高等职业技术学院通用教材

应 用 数 学

上 册

屈宏香 主编
黄 旭 主审

中 国 铁 道 出 版 社
2 0 0 3 年 · 北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》,并结合作者多年从事本课程教学和教研的体会编写的。编者结合高职教育的特点,适度降低理论水平,注重培养学生用数学思想和方法解决实际问题的能力,并提供了大量例题供教学和自学用。

教材分为上、下两册,本书为上册。内容包括:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等。书中各节后均附有习题,书末集中给出了答案。

本书适用于招收高中毕业生和中职毕业生的三年制高职教育,也可供三年制普通大专的数学教学使用。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学/屈宏香主编.—北京:中国铁道出版社,2002.7

ISBN 7-113-05217-7

Ⅰ.应… Ⅱ.屈… Ⅲ.应用数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 044841 号

书　　名:应用数学·上册
作　　者:屈宏香　主编
出版发行:中国铁道出版社(100054,北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑:赵　静
编辑部电话:021-73133(路)　010-51873133(市)
封面设计:冯龙彬
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
开　　本:880×1230　1/32　印张:7.125　字数:206 千
版　　本:2003 年 8 月第 1 版　2003 年 8 月第 1 次印刷
印　　数:1～5 500 册
书　　号:ISBN 7-113-05217-7/O.110
定　　价:14.00 元

高等职业技术学院通用
教材编委会

前　言

本书是根据教育部最新制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》,结合作者多年从事本课程教学和教研的体会编写的,适用于招收高中毕业生和中职毕业生的三年制高职,也适用于三年制普通大专。

本书的编写原则是:夯实基础,强化能力,立足应用,服务专业。它有以下特色:

1. 力求从实际问题中引出数学概念,揭示概念的实质,强调数学概念与实际问题的联系。

2. 结合高职教育的特点,适度降低理论水平,采用数形结合法、描述法阐明数学概念和验证定理。例如,极限定义不采用“ε-δ”及“ε-N”语言,而代之以函数值变化趋势的分析和函数图形的描述。

3. 广泛征求了专业课教师的意见,体现了必需、够用为度和为专业课服务的教学原则,为专业课教学打下坚实的基础。

4. 本书内容简明、条理性强,有利于电化教学。

5. 注重培养学生用数学思想、方法解决实际问题的能力(把实际问题转化为数学模型,并求解数学模型)。例如,在微分方程应用教学中例题演解和习题训练都注重了这方面能力的培养。

6. 书中例题较多,既训练解题方法和思路,又指出在概念和运算上易犯的错误,有利于自学。

7. 叙述简练,语言确切,图形直观,数据准确。

教材分上、下两册,共十章,本书为上册,内容包括:函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程等。书中标有“ * ”号的为选学内容。

本书由屈宏香主编,黄旭主审。参加本书编写的作者依次是:陈雄波(第一、二章)、胡忠安(第三章)、屈宏香(第四、六章)、黄晓津(第五章)。全书插图由黄晓津绘制。

在编写过程中，得到了湖南铁道职业技术学院的大力支持，在此表示衷心感谢。

由于作者水平有限，时间仓促，错误和不当之处，恳请同行和读者指正。

编　者

2003 年 3 月

目　　录

上　　册

第 1 章　函数与极限

函数与极限是数学中两个重要而基本的概念.函数是高等数学研究的主要对象,极限则是揭示变量变化趋势的有力工具.本章将在复习和加深函数有关知识的基础上,讨论函数的极限和函数的连续性等问题.

§1-1　初 等 函 数

一、邻域的概念

设 a、$\delta \in \mathbf{R}$ 且 $\delta > 0$,数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 叫做点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a, \delta)$,点 a 称为这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径.

因为 $|x - a| < \delta$ 等价于 $a - \delta < x < a + \delta$,所以点 a 的 δ 邻域就是以 a 为中心、长度为 2δ 的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$,如图 1-1 所示.

图　1-1

图　1-2

有时要用到去掉中心的邻域,叫做去心邻域,点 a 的 δ 去心邻域就是数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$,记作 $U(\mathring{a}, \delta)$.显然,$U(\mathring{a}, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$,如图 1-2 所示.

二、初等函数

1.基本初等函数

以前学过的幂函数 $y = x^{\alpha}$ (α 是常数)、指数函数 $y = a^{x}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)、对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

2.复合函数

在实际问题中,常会遇到由几个较简单的函数组合而成较复杂的函数.例如,由函数 $y = u^2$ 和 $u = \sin x$ 可以组合成 $y = \sin^2 x$;又如,由函数

$y=\ln u$ 和 $u=2^x$ 可以组合成 $y=\ln 2^x$，这种组合称为函数的复合.

定义 1 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，并且 $\varphi(x)$ 的函数值的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那末 y 通过 u 的联系也是 x 的函数.这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$，其中 u 叫做中间变量.

例如，函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看作由 $y=\sqrt{u}$ 与 $u=1-x^2$ 复合而成；函数 $y=\arcsin(\ln x)$ 可看作由 $y=\arcsin u$ 与 $u=\ln x$ 复合而成.

值得注意的是，不是任何两个函数都可以复合成一个函数，如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个函数，因为对于 $u=2+x^2$ 中的任何 u 值，都不能使 $y=\arcsin u$ 有意义.另外，也可以由两个以上的函数复合成一个函数，如 $y=\ln u$、$u=\sin v$ 及 $v=\sqrt{x}$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

3.初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的，并能用一个式子表示的函数叫做初等函数.

例如 $y=\arcsin\dfrac{1}{2x+1}$，$y=x\ln 2^x-3x+2$，$y=\tan\sqrt{x}$ 等都是初等函数.在本书中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

4.函数的几种特性

(1)函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在某区间 I 上随着 x 的增大而增大(或减小)，即对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad [\text{或 } f(x_1)>f(x_2)],$$

则函数 $f(x)$ 叫做区间 I 上的单调增加(或减少)函数.

例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，$(-\infty,0)$ 称为函数的单调减少区间，$(0,+\infty)$ 称为函数的单调增加区间，它们统称为函数 $y=x^2$ 的单调区间.

单调增加函数的图形沿着 x 轴的正向而上升，单调减少函数的图形沿着 x 轴的正向而下降.

(2)函数的奇偶性

如果函数 $f(x)$对于定义域内的任意 x都有

$$f(-x)=-f(x)\quad [\text{或 } f(-x)=f(x)],$$

则 $f(x)$叫做奇(或偶)函数.

例如 $y=\sin x$、$y=x^3-x$ 是奇函数,$y=\cos x$、$y=x^4+x^2$ 是偶函数,$y=2^x$、$y=\arccos x$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

显然,由定义可知奇、偶函数的定义域均关于原点对称.

可以证明:奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.

(3)函数的周期性

如果函数 $f(x)$存在一个不为零的常数 l,使得关系式

$$f(x+l)=f(x)$$

对于定义域内的任何 x 值都成立,则 $f(x)$叫做周期函数,l 叫做函数 $f(x)$的周期.

通常,我们说周期函数的周期是指最小正周期,并且用 T 表示.

例如,由于 $\sin(x+2\pi)=\sin x$,所以 $\sin x$ 的周期是 $T=2\pi$.

一个以 l 为周期的周期函数,在定义域内每个长度为 l 的相邻区间上,函数图象有相同的形状.

(4)函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义,如果存在正数 M,使得对于区间 I 上的任何 x 值,对应函数值 $f(x)$都满足不等式

$$|f(x)|\leq M,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上有界;反之,如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$在区间 I 上无界.

有界函数的图象介于两条平行直线 $y=\pm M$ 之间.例如,$y=\arctan x$ 是有界函数,其图象介于 $y=\pm\frac{\pi}{2}$两平行直线之间,而 $y=\log_2 x$ 是一个无界函数.

5.反函数

设函数 $y=f(x)$.如果把 y 当作自变量,x 当作函数,则由关系式 $y=f(x)$所确定的函数 $x=\varphi(y)$叫做函数 $f(x)$的反函数,而 $f(x)$叫做

直接函数.

由于习惯上采用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示函数,因此,往往把函数 $x=\varphi(y)$ 改写成 $y=\varphi(x)$.

若在同一坐标平面上作出直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形,则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.例如,函数 $y=a^x$ 和它的反函数 $y=\log_a x$ 的图形就关于直线 $y=x$ 对称,如图 1-3 所示.

如果自变量取定值时,对应的函数值是唯一的,那末这样的函数叫单值函数,例如 $y=\sin x$ 是单值函数;如果自变量取定值时对应的函数值有两个或两个以上,那末这样的函数叫多值函数,例如 $x^2+y^2=2$ 是多值函数 以后如果没有特别说明,指的都是单值函数.

三、建立函数关系举例

在解决实际问题时,往往要先建立问题中的函数关系,然后进行分析和计算,下面举例说明建立函数关系的过程.

例 1　将直径为 d 的圆木料锯成截面为矩形的木材,如图 1-4 所示,试列出矩形截面两条边长之间的函数关系.

解　设矩形截面的一条边长为 x,另一条边长为 y,则由勾股定理得

$$x^2+y^2=d^2,$$

解出 y,得

$$y=\sqrt{d^2-x^2}\quad(0<x<d).$$

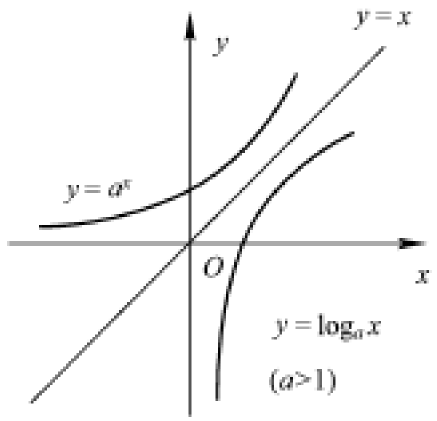

图　1-3

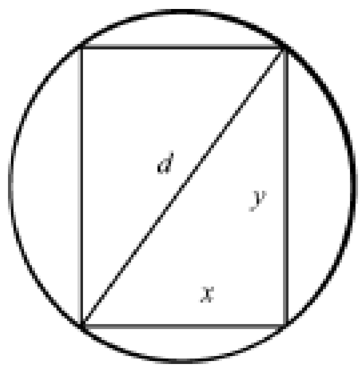

图　1-4

例 2　已知一单三角脉冲电压,其波形如图 1-5 所示,试建立电压 U(V)与时间 t(μs)之间的函数关系.

解　由图 1-5 可以看出,

$$U=\begin{cases}\dfrac{2E}{\tau}t & 当\ 0\leq t<\dfrac{\tau}{2}\\ -\dfrac{2E}{\tau}(t-\tau) & 当\ \dfrac{\tau}{2}\leq t<\tau\\ 0 & 当\ t\geq\tau\end{cases}$$

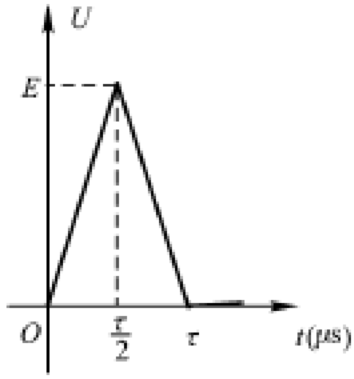

图　1-5

这就是电压 U 与时间 t 之间的函数关系.

上述函数在不同的定义范围内有不同的函数关系式,这样的函数叫做分段函数.

例 3　已知一物体与地面的摩擦系数是 μ,重量是 P,设有一与水平方向成 α 角的拉力 F,使物体从静止开始移动,如图 1-6 所示,求物体开始移动时拉力 F 与角 α 之间的函数关系式.

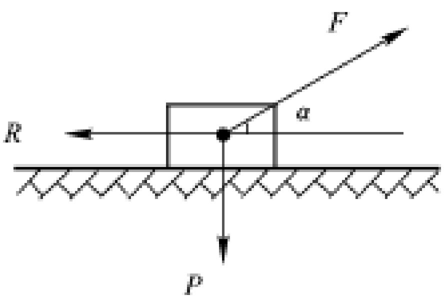

图　1-6

解　由物理学知识知:物体开始移动必须满足水平方向的拉力等于摩擦力的条件,即

$$F\cos\alpha=\mu(P-F\sin\alpha).$$

整理得

$$F=\frac{\mu P}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}.$$

这就是拉力 F 与角 α 之间的函数关系.

* 四、双曲函数

双曲函数也是初等函数,应用中常遇到的双曲函数有

双曲正弦

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2};$$

双曲余弦

$$\operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2};$$

双曲正切

$$\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}.$$

它们的图形如图 1-7、图 1-8 所示.

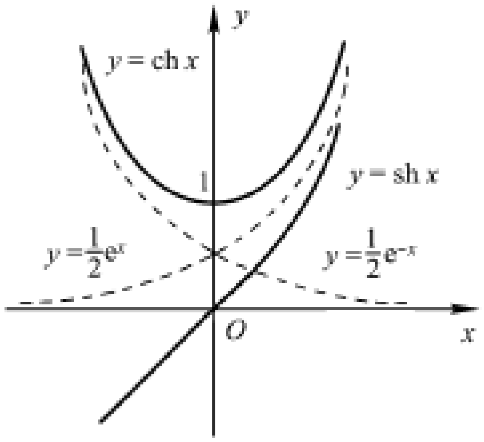

图 1-7

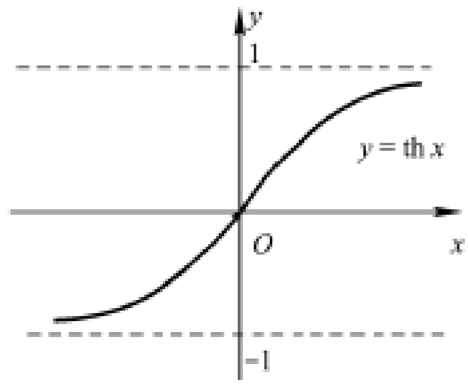

图 1-8

根据双曲函数的定义容易证明以下公式:

$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$; $\mathrm{sh}(x-y)=\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$;

$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$; $\mathrm{ch}(x-y)=\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y-\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$;

$\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$; $\mathrm{sh}\,2x=2\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$;

$\mathrm{ch}\,2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$.

习 题 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{x}{\tan x}$; (2) $y=\lg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$;

(3) $y=\arccos\sqrt{5x}$; (4) $y=\sqrt{\sin x}+\dfrac{1}{\ln(2+x)}$.

2. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=2x^2-5\cos x$; (2) $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$

(3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$; (4) $f(x)=\sin x-\cos x$.

3. 下列函数哪些是周期函数? 对于周期函数,指出其周期:

(1) $y=|\sin x|$; (2) $y=3\sin\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(3) $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$; (4) $y=x\sin x$.