教育科学"十五"国家规划课题研究成果

应用数学基础
——微积分

下册

宣立新　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是教育部课题‘21 世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践’的数学类子课题的重要成果之一,是以本科非数学专业《高等数学课程教学基本要求》为依据编写的全国通用教材。

本书突出重要概念的实际背景和理论知识的应用。全书分上、下册出版。上册内容为一元微积分和常微分方程等七章。下册内容为:向量代数与空间解析几何,多元微分学及其应用,多元函数积分学——黎曼积分及其应用,向量值函数在定向线、面上的积分及其应用,无穷级数等 5 章。每节配有思考题和习题。每章最后一节为综合例题(选学内容),便于教师因材施教。书后有附录,介绍数学软件包在下册各章中的使用以及思考题和习题参考答案。

本书保持上册的特点,说理浅显,通俗易懂,便于教也便于学。本书可供理、工、农各类本科专业的学生使用,也可作为技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础 .微积分 .下册 宣立新主编 .—北京:
高等教育出版社,2004 .7
ISBN 7 - 04 - 014414 - X

Ⅰ .应 . . . Ⅱ .宣 . . . Ⅲ .①应用数学 - 高等学校 -
教材②微积分 - 高等学校 - 教材 Ⅳ .O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 054942 号

策划编辑 王 强 责任编辑 高尚华 封面设计 王凌波 责任绘图 吴文信
版式设计 王艳红 责任校对 杨雪莲 责任印制

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http:// www .hep .edu .cn
总 机	010 - 82028899		http:// www .hep .com .cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
开 本	787×960 1/ 16	版 次	年 月第 1 版
印 张	20.75	印 次	年 月第 次印刷
字 数	390 000	定 价	21.90 元

总　　序

为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展需要，满足我国高校从精英教育向大众化教育的重大转移阶段中社会对高校应用型人才培养的各类要求，探索和建立我国高等学校应用型人才培养体系，全国高等学校教学研究中心(以下简称“教研中心”)在承担全国教育科学“十五”国家规划课题——“21世纪中国高等教育人才培养体系的创新与实践”研究工作的基础上，组织全国100余所以培养应用型人才为主的高等院校，进行其子项目课题——“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”的研究与探索，在高等院校应用型人才培养的教学内容、课程体系研究等方面取得了标志性成果，并在高等教育出版社的支持和配合下，推出了一批适应应用型人才培养需要的立体化教材，冠以“教育科学‘十五’国家规划课题研究成果”。

2002年11月，教研中心在南京工程学院组织召开了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题立项研讨会。会议确定由教研中心组织国家级课题立项，为参加立项研究的高等院校搭建高起点的研究平台，整体设计立项研究计划，明确目标。课题立项采用整体规划、分步实施、滚动立项的方式，分期分批启动立项研究计划。为了确保课题立项目标的实现，组建了“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题领导小组(亦为高校应用型人才立体化教材建设领导小组)。会后，教研中心组织了首批课题立项申报，有63所高校申报了近450项课题。2003年1月，在黑龙江工程学院进行了项目评审，经过课题领导小组严格的把关，确定了首批9项子课题的牵头学校、主持学校和参加学校。2003年3月至4月，各子课题相继召开了工作会议，交流了各校教学改革的情况和面临的具体问题，确定了项目分工，并全面开始研究工作。计划先集中力量，用两年时间形成一批有关人才培养模式、培养目标、教学内容和课程体系等理论研究成果报告和在研究报告基础上同步组织建设的反映应用型人才培养特色的立体化系列教材。

与过去立项研究不同的是，“21世纪中国高等学校应用型人才培养体系的创新与实践”课题研究在审视、选择、消化与吸收多年来已有应用型人才培养探索与实践成果基础上，紧密结合经济全球化时代高校应用型人才培养工作的实际需要，努力实践，大胆创新，采取边研究、边探索、边实践的方式，推进高校应用型人才培养工作，突出重点目标，并不断取得标志性的阶段成果。

教材建设作为保证和提高教学质量的重要支柱和基础,作为体现教学内容和教学方法的知识载体,在当前培养应用型人才中的作用是显而易见的。探索、建设适应新世纪我国高校应用型人才培养体系需要的教材体系已成为当前我国高校教学改革和教材建设工作面临的十分重要的任务。因此,在课题研究过程中,各课题组充分吸收已有的优秀教学改革成果,并和教学实际结合起来,认真讨论和研究教学内容和课程体系的改革,组织一批学术水平较高、教学经验较丰富、实践能力较强的教师,编写出一批以公共基础课和专业、技术基础课为主的有特色、适用性强的教材及相应的教学辅导书、电子教案,以满足高等学校应用型人才培养的需要。

我们相信,随着我国高等教育的发展和高校教学改革的不断深入,特别是随着教育部"高等学校教学质量和教学改革工程"的启动和实施,具有示范性和适应应用型人才培养的精品课程教材必将进一步促进我国高校教学质量的提高。

全国高等学校教学研究中心

2003年4月

目　　录

第八章

向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,通过平面直角坐标系使平面上的点与二元有序实数之间建立了一一对应关系,把平面上的图形与代数方程对应起来,从而可用代数方程研究平面几何问题. 空间解析几何按照类似的方法,通过空间直角坐标系使空间中的点与三元有序实数组、空间图形与代数方程之间相对应,用代数方法研究空间几何问题.

本章建立空间直角坐标系,推广平面向量的有关知识到空间向量,并以向量为工具讨论平面与空间直线,另外还讨论常见的曲面与空间曲线. 掌握这些内容是学习多元函数微积分的基础.

第一节　空间直角坐标系和向量的基本知识

一、空间直角坐标系

在空间过定点 O 作三条相互垂直且具有相同长度单位的数轴,分别称为 x 轴(横轴), y 轴(纵轴), z 轴(竖轴),并统称为坐标轴,点 O 称为坐标原点. 习惯上将 x 轴、y 轴放置在水平面上,三条轴的正方向构成右手系,即用右手握住 z 轴,当右手并拢的四指从 x 轴正向转过 $\pi/2$ 弧度后指向 y 轴正向时,竖起的大拇指的指向就是 z 轴正向,如图 8 - 1 所示,这样便建立了空间直角坐标系.

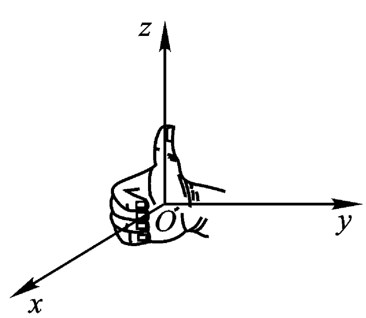

图 8 - 1

在空间直角坐标系中,任意两条坐标轴确定的平面,称为坐标面,它们是 xOy, yOz, zOx 坐标面. 三个两两相互垂直的坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个卦限. xOy 坐标面的上、下方各有四个卦限. xOy 平面上第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ象限上方的四个卦限依次称为第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限,下方的四个卦限则依次称为第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限. 例如含有 x 负半轴, y 负半轴, z 负半轴的卦限

是第Ⅶ卦限(图 8 - 2) .

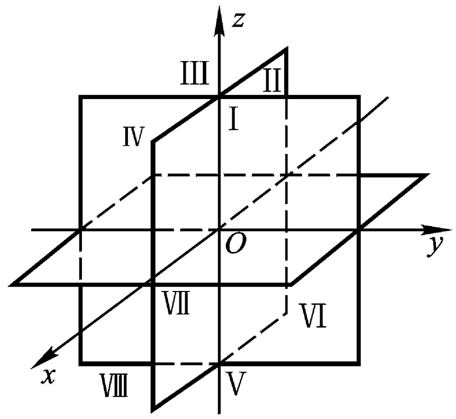

图 8 - 2

在空间直角坐标系中,设 M 为空间任一点,过点 M 作三个平面分别垂直三条坐标轴,交点分别为 P、Q、R,设点 P、Q、R 在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x, y, z(图 8 - 3),则点 M 惟一确定了一个三元有序实数组(x, y, z);反之,设(x, y, z)为三元有序实数组,则可在 x 轴、y 轴、z 轴上分别取坐标为 x, y, z 的点 P、Q、R,过点 P、Q、R 分别作平面与 x 轴、y 轴、z 轴垂直,这三个平面相交于一点 M,则一个三元有序实数组就惟一地确定了空间的一点 M .因此空间任一点 M 和三元有序实数组(x, y, z)之间建立了一一对应关系,称这组数 x, y, z 为点 M 的坐标,记作 $M(x, y, z)$,并分别称 x、y、z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标 .

显然,坐标原点 O 的坐标为$(0, 0, 0)$,坐标轴上的点有两个坐标为零,如 y 轴上的点为$(0, y, 0)$.坐标面上的点有一个坐标为零,如 zOx 坐标面上的点为$(x, 0, z)$.反之,有两个坐标为零的点在坐标轴上,有一个坐标为零的点在坐标面上 .

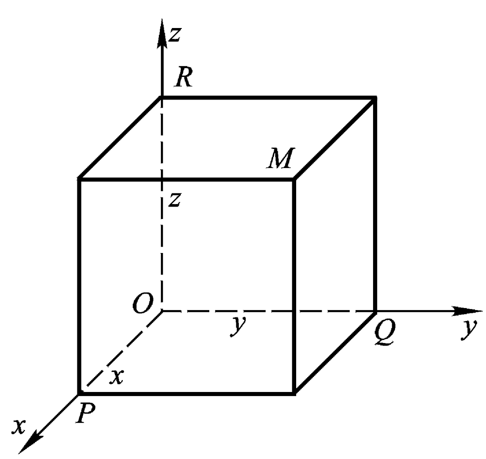

图 8 - 3

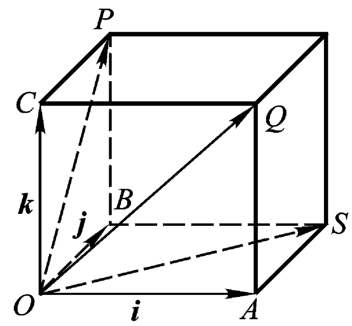

图 8 - 4

二、向量的基本知识

中学里讨论的向量、向量的加法与减法、实数与向量的积、两个向量的数量积等概念及其运算律,如向量加法的平行四边形法则、三角形法则等知识,并不涉及向量是平面向量还是空间中的向量,即这些概念和运算律都可以视为空间向量的有关知识 . 现在对定义方式不同的一些概念或书写格式不同的记号统一如下,并补充一些必要的知识:

(1) 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量记作 $\boldsymbol{e}_a$,对非零向量 $\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 与 x 轴、y 轴、z 轴同向的单位向量,分别记作 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$,并称为空间直角坐标系的基本单位向量 .

(2) 方向相同或相反的两个向量称为平行向量或共线向量 . 如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个平行向量,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 平行于同一平面的向量称为共面向量 .

由以上的定义有:

定理 1 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是存在实数 λ,使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 成立(留作思考题) .

例 1 设有单位立方体如图 8 - 4 所示,$\overline{OA}=\boldsymbol{i}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{j}$, $\overline{OC}=\boldsymbol{k}$,其三个面上的对角线向量 $\overline{OP}=\boldsymbol{a}$, $\overline{OQ}=\boldsymbol{b}$, $\overline{OS}=\boldsymbol{c}$,试把向量 $\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}$ 用 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 表示 .

解 $\because$ $\overline{OP}=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}$, $\overline{OQ}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$, $\overline{OS}=\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$,

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \boldsymbol{r}&=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}\\
&=\lambda(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})+\mu(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})+\gamma(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\\
&=(\mu+\gamma)\boldsymbol{i}+(\lambda+\gamma)\boldsymbol{j}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{k}\ .
\end{aligned}
$$

例 2 如图 8 - 5 所示,$ABCD$ 为等腰梯形,$\angle A=60°$,设 $\overline{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AD}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 表示 $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$.

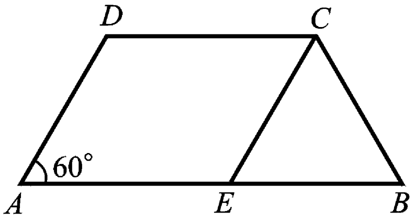

图 8 - 5

解 作 $EC/\!/AD$, $\because$ $\angle A=60°$, $\therefore$ $|BE|=|EC|=|BC|=|\boldsymbol{b}|$, $|DC|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$, 由于 $\overline{BE}=-|\boldsymbol{b}|\boldsymbol{e}_a=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$,则

$$\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{EC}=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overline{DC}=\overline{AE}=\overline{AB}-\overline{EB}=\overline{AB}+\overline{BE}=\boldsymbol{a}-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}=\frac{|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a},$$

$$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DC}=\frac{|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\ .$$

三、向量的坐标

1 . 向量在轴上的投影

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, 将它们的起点移到一点 O, 得到向量 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{a}_1$ 、$\boldsymbol{b}_1$ 所成的不超过π的角称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角, 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$. 因为零向量的方向可以任意取定, 因此零向量与另一个向量的夹角可以在 0 与 π 之间任意取值 . 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{2}$, 则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直, 记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. 向量与轴的夹角即向量与轴的正向的夹角 .

如图 8 - 6 所示, 设 A 为 u 轴外任意一点, 过 A 作一平面垂直 u 轴并交于点 A', 则称 A'为 A 在 u 轴上的投影 . 点 A、B 在 u 轴上的投影分别为 A'、B', 则 u 轴上的有向线段 $A'B'$的量称为向量 $\overline{AB}$ 在 u 轴上的投影, 记为 $\mathrm{Prj}_u \overline{AB}$.

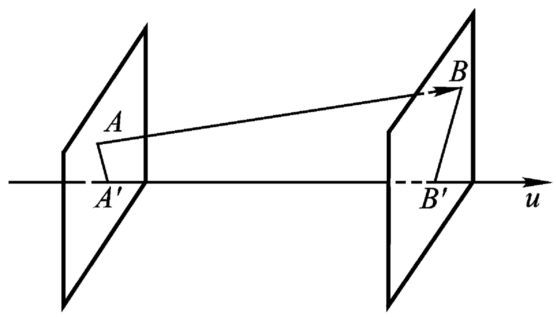

图 8 - 6

由图 8 - 6 和向量在轴上的投影的定义可知:

定理 2 向量 $\overline{AB}$ 在 u 轴上的投影等于向量的模乘以向量与 u 轴夹角 θ 的余弦, 即

$$\mathrm{Prj}_u \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \theta . \tag{1}$$

定理 3 有限个向量的和在轴上的投影等于它们分别在该轴上的投影之和, 即

$$\mathrm{Prj}_u (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n) = \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_1 + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \mathrm{Prj}_u \boldsymbol{a}_n ,$$

请读者自证 .

向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影, 即 $\boldsymbol{a}$ 在轴 b(以 $\boldsymbol{b}$ 的方向为轴的正向) 上的投影, 有

$$\mathrm{Prj}_b \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) .$$

2 . 向量的坐标表示

对于以 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 为起点, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为终点的向量 $\overline{M_1 M_2}$ (图 8 - 7), 则

$$\mathrm{Prj}_x \overline{M_1 M_2} = x_2 - x_1 , \mathrm{Prj}_y \overline{M_1 M_2} = y_2 - y_1 , \mathrm{Prj}_z \overline{M_1 M_2} = z_2 - z_1 ,$$

$x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ 称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标，记作

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\} \tag{2}$$

若记 $\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{a}$，$x_2-x_1=a_x$，$y_2-y_1=a_y$，$z_2-z_1=a_z$，(2)式即为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}, \tag{3}$$

且 $a_x=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}$，$a_y=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}$，$a_z=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}$．式(2)、(3)称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式．由图 8 - 7，

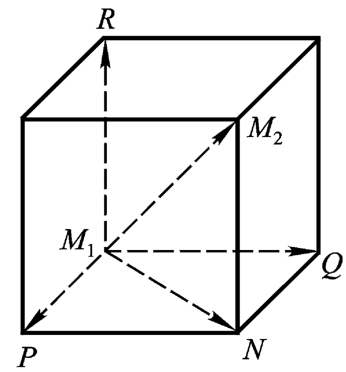

图 8 - 7

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM_2}=\overrightarrow{M_1P}+\overrightarrow{M_1Q}+\overrightarrow{M_1R}$$
$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.$$

即 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$， (4)

$$\therefore \qquad \boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}. \tag{5}$$

(4)、(5)式称为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 按基本单位向量的坐标分解式．

3．向量的模与两点间的距离公式

如图 8 - 7，应用勾股定理，得到向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{|M_1N|^2+|NM_2|^2}=\sqrt{|M_1P|^2+|M_1Q|^2+|M_1R|^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \tag{6}$$

即有空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$、$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 间的距离公式

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{7}$$

若向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，由(6)式可得向量 $\boldsymbol{a}$ 的模

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{8}$$

4．方向角与方向余弦

如图 8 - 8 所示，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别用 α、β、γ $(0\le\alpha, \beta, \gamma\le\pi)$ 表示，称 α、β、γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦．向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角或方向余弦完全确定了 $\boldsymbol{a}$ 的方向．

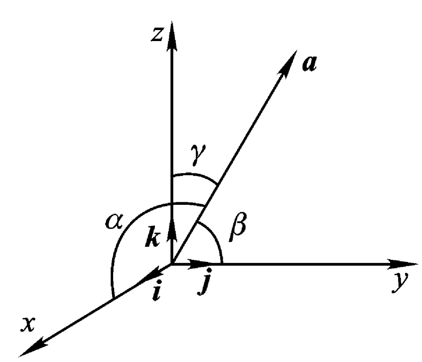

图 8 - 8

由向量在轴上的投影的定义，有

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}, \cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|} \tag{9}$$

由(9)式得到 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦间有以下关系：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{10}$$

例 3 设点 $A(1, -2, 2)$，$B(2, -3, 0)$，求 $\overrightarrow{AB}$

的方向余弦.方向角和$\overline{AB}$平行的单位向量.

解　$\overline{AB} = \quad 2-1, -3+2, 0- \quad 2 \quad = \quad 1, -1, - \quad 2 \quad ,$

由(8)式和(9)式,

$$|\overline{AB}| = 2,$$

$\overline{AB}$的方向余弦 $\cos\alpha = \frac{1}{2}, \cos\beta = -\frac{1}{2}, \cos\gamma = -\frac{2}{2}$,方向角 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{2}{3}\pi, \gamma = \frac{3\pi}{4}$.又

$$e_{AB} = \quad \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \quad = \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{2} \quad ,$$

因而与$\overline{AB}$平行的单位向量为$\pm \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{2} \quad$.

例 4　设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦 $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, |\boldsymbol{a}| = 3$,且它在 z 轴上的坐标是负的,求向量 $\boldsymbol{a}$.

解　$\because \ a_x = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha = 1, \ a_y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta = 2,$

$\therefore \ a_z = - \quad |\boldsymbol{a}|^2 - a_x^2 - a_y^2 = -2$,即 $\boldsymbol{a} = \quad 1, 2, -2 \quad$.

向量的坐标是表示和研究向量的一种极为重要的方式.中学里已学习用向量的坐标表示平面向量的线性运算、平行及相等,现将它们推广到空间向量中.

设 $\boldsymbol{a} = \quad a_x, a_y, a_z \quad, \boldsymbol{b} = \quad b_x, b_y, b_z \quad, \lambda$ 为常数,则

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \quad a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z \quad; \tag{11}$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = \quad \lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z \quad, \boldsymbol{e}_a = \quad \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \quad = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|} \quad a_x, a_y, a_z \quad; \tag{12}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \text{ 的充要条件是 } a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z; \tag{13}$$

$\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$ 的充要条件是$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$(某个分母为零时,表示相应的分子也为零).　　(14)

以上结论留给读者证明.

例 5　设 $\boldsymbol{a} = \quad 3, 2, 1 \quad, \boldsymbol{b} = \quad 2, 4/3, k \quad$,若 $\boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$,求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 及$\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

解　$\because \ \boldsymbol{a} /\!/ \boldsymbol{b}$,由(14)式$\frac{3}{2} = \frac{2}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{k}, \therefore k = \frac{2}{3}$,由(11)、(12)式,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \quad 3, 2, 1 \quad + \quad 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \quad = \quad 5, \frac{10}{3}, \frac{5}{3} \quad ,$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \quad 3, 2, 1 \quad - \quad 2, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \quad = \quad 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \quad ,$$

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{b} = \quad 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \quad .$$

思考题 8 - 1

1. 说明下列向量等式的几何意义:

(1) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$;(2) $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的向量, $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$, λ、$\mu \in \mathbf{R}$.

2. (1) 如图 8 - 9, L 为 xOy 面上的光滑曲线, L 的方程可写成 L 上点的向径形式

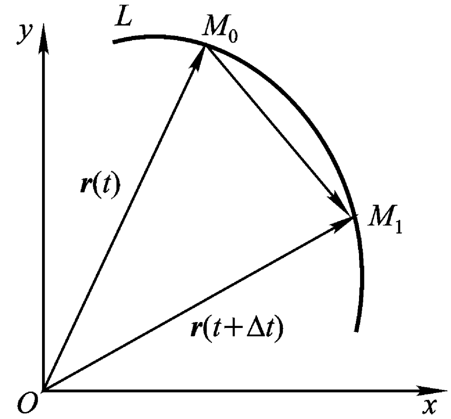

图 8 - 9

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}.$$

这与曲线的参数方程是什么关系?

(2) 将(1)中的 L 看成质点运动的轨迹,时刻 $t = t_0$ 时质点在 M_0, $t = t_0 + \Delta t$ 时质点在 M_1,记 $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)$,仿照数量函数导数的定义,写出 $\boldsymbol{r}'(t_0)$,解释 $\boldsymbol{r}'(t_0)$ 的几何意义和物理意义.

3. 设 P 点到点 $A(0,0,12)$ 的距离为 7, $\overline{OP}$ 的方向余弦是 $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$,求 P 点的坐标.

4. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与坐标面 yOz、zOx 和 xOy 的夹角分别为 θ_1、θ_2、θ_3,求 $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3$.

习题 8 - 1

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限:

$$A(2, -1, 3), B(1, 1, -4), C(-3, -1, -2), D(1, -4, -2).$$

2. 写出点 $P(2, -1, -3)$ 的下列对称点的坐标:

(1) 关于 yOz 面对称的点;

(2) 关于 x 轴对称的点;

(3) 关于原点的对称点.

3. 分别求点$(4, -3, 5)$到坐标原点、y 轴和 xOz 面的距离.

4. 设 $ABCD$ 为任一四边形,其各边的中点依次为 E、F、G、H. 用向量方法证明四边形 $EFGH$ 为平行四边形,且其周长等于原四边形 $ABCD$ 的对角线长度之和.

5．在 yOz 平面上，求与已知点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$和 $C(0,5,1)$等距离的点．

6．一向量的终点为 $M_2(4,-2,0)$，它在三条坐标轴上的投影依次为 3，2 和 7，求该向量的起点 M_1．

7．向量$\overline{OM}$与 x 轴成 $45°$，与 y 轴成 $60°$，它的长度等于 6，它在 z 轴上的坐标是负的，求向量$\overline{OM}$的各个坐标及沿$\overline{OM}$方向的单位向量．

8．已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，求与 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量．

9．已知点 $A(2,-1,3)$及点 $B(2,2,-1)$，求与向量$\overline{AB}$平行的单位向量．

10．已知 $\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 与 $\boldsymbol{b}=8\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+n\boldsymbol{k}$ 平行，求 m，n．

第二节　向量的乘法运算

一、两向量的数量积

中学里以物体在常力 $\boldsymbol{F}$ 作用下产生位移 $\boldsymbol{S}$ 时，力 $\boldsymbol{F}$ 对物体所做的功

$$W=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{S}|\cos(\widehat{\boldsymbol{F},\boldsymbol{S}}),$$

引进两个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的数量积的概念：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\ .\qquad(1)$$

这一定义对于空间的两个向量也适用．

由数量积的定义，对任意向量 $\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，且有

(1) $\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$；$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$．

定理 1　向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．

证　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，即$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$．

反之，设 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$．若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量，显然结论成立；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量，则 $|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$，由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，知 $\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，从而$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直．

根据数量积的定义及向量投影的性质，容易证明数量积符合下列运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$（交换律）；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$（分配律）；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$（关于数乘的结合律）．

按照向量数量积的运算律，可类似中学的方法导出向量数量积的坐标表示式．设

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z\ .\tag{2}$$
即两个向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和 .

当 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为非零向量时,由数量积定义可得
$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}\ .\tag{3}$$
(3)式可用来求两向量的夹角,且可看出两个向量垂直当且仅当
$$a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z=0\ .\tag{4}$$

例 1 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为三个非零向量, $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=\dfrac{\pi}{3}$, $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=\dfrac{\pi}{6}$, 且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$, 求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 的模 .

解 由数量积的定义和性质,有
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0,$$
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}})=1\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2},$$
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}})=2\cdot3\cdot\cos\frac{\pi}{6}=3\sqrt{3},$$
$$\begin{aligned}\therefore\quad(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=1+4+9+2\cdot0+2\cdot\frac{3}{2}+2\cdot3\sqrt{3}\\&=17+6\sqrt{3},\end{aligned}$$
即
$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|=\sqrt{17+6\sqrt{3}}\ .$$

例 2 已知三点 $M_1(1,0,1)$, $M_2(2,1,1)$和 $M_3(1,-1,1)$,求向量$\overline{M_1M_2}$与$\overline{M_1M_3}$的夹角 θ 以及向量$\overline{M_1M_3}$在$\overline{M_1M_2}$上的投影 .

解 $\because$ $\overline{M_1M_2}=\{1,1,0\}$, $\overline{M_1M_3}=\{0,-1,0\}$,
$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{M_1M_2}\cdot\overline{M_1M_3}}{|\overline{M_1M_2}||\overline{M_1M_3}|}=\frac{1\times0+1\times(-1)+0\times0}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \theta=\frac{3\pi}{4},$$
$$\mathrm{Prj}_{\overline{M_1M_2}}\overline{M_1M_3}=|\overline{M_1M_3}|\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}\ .$$

例 3 设液体流过平面 π 上面积为 A 的一个区域,如图 8 - 10(a)所示,液体在该区域上各点处的流速为常向量 $\boldsymbol{v}$. 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 π 的单位向量,求单位时间内流过这区域 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的液体的质量 M(液体的密度为 ρ) .

解 单位时间内流过区域 A 的液体体积恰是以 A 为底, $|\boldsymbol{v}|$ 为斜高的斜柱体体积(图 8 - 10(a)),这时柱体的斜高为 $\boldsymbol{v}$ 在 $\boldsymbol{n}$ 上的投影,所以体积(图 8 - 10(b))为
$$V=A|\boldsymbol{v}|\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{n}})=A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},$$

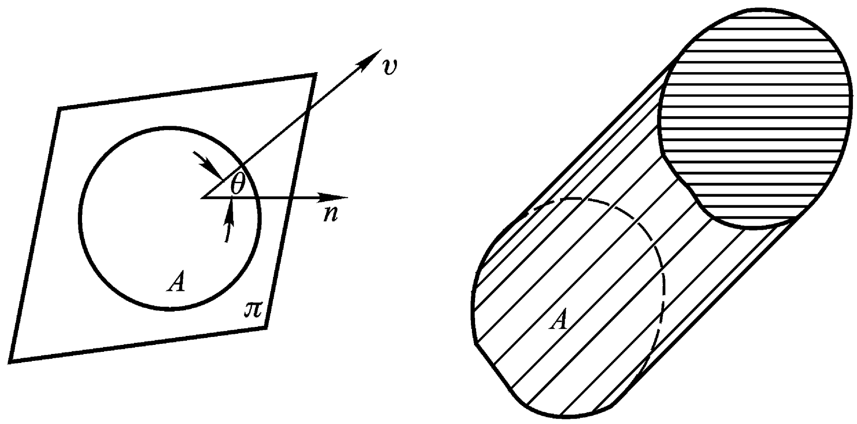

图 8 - 10

则单位时间内流过这区域 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的液体的质量为

$$m = \rho A\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}.$$

二、两向量的向量积

在物理学中研究物体转动时,要考虑物体所受的力矩,其支点为 O,有一力 $\boldsymbol{F}$ 作用在杠杆上点 P 处,力 $\boldsymbol{F}$ 与 $\overline{OP}$ 的夹角为 θ(图 8 - 11),则力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\boldsymbol{M}$,它的模为

$$|\boldsymbol{M}| = |OQ||\boldsymbol{F}| = |\overline{OP}||\boldsymbol{F}|\sin\theta,$$

$\boldsymbol{M}$ 的方向垂直于 $\overline{OP}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 决定的平面,其方向按右手系决定,当右手并拢的四指从 $\overline{OP}$ 的正向,转向 $\boldsymbol{F}$ 的正向,则大拇指所指方向即为 $\boldsymbol{M}$ 的正向(图 8 - 12).

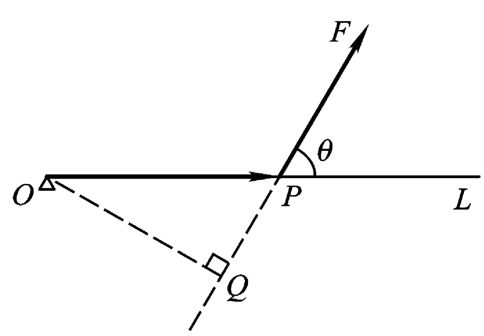

图 8 - 11

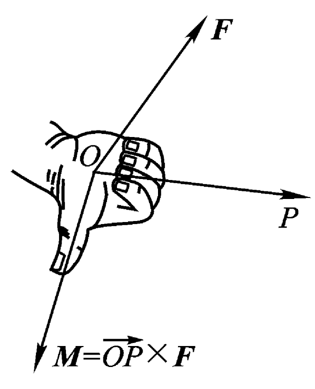

图 8 - 12

这种由两个已知向量按以上规则确定另一个向量的情形,在其他物理问题中也会遇到,现由此抽象出两个向量的向量积的定义.

定义 1 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积(叉积)是一个向量,记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,它的模

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}), \tag{5}$$

其几何意义是以 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积,它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 同时垂

直，且 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系.

由向量积定义，有

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(2) $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0}$;

$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$;

$\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j}$.

定理 2 向量 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

证 若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或 π，所以 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，从而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=0$，即 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 反之，若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个为零向量时，显然结论成立；当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，而 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，所以 $\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同方向或反方向，从而 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

向量积满足下面运算律：

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$（反交换律）；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$（关于数乘的结合律）；

(3) $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$（对加法的分配律）.

证明从略.

下面推导向量积的坐标表示式.

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，根据向量积的运算律，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\times\\&\quad(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

则向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的向量积的坐标表示式为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

为了帮助记忆，借助三阶行列式按第一行展开的法则，将上式写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}. \tag{6}$$

例 4 在长度为 0.25 m 的扳手上用 40 N 的力把一个螺栓拧紧（图 8-13），求关于螺栓中心 O 的力矩.

解 所求力矩 $\boldsymbol{M}$ 的模为

$$|\boldsymbol{M}|=|\overline{OP}\times\boldsymbol{F}|=|\overline{OP}||\boldsymbol{F}|\cdot\sin 75°$$