某个标准进行选择，从中找出比较好的方案来，甚至是最好的现在，一方面，他认定，在三个方案中，孙师傅的方案最好，利润最大．另一方面，他思考这样一个问题：能不能找到利润更大的方案呢？这仅有的塑料与电量，当然不会创造出 1 万、10 万元的利润，那么至多能有多少呢？

李主任再请来了周吴郑王四位师傅，一起研究．人人冥思苦想，各献计策，议论纷纷在讨论过程中，人们逐步意识到，像这样做，不是好办法．能不能用科学方法来解决呢？

这一想法开阔了大家的思路，他们向现代管理迈出了一大步．

人们在设计出可以生产的两种产品之后，发现售出了，能够获得利润．作为一个合理的思维规律，人们应该进一步考虑，在资源给定的条件下，能否改进生产两种产品的方案，以获得更多的利润，甚至最大的利润．

人人献计的办法是不得已的办法，是在没有发现或者没有学习科学的方法之前的办法．我们已经发现，确实存在科学的方法．

用代数和平面解析几何的方法来做！

设有一个生产方案：生产 x_1 m 甲产品和 x_2 m 乙产品．这个方案如果真的可以行得通，它们所用去的塑料不能超过 27 kg，即

$$2x_1 + 3x_2 \leq 27. \tag{1.1}$$

用去的电不能超过 290 度，即

$$40x_1 + 10x_2 \leq 290. \tag{1.2}$$

这两个不等式叫做约束条件．它们分别是用表 1.1 横线下的两行写出来的．

像赵钱孙三位师傅的方案都能同时满足这两个约束条件．当然还有别的方案．我们并没有说，凡是满足(1.1)、(1.2)的解都能作为一个生产方案．$x_1= 8, x_2= -3$ 同时满足(1.1)、(1.2)，却不是一个现实的生产方案．因为我们不能生产 -3 m 乙产品．可见一个行得通的方案中，x_1, x_2 都不能是负的，记作

$$x_1 \geq 0,\quad x_2 \geq 0，\text{或者}\quad x_1, x_2 \geq 0. \tag{1.3}$$

这种不等式也是约束条件．为了区分开来，(1.3)中的条件叫做变量(非负)约束条件，(1.1)、(1.2)叫做主约束条件．

未知数 x_1, x_2 叫做决策变量，满足(1.1)、(1.2)的一组 x_1, x_2 叫做一个解，记作

$$[x_1 \quad x_2].$$

如果 x_1, x_2 还满足(1.3)，则解叫做可行解．一个可行解对应一个(可行)方案．一般来说，可以有许许多多个可行解．

对于一个(可行的生产)方案，有一个利润 z，可以用下面的函数来算得：

$$z = 7x_1 + 6x_2. \tag{1.4}$$

它叫做目标函数．是一个一次(线性)函数．

李主任带领师傅们把问题变成如何找出一个可行解，使目标函数值最大．我们现在把这个重大事件写成以下形式：

$$\max\ z=7x_1+6x_2$$

$$s.t.\ \begin{cases} 2x_1+3x_2 \leq 27 \\ 40x_1+10x_2 \leq 290 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

这里 max 是英文单词 maximize (意思是 求最大)的前三个字母. *s.t.*是构成英文词组 subject to (意思是 受制于)的两个字的第一个字母.

如果有人能够找出答案，就可以用同样的资源得到最大的利润.

上面讲的数字题在工厂里到处可以遇到像这种问题就是产品结构优化问题. 有多种方法来研究它. 李主任提出的是一种数学方法.

§ 1.2 解析几何法

下面用解析几何方法来求解例 1.1. 它一共分成四步.

一、作出各个约束条件的图形

设有二元一次方程

$$L_1: \ 2x_1 + 3x_2 = 27. \tag{2.1}$$

把 x_1, x_2 理解为解析几何中的两个变量，相当于熟悉的 x, y. 在 $\{x_1\ x_2\}$-直角坐标系(图 1)中，(2.1)的图形是一直线. 画出它的方法是：先找出两组满足方程的解 x_1, x_2: 不妨令 x_1=0，得 x_2= 9；再令 x_2= 0，得 $x_1=13\frac{1}{2}$. 所以有两个点

$$A(0,9) \quad 与 \quad F(13\tfrac{1}{2}, 0)$$

过 A, F 两点用直尺画出直线，记作 L_1，它就是(2.1)的图形. 例 1.1 中，关于塑料的约束条件不是方程(2.1)，而是不等式

$$D_1: \ 2x_1 + 3x_2 \le 27. \tag{2.2}$$

它的图形当然包括直线 L_1，因为等号是允许成立的. 另外，坐标原点 O (0, 0)以及(1, 2), (−3, 4) 等等都满足(2.2)，都在(2.2)的图形中. 仔细想一下，在直线 L_1 上，经过任意一点，例如 $P(3, 7)$，画一直线 l 与纵轴相平行. 直线 l 被 P 点分成上、下两个半直线. 下半直线上的点的坐标是(3, h)，而 h 总是小于 7，这种点总满足(2.2). l 的下半直线全都在(2.2)的图形中，而上半直线全都不在图形中. 所以，以直线 L_1 为边界的下半平面就是不等式(2.2)的图形.

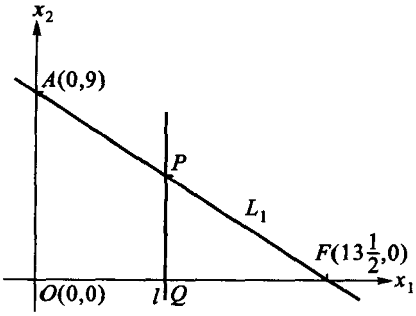

图 1

由以上的讨论可知：要求不等式

$$a x_1 + b x_2 \le c \tag{2.3}$$

的图形，先画出方程

$$a x_1 + b x_2 = c \tag{2.4}$$

的图形，它是一条直线. 在它之外任取一点 T, 代入(2.3). 如果满足，则以直线(2.4)为边界，含有 T 点的半平面就是(2.3)的图形. 如果 T 点不满足(2.3)，则另一个半平面是它的图形.

作为特殊情形，x_1= 0就是 $1x_1 + 0x_2$= 0. 它的图形是一直线 纵(坐标)轴. 而 $x_1 \ge 0$ 的图形是一个以纵轴为边界的右半平面. $x_2 \ge 0$ 的图形是一个以横轴为边界的上半平面.

二、画出同时满足所有约束条件的图形

在直角坐标系里，先画出四条直线：

L_1: $2x_1 + 3x_2 = 27$,

L_2: $40x_1 + 10x_2 = 290$,

L_3: $x_1 = 0$,

L_4: $x_2 = 0$.

把满足四个约束条件

D_1: $2x_1 + 3x_2 \le 27$,

D_2: $40x_1 + 10x_2 \le 290$,

D_3: $x_1 \ge 0$,

D_4: $x_2 \ge 0$

的图形记作 D. 它应该是 L_1之下(的半平面)，L_2之下，纵轴之右和横轴之上的公共部分（包括它们的边界）. 正如图 2 中有阴线的部分，加上它的四条边界线段 OA, AB, BC 和 CO.

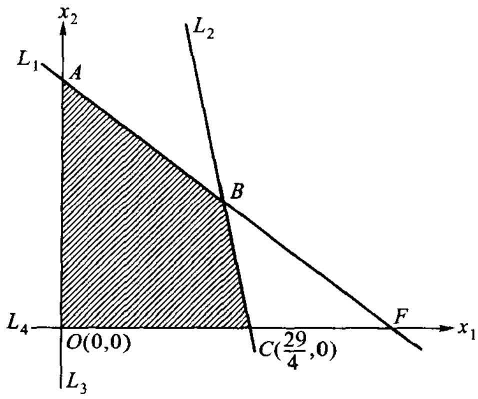

图 2

图形 D 中的每一个点 (x_1, x_2) 总能同时满足这四个约束条件. 它是例 1.1 的一个可行解. 表示生产甲、乙产品各多少. D 中每一个点都是可行解，D 就叫做可行域.. 可以看到，D 中有许多可行解，例 1.1 有众多种生产方案.

三、画出目标函数的等值线

每一个可行解对应目标函数的一个值. 例如，

$$(0, 0), (3, 0), (6, 4), (3, 7), (0, \frac{7}{2}), (2, \frac{7}{6}), (\frac{9}{7}, 2),$$

全都是可行解. 它们对应的利润可以用目标函数

$$z = 7x_1 + 6x_2 \tag{2.5}$$

算出依次是

$$0, 21, 66, 63, 21, 21, 21, \ldots$$

要找出目标函数值最大的可行解，一个想当然的办法是：逐一选点，计算目标函数值，再进行比较它们的大小. 这是一个“可以理解，却不能实现”的方法因为人们不可能取尽所有的可行解，更没有时间算出所有目标函数值. 但是，试作若干个可行解，却很有好处.

人们发现，每个可行解有其目标函数值. 不同的可行解却可能有相同的目标函数值. 例如上面所列的

$$(3, 0),\quad (0, \frac{7}{2}),\quad (2, \frac{7}{6}),\quad (\frac{9}{7}, 2)$$

的函数值都是 21. 其实在可行域 D 中，直线

$$L:\ 7x_1 + 6x_2 = 21$$

上的点的目标函数值都是 21，HK 上的点都对应利润为 21 的生产方案.

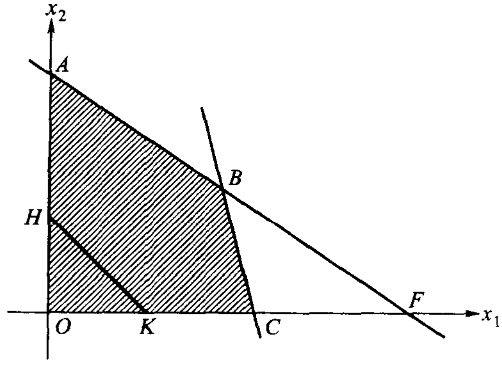

图 3

四、利用等值线求最大值

我们问：目标函数值为 29, 30, 35, … 的可行

解又怎样呢？当然它们在可行域 D 中，且分别满足

$$7x_1+6x_2=29,\quad 7x_1+6x_2=30,\quad 7x_1+6x_2=35$$

等等的线段上．这些线段是互相平行的．目标函数值增大时，这些线段越来越远离 L 和坐标原点，但又必须在可行域 D 内．我们看到 L_B 对应的目标函数值该是最大的了．而它与可行域 D 的交点就是直线 L_1 与 L_2

$$L_1:\ 2x_1+3x_2=27,\qquad L_2:\ 40x_1+10x_2=290$$

的交点 B，它是

$$x_1=6,\quad x_2=5.$$

目标函数值为

$$7\times6+6\times5=72.$$

所以，例 1.1 的答案是

(1) 甲、乙两种产品都生产，

(2) 最优的产品结构是：生产 6 m 甲产品，5 m 乙产品，

(3)最大(总)利润等于 72 元，

(4)所有的资源，塑料与电力，全部用完．

这个答案会使整个车间都满意的．

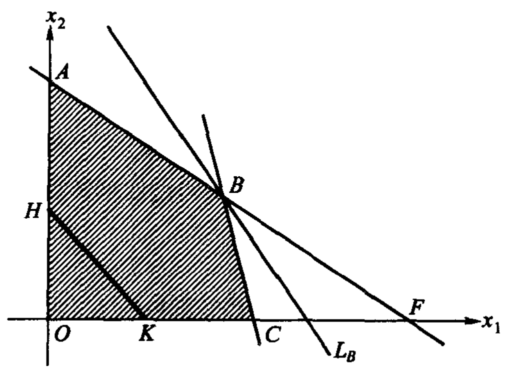

图 4

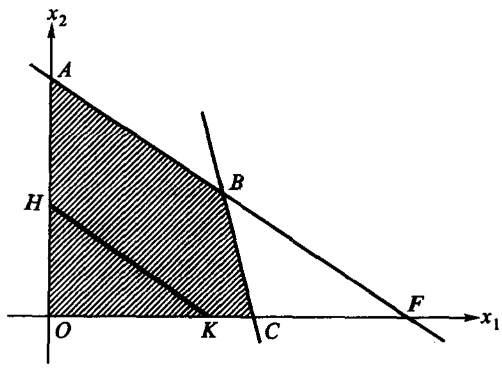

图 5

附带说一下，如果例 1.1 中每米甲产品的利润从 7元改为 4 元，目标函数变为

$$z=4x_1+6x_2. \tag{2.6}$$

那么，要求解的问题是：

$$\max\ z=4x_1+6x_2$$
$$s.t.\begin{cases}2x_1+3x_2\le 27\\40x_1+10x_2\le 290\\x_1,\ x_2\ge 0\end{cases}$$

当然可以用同样的方法找到最优解．需要注意的是，目标函数的等值线总是与边界线段 AB 相平行(图 5)，随着数值增大，等值线越来越和线段 AB 接近，终于重合．线段 AB 上每一点都是最优解，对应的值都是

$$z=4x_1+6x_2=2\times(2x_1+3x_2)=2\times27=54.$$

所以目标函数为 (2.6) 时，这个问题有无数多组最优方案例如 (3，7), ($\frac{3}{2}$, 8), (5, $\frac{17}{3}$),$\cdots$等等，它们的利润都是 54 元.

§1.3 产品结构优化问题与线性规划的基本概念

§1.3. 基本概念

炼钢厂把生铁、电力、工时等投入炼钢炉炼出各种钢锭. 饲料公司用黄豆、小麦、米糠、维生素 A, B, C, ...,煤炭,工时,等等生产各种饲料. 塑料加工车间用塑料、煤气、工时等等加工各种生活用品.

炼钢厂，饲料公司，塑料加工车间等等都是从事生产的单位生产出的钢锭、饲料、塑料用品等等统统叫做产品. 生铁、黄豆、小麦、塑料等等是原料，电力、煤炭、汽油等等属能源，人员、机器等等为生产能够工作的时间，叫做工时. 所有这些统叫做资源.

一样东西，在不同的生产过程中，所处的地位是不必相同的生铁在炼铁厂是产品，而在炼钢厂则是原料，是资源. 塑料在塑料厂是产品，而在塑料加工车间则是原料，等等.

把国家计划、市场需要、客户定制等统叫做社会需要.

把直接从事生产和经营活动，且具有决策权的单位，如车间、工厂、公司等，统叫做工厂. 它们总是在给定的资源条件下，根据社会需要，生产出各种产品.

生产 种产品，需要某些资源. 生产这种产品 1 个单位（单位：t, L^3, m,块,个,等等),它需要这种原料多少，哪种能源若干，花多少工时等等，都有定额. 这些数据叫做技术参数或消耗系数. 生产不同的产品 1 个单位，资源的消耗系数不尽相同.

对某种生产任务有权作出决策的人叫做（生产）组织者或决策者.

组织者要不断考虑如何组织一个生产方案：即不生产哪些产品，生产哪些产品，它们又各生产多少. 有时我们还把“生产哪几种产品，不生产哪几种”这件事叫做一种产品结构.

组织者除了考虑上述资源、消耗系数、社会需求的限制外，还可能有各种技术要求，甚至种种主观的要求和偏爱，等等. 这些限制和要求叫做约束条件.

尽管有许多约束条件，依然有众多的产品结构可供选择.

出售不同的产品每 1 个单位，不必有相同的利润. 不同的产品结构不必有相同的(总)利润.

组织者的本领就在于，在所有的产品结构中，如何挑出总利润更大、甚至最大的产品结构. 即优化它的产品结构.

所以，产品结构优化问题是在生产中，根据资源约束、社会需求和主观条件，如何确定最优的产品结构的问题

产品结构优化问题中涉及到的最基本概念有

工厂，产品，利润（成本），资源，技术参数，决策者

资源则包括材料、能源、时间、设备、人员和信息等.

§1.3.2 线性规划　一种数学模型

读了例 1.1，我们可以想象：一般来说，某个工厂能够生产若干种产品，生产每种产品 1 个单位有规定的技术参数，售出每种产品 1 个单位有预期的利润. 当所用各种资源给定限量时，人们自然要考虑如何组织生产以获得更大的利润. 这件事可以像表 1.1 那样写出来. 再像(1.1)-(1.4)那样，写出数学表达式. 我们不准备写出最一般的形式，只写出五种产品三种资源的一般形式如下：

表 1.2

	甲	乙	丙	丁	戊	资源
利　润	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	?
资 源 1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	b_1
资 源 2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	b_2
资 源 3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	b_3

诸 a 是相应产品的技术参数. 它们都是非负数. 诸 b 与 c 一般在这里都是正数.

设五种产品的产量为 x_1, x_2, x_3, x_4 与 x_5,则问题转化为

$$\max \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5$$

$$s.t. \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 \le b_3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \ge 0 \end{cases}$$

人们把它叫产品结构优化问题(表 1.2)的数学模型.

把 x_1、x_2、x_3、x_4 与 x_5 叫做决策变量　上式由三块所组成. 第一块叫做目标函数和求解任务(这里求最大,有时还会有求(总成本)最小的问题),第二块是涉及种种资源的限制、技术条件的约束等. 像上面的三个资源的限制，叫做主约束条件. 第三块是关于决策变量本身的，叫做变量(非负)约束条件. 后两块合称为约束条件.

满足所有主约束条件的一组决策量叫做主约束条件的一个解，常写成

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5].$$

如果主约束条件的解还满足非负约束条件，这个解叫做一个可行解. 所有可行解构成一个集合，记作 D,叫做可行域或可行解集合.

这个数学模型中，如果所有的参数可以是任意实数，每个主约束条件的关系符号可以是≤、=、≥ 中的任何一种,变量约束条件可作更为一般的规定,求解任务不仅可以求最大,也可以求最小，求解这样的一般模型叫做线性规划问题. 人们之所以说它是“线性”的，是指目标函数是线性的，所有主约束条件的左端关于决策变量是线性的式子，以及所有决策变量约束也要都是线性的.

因此，产品结构优化问题是线性规划所研究的一个问题.

线性规划 (Linear Programming) 是运筹学中一门极为重要的分支. 它已经给许许多多的国家、部门和企业带来了极其丰厚的经济效益，提高了它们的管理水平. 它在国民经济、工程技术以及现代管理中的重要作用怎么强调也不会过分.

在 §1.2 中,讲了用解析几何的方法求解例 1.1. 用这个简明直观的方法来求解变量为两个的线性规划问题,同样是有效的. 不仅可以求最大值，还可以求最小值（这时，用“min”来表示，它是英文动词 minimize (求最小)的前三个字母). 由于约束条件的任意性，读者不妨自己设计种

种约束条件，从而发现，线性规划问题可能有唯一解，有无穷多组解，可能没有有限的最优解，甚至根本没有可行解（这时可行域是空集合）.

当我们学会了平面解析几何方法以后，应该分析它的有效范围. 当产品品种(/变量）多于两个，几何的直观性就很难发挥了. 为此，追求求解任意多个变量的线性规划的方法是一个基本思路. 许多教材都采用美国运筹学家 G. Dantzig 教授所发现的所谓单纯形法. 这个方法使用起来是方便的，但是论证的过程中需要抽象空间的概念和理论. 本教程的编者们深感到，无论在讲授还是在学习，这都是一件相当艰难的事. 人们当然要问：能否有更为简单的论述方法来得到同样的结果？在第 2 章，我们将提出一个简单的方法.

学会了求解线性规划的基本方法，就会求解产品结构优化问题.

练 习

1.1 有塑料 7 kg 和 9 个工时可用来生产三种产品：生产第一种 1 m 长需 1 kg 塑料和 1 个工时，售后利润为 14 元 第二种 1 m 长则需 1 kg 塑料和 2 个工时，利润为 21 元；第三种 1 m 长需 2 kg 塑料和 3 个工时，售后利润为 35 元. 为了使总利润最大，请建立这个问题的线性规划模型，不用求解.

1.2 某养殖场饲养动物出售. 设每头动物每天至少需 25 g 蛋白质，3 g 矿物质和 4.5 mg 维生素. 现有五种原料可供选购，各种原料每公斤的价格及营养成分的含量如下表：

	饲料				
	1	2	3	4	5
价格(元/kg)	0.2	0.7	0.4	0.3	0.8
蛋白质(g)	3	2	9	6	16
矿物质(g)	1	0.5	0.7	2	0.4
维生素(mg)	0.5	1	0.3	1.5	0.8

要求确定既满足动物生长需要，又使费用最省的选购方案. 请建立这个问题的线性规划模型，不用求解.

1.3 用解析几何方法求解下列问题：

(i) max $z = x_1 + 3x_2$

s.t. $2x_1 + 3x_2 \le 6$

$x_1 + 4x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

(ii) max $z = 3x_1 - 2x_2$

s.t. $x_1 + x_2 \le 1$

$2x_1 + 3x_2 \le 4$

$x_1, x_2 \ge 0$

(iii) max $z = -x_1 + x_2$

s.t $6x_1 - 2x_2 \le 3$

$-2x_1 + 3x_2 \le 6$

$2x_1 + 3x_2 \le 24$

$x_1, x_2 \ge 0$

(iv) min $z = x_1 + x_2$

s.t. $3x_1 + 2x_2 \ge 9$

$3x_1 - 5x_2 \ge 30$

$x_1, x_2 \ge 0$

(v) max $z = 2x_1 + 3x_2$
s.t. $5x_1 + 6x_2 \le 30$
$4x_1 + 6x_2 \ge 5$
$x_1, x_2 \ge 0$

(vi) min $z = 2x_1 + 3x_2$
s.t. $5x_1 + 6x_2 \le 30$
$4x_1 + 6x_2 \le 5$
$x_1, x_2 \ge 0$

(vii) min $z = 2x_1 + 3x_2$
s.t. $5x_1 + 6x_2 \le 30$
$4x_1 + 6x_2 \ge 5$
$x_1, x_2 \ge 0$

(viii) max $z = 2x_1 + 3x_2$
s.t. $5x_1 + 6x_2 \ge 30$
$4x_1 + 6x_2 \le 5$
$x_1, x_2 \ge 0$

(ix) max $z = 6x_1 + 4x_2$
s.t. $2x_1 + x_2 \ge 1$
$3x_1 + 4x_2 \ge 1.5$
$x_1, x_2 \ge 0$

【答：(i) $x_1 = 2.4, x_2 = 0.4$; $z = 3.6$. (ii) $x_1 = 1, x_2 = 0$; $z = 3$.
(iii) $x_1 = 0, x_2 = 2$; $z = 2$. (iv) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; $z = 3$.
(v) $x_1 = 0, x_2 = 5$; $z = 15$. (vi) $x_1 = 0, x_2 = 0$; $z = 0$.
(vii) 有无穷多组解. 例如，$x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{6}$; $z = 2.5$.
(viii) 可行域是空集合，无解. (ix) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; $z = 4$.】

1.4 在您的生活和工作环境中，写出三个产品结构优化问题.

1.5 请您写出几个线性规划的数字题，分别使题目

(1)有唯一解；

(2) 有无穷多组解；

(3) 没有有限的最优解；

(4)根本没有可行解.

第 2 章　求解线性规划的有限改进法

本章从一元一次方程讲起，逐步讲出求解线性规划的代数方法：有限改进法，还介绍表上作业法. 实质上，这就是人们熟知的线性规划的单纯形法.

§2.1 一元一次方程与有限改进法

§2.1.1 一元一次方程

例 2.1 设有一元一次方程

$$5x-2 = 3x + 10. \tag{1.1}$$

读者肯定能熟练地求出它的解. 在这里似乎不必多讲了. 但请读者耐心阅读，看看能够从中得到什么启发.

有没有比 (1.1) 更简单的一元一次方程呢？能否给出一个最为简单的？像

$$x=a \tag{1.2}$$

该是最简单的一个. 按定义，这是一个一元一次方程. 把 x 用 a 代入，左右两端变为恒等式. a 就是它的解(/根). 人们常常还用(1.2)来表示 "a 是方程 (1.2) 的解".

所以,一方面，(1.2)是需要求解的一元一次方程；另一方面，它表示了方程的解. (1.2)的解就是(1.2) 自己.

看来(1.2)是简单不过的形式,一种'好得不能更好'的形式.

让(1.1)与(1.2)相比较，后者有三个"好"的地方：

(1) 右端没有 x 项.

(2) 左端没有常数项.

(3) 左端 x 的系数等于 1.

现在就把这三条作为"好"的标准. 如果能有办法把"不好"之处逐步消除掉，变"不好为好"，直到"不能更好"，问题也就能够得到解决.

可以利用代数运算规则和原理来逐步变"好". 前者是指交换律、结合律和分配律. 后者包括三个原理：一是等量加(减)等量,其和(差)仍等,从而导出移项规则. 二是等量乘(除)以不为零的量,其积(商)仍等. 三是经过上述运算得到的方程与原方程具有相同的解. 利用这三个运算规律和原理所进行的演算，叫做同解变换.

现在把"不好"的方程(1.1)变换为"较好"的. 把右端的 x项移到左端，得

$$2x-2=10. \tag{1.3}$$

(1.3)左端还有常数项. 现在两端同时加以 2,即把 -2移到右端得

$$2x = 12. \tag{1.4}$$

它还不是"不能更好"的. 两端除以 2,即得

$$x = 6. \tag{1.5}$$

这是"不能更好"的形式. 方程(1.5)的解 x 等于 6. 但是(1.5)、(1.4)、(1.3)及(1.1)是同解的. 所以(1.1)的解是(1.5).

§ 2.1.2 指归形式有限改进法

设有一个类似一元一次方程的问题.如果我们能够认定某个相应的形式是"不能更好"的，如果能够确定出它的"好"处若干条，并且还有办法能够把"不好"之处一一克服掉，我们就有可能解出这个问题. 这种解题的方法叫做改进法. 改进法是千百万次生活实践中抽象出来的：要整理一团乱毛线，目标是一个结也没有. 人们找出一端，一个个地把结打开，一步步地改进，毛线也就理清了. 无论有多少个结，从道理上讲，总是能够理清的.

我们把"不能更好"的形式叫做指归形式[①].

如果只要改进有限次（即保证不会没完没了地改进下去），总能保证到达指归形式，或者宣告无解，这种方法叫做有限改进法.

求解方程 (1.1) 的步骤是，首先确定它的指归形式为方程 (1.2),发现它有三个特征,再利用同解变换,依次得到(1.3)、(1.4)和(1.5)，它们都是(1.1) 的改进形式. 而 (1.5) 还是(1.1) 的指归形式. 它就是（1.1）的解.

由此可见，一个问题能用有限改进法求解，具备以下条件就可以了：

(1) 能够确定出合理的指归形式.

(2) 弄清指归形式的全部特征，而这些特征的总和足以构成指归形式.

(3) 存在有效的办法，按特征改进给定问题的形式，直至得到指归形式或宣告无解为止.

本章以下各个问题都用有限改进法来求解.

§ 2.2 $m\times n$ 方程组($m=n$) 表上作业法

把由 n 个变量（未知数）m 个线性方程构成的方程组记作 $m\times n$ 方程组. $1\times n$ 方程组事实上只是一个方程，它含有 n 个变量. 例 2.1 是一个 1×1 方程(组).

本节先讨论 $m=n$ 的特殊情形. 这是读者在中学学习过的最为熟悉的内容.

§ 2.2.1 2×2 方程组

例 **2.2** 设有 2×2 方程组 I:

$$\mathrm{I}:\begin{cases}2x_1+3x_2=27 & \mathrm{I}_1\\ 4x_1+x_2=29 & \mathrm{I}_2\end{cases}$$

其中I 表示方程组，$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$依次表示它的第 1 与第 2 个方程.

对于这类 2×2 方程组,把

$$\mathrm{H}:\begin{cases}x_1 \qquad = a & \mathrm{H}_1\\ \qquad x_2=b & \mathrm{H}_2\end{cases}$$

作为指归形式，因为这个方程组的解是垂手可得的，就是 H_1和 H_2本身.

这个指归形式的特征是：

(1) 作为一元一次方程， $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$都是指归形式..

[①] 编者深切怀念武汉钢铁学院科技外语教授陈星焯(1922–05~1993–07–03). 他指出,南朝齐王僧虔 (426 – 485) 《戒子书》中讲"窥其题目,辨其指归." 意思是,要弄清题目的宗旨,辨明其意向之所在. 为此,他建议使用"指归形式" 作为我们讨论问题的一个基本概念. 它的英文译名可以是 ultimately desired form 或者 ultimately reduced form. 《辞海》有"指归"(第 692 页) 和"王僧虔"(第 1200 页)两个条目.

(2) x_1, x_2 分别只在 H_1，H_2 中出现.

在方程 I_1 中选定 x_1. 让其系数变为 1. 即用 $\frac{1}{2}$ 乘方程 I_1 的两端，得到的方程记作 II_1: $\mathrm{II}_1=\frac{1}{2}\mathrm{I}_1$，即

$$x_1+\frac{3}{2}x_2 = \frac{27}{2}. \qquad \mathrm{II}_1$$

既然选定了 x_1 在 I_1 中，II_2 中就不能再有 x_1. 用 II_1 消去 I_2 中的 x_1. 这可以用 I_2 减去 II_1 的 4 倍来得到，记作 $\mathrm{II}_2=\mathrm{I}_2-4\mathrm{II}_1$，即 $(4x_1+x_2)-4(x_1+\frac{3}{2}x_2)=29-4\times\frac{27}{2}$，亦即

$$-5x_2=-25, \qquad \mathrm{II}_2$$

从而得到方程组

$$\mathrm{II}: \begin{cases} x_1+\frac{3}{2}x_2=\frac{27}{2} & \mathrm{II}_1 \\ \quad\ -5x_2=-25 & \mathrm{II}_2 \end{cases}$$

II 是 I 的一个改进，因为 II_2 中已经不含有 x_1 了. 但 II 不是指归形式，因为 II_1 中仍有 x_2，且 II_2 中的 x_2 的系数还不是 1. 为此作 $\mathrm{III}_2=-\frac{1}{5}\mathrm{II}_2$，$\mathrm{III}_1=\mathrm{II}_1-\frac{3}{2}\mathrm{III}_2$，得

$$x_2=5, \qquad \mathrm{III}_2$$

与 $(x_1+\frac{3}{2}x_2)-\frac{3}{2}(x_2)=\frac{27}{2}-\frac{3}{2}\times 5$，即

$$x_1=6. \qquad \mathrm{III}_1$$

于是得方程组 III:

$$\mathrm{III}: \begin{cases} x_1 \qquad =6 & \mathrm{III}_1 \\ \qquad x_2=5 & \mathrm{III}_2 \end{cases}$$

这是指归形式. 方程组 I, II, III 是同解的. 从而 III 就是方程组 I 的解. 有时解还写作 $[x_1\ \ x_2]=[6\ \ 5]$，6 与 5 依次是解向量的第 1 和第 2 个分量.

§2.2.2 表上作业法

把一个方程、例如把例 2.2 的 I_1，写成下面的形式

表 2.1

x_1	x_2	b	代 号
2	3	27	I_1

其中 b 列表示常数项于是方程组 I 可以写成

表 2.2

	x_1	x_2	b	代 号
I :	2	3	27	I_1
	4	1	29	I_2

求解方程组 I 的全过程就在下表中完成：

表 2.3

	x_1	x_2	b	代 号	运算规则
I :	2*	3	27	I_1	
	4	1	29	I_2	
II:	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{2}$	II_1	$\frac{1}{2}\mathrm{I}_1$
		−5*	−25	II_2	$\mathrm{I}_2-4\mathrm{II}_1$
III:	1		6	III_1	$\mathrm{II}_1-\frac{3}{2}\mathrm{III}_2$
		1	5	III_2	$-\frac{1}{5}\mathrm{II}_2$

表中相邻横双线之间是一个方程组,叫做一个(计算)框. 竖双线之右记载方程的代号以及得到它的运算规则. 竖(单)线意思是相等或等号. 方程组中应写字而未写的地方表示 0. 我们在方程 I_1中的 x_1系数 2 的右上角打了一个“ * ”，表示准备在下一框中把它变为 1，并把这列的其余数字(系数)消去变为零. 为了突出这两件事，我们还用了灰度 12.5%的底纹涂上这个行和列. 其计算结果写在框 II 中. 读者还可以比照 § 2.2.1 的运算读懂这个表. 读者一定要弄明白这表中所有各个文字、符号和格线的意义，以及它们之间的关系.

当然，在运算熟练之后，灰色底纹甚至竖双线的右边全都可以省略.

§ 2.2.3 3×3 方程组

上述方法当然可以用来求解 3×3, 4×4, …, $n\times n$ 方程组，只要注意：指归形式的特征(2)改用下面的就行了：

(2) 一个未知数只在一个方程中出现.

例 **2.3** 求解 3×3 方程组

$$\mathrm{I}:\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-1 & \mathrm{I}_1\\ x_1+x_2+x_3=6 & \mathrm{I}_2\\ 3x_1+x_2-2x_3=-1 & \mathrm{I}_3\end{cases}$$

我们先选定 x_1于方程I_2中. 因为它的系数已经是 1 了,计算可方便些. 余下的全在表 2.4 中说明了.

表 2.4

	x_1	x_2	x_3	b	代 号	运算规则
	2	−3	1	−1	I_1	
I:	1*	1	1	6	I_2	
	3	1	−2	−1	I_3	
		−5*	−1	−13	II_1	$\mathrm{I}_1-2\mathrm{II}_2$
II:	1	1	1	6	II_2	I_2
		−2	−5	−19	II_3	$\mathrm{I}_3-3\mathrm{II}_2$
		1	$\frac{1}{5}$	$\frac{13}{5}$	III_1	$-\frac{1}{5}\mathrm{II}_1$
III :	1		$\frac{4}{5}$	$\frac{17}{5}$	III_2	$\mathrm{II}_2-\mathrm{III}_1$
			$-\frac{23}{5}$*	$-\frac{69}{5}$	III_3	$\mathrm{II}_3+2\mathrm{III}_1$
		1		2	IV_1	$\mathrm{III}_1-\frac{1}{5}\mathrm{IV}_3$
VI :	1			1	IV_2	$\mathrm{III}_2-\frac{4}{5}\mathrm{IV}_3$
			1	3	IV_3	$-\frac{5}{23}\mathrm{III}_3$

所以，方程组的解是

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=3.$$

即 [1 2 3].

在中学里，根据系数的特殊性，读者学习了许多求解方程组的技巧．学起来饶有兴味，思维也得到了训练．如果所给的方程组根据系数的特殊性确实有技巧可用，笔算时当然照用．但是，我们这里更强调解题的规律性．找出一种运算规则，一步步做下去，就能得到结果．这样做的理由有二．一是大量生产实际问题，特别是产品结构优化问题，系数往往错综复杂，一般很难找出可利用的规律，以减少计算量；二是有了解题的通用运算规则，即算法，就容易编出程序，让计算机解题．

为此，我们并不赞成像例 2.3 那样，一开始在框 I 中，注意到第 2 个方程中的系数等于 1，等等．建议读者从第 1 个方程开始，进行求解例 2.3．

§2.2.4　$m\times n$方程组($m=n$) 解的三种情形

在 §2.1 中讨论一元一次(1×1)方程 $5x-2=3x+10$ 时，是把 $x=a$ 作为它的指归形式的．这时是以所给方程确实具有有限解为前提的．一元一次方程的解还有没有其它情形呢？设有

$$5x-2=5x+10.$$

它当然是一个一元一次方程．两边消去 $5x$，就发现所谓的矛盾方程．事实上，没有一个有限的实数能够满足这个方程．所以，它是无解的一元一次方程．又例如

$$5x-2=5x-2,$$

它当然也是一个一元一次方程．经过简单运算，就得到 $0=0$．任意一个实数都是它的解它有无穷多个解．

这两个情形的数字方程都不能通过改进而达到指归形式 $x=a$．

所以，1×1 方程的解有三种情形．无解；有无穷多个解和有唯一解．后者可以用指归形式作为求解的向导，前两种情形则不能．

在 §2.2.1 中讨论了 2×2 方程组

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=27\\4x_1+\ \ x_2=29\end{cases}$$

我们采用了

$$\mathrm{H}:\begin{cases}x_1\qquad=a\\ \qquad x_2=b\end{cases}$$

作为它的指归形式．其实，能够改进为指归形式的方程组，同样是以具有唯一的一组解为前提的．下面有

$$\begin{cases}12x_1+3x_2=27\\ \ \ 4x_1+\ \ x_2=29\end{cases}$$

它是方程组，但是任何一组有限的实数都不能成为它的解．在解析几何中，这两个方程是两条平行直线．它们当然没有交点．

再有方程组

$$\begin{cases}12x_1+3x_2=27\\ \ \ 4x_1+\ \ x_2=9\end{cases}$$

显然，[2　1] 和 [1　5] 都是方程组的解．其实，不管 h、k 等于多少，只要 $h+k=1$、那么

$[2\quad 1]h+[1\quad 5]k$, 即

$$[2h+k\quad h+5k]$$

也是方程组的解. 可见，像这样的方程组，只要发现它有两个解，它就有无穷多组解.

在解析几何中，此2×2方程组所代表的是两条直线. 它们有两个交点，就有无穷多个交点. 或者说，这个方程组具有任意多个解，即无穷多组解.

所以，2×2方程组的解有三种情形：无解；有无穷多组解和有唯一解. 后者可以用指归形式作为求解的向导，前两种情形则不行.

$n\times n$方程组($n>2$) 也同样有无解，有无穷多组解以及唯一解三种情形. 只是前两种的结构更复杂一些就是了.

所以，需要强调的一点是：在讨论$n\times n$方程组时，当我们设定它有上述的指归形式时，就已经默认了这个方程组是有唯一解的. 求解这类方程组时，不妨仍以指归形式为向导. 如果发生困难，再设法研究使方程组无解或是有无穷多个解的原因.

§2.3 $m\times n$ 方程组($m<n$)

§2.3.1 1×4 方程

例 2.4 求解 4 元线性方程

$$2x_1+3x_2+4x_3+9x_4=6. \tag{3.1}$$

让 4 个变量各取一个数,代入方程,能使两端恒等,这组数就是(3.1)的一个解. 例如

$[3\quad 0\quad 0\quad 0]$, $[0\quad 2\quad 0\quad 0]$, $[1\quad 0\quad 1\quad 0]$, $[1\quad 1\quad \frac{1}{4}\quad 0\quad]$, $[0\quad -1\quad 0\quad 1]$,等等都是.

选定一个系数不为零的变量，例如是x_1. 把其余的变量各给一个常数，(3.1)就成为一元方程. 为了方便地算出x_1, (3.1)可以写成

$$x_1+\tfrac{3}{2}x_2+2x_3+\tfrac{9}{2}x_4=3. \tag{3.2}$$

或

$$x_1=3-\tfrac{3}{2}x_2-2x_3-\tfrac{9}{2}x_4. \tag{3.3}$$

给定x_1以外的变量任意一组数，就可算出x_1. 这些数就是方程(3.1)的一个解.

(3.1) 有无穷多组解.

§2.3.2 2×4 方程组

例 2.5 设有2×4方程组

$$\mathrm{I}:\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+9x_4=7 & \mathrm{I}_1\\ 4x_1+x_2-2x_3+3x_4=4 & \mathrm{I}_2\end{cases}$$

选定一个系数不为 0 的变量,例如在第 1 个方程中的x_1. 假想其余的变量都是常数. 让第 1 个方程除以 2，它的x_1的系数化为 1,并消去第 2 个方程的x_1的项. 在下表中,得到框II. 再在II_2中，选一个异于 0 的系数,例如x_2的系数，把有限改进法以及表上作业法全都应用过来，而得到III: