应用高等数学

主　编　周承贵
副主编　龙伟忠　熊启才

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书是根据教育部最新制订的《高职高专高等数学课程教学的基本要求》编写的.

考虑到高职高专的特点,本书以“掌握概念、强化应用、培养能力”为重点,以“应用为目的,以必需、够用为度”的原则编写的. 全书包括向量代数、空间解析几何、微分学、积分学、微分方程和无穷级数等内容. 各节配备有较丰富的例题和习题,书末还附有习题答案和简易积分表,方便学生自学. 带* 号的内容供部分专业选学. 本教材的教学参考学时数为108学时,带* 号的内容需另加学时.

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学/周承贵主编. —重庆:重庆大学出版社,2004.4
(高职高专基础课系列教材)
ISBN 7-5624-3059-4

Ⅰ.应... Ⅱ.周... Ⅲ.高等数学—高等学校:技术学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第009284号

应用高等数学
主 编 周承贵
副主编 龙伟忠 熊启才
责任编辑:周 立 版式设计:周 立
责任校对:蓝安梅 责任印制:张立全
*
重庆大学出版社出版发行
出版人:张鸽盛
社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内
邮编:400030
电话:(023) 65102378 65105781
传真:(023) 65103686 65105565
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)
全国新华书店经销
重庆升光电力印务有限公司印刷
*
开本:787×1092 1/16 印张:17 字数:424千
2004年4月第1版 2004年4月第1次印刷
印数:1—8 000
ISBN 7-5624-3059-4/O·222 定价:23.50元

前言

本书是根据教育部最新制订的《高职高专高等数学课程教学的基本要求》编写的.

教材内容的选取充分体现了高职高专基础课教学以“掌握概念、强化应用、培养能力”为重点,以“应用为目的,以必需、够用为度”的原则为依据,既考虑到本学科的特点,同时又考虑到应尽可能体现基础课要为专业课服务的思想.因此本教材一是不过分追求理论体系的完整性,而是对传统内容体系进行组合,把方法相同或相似的内容放在一起讲授,避免相关内容的重复,学生也可以学以致用.二是在保证科学性的基础上,许多概念、定理尽可能采用学生容易理解的方式叙述,并减少理论推导,注重培养学生基本运算能力、分析问题的能力和解决问题的能力.叙述中力求通俗易懂,循序渐进.三是教材选配适量的例题和习题,使学生通过练习能掌握基本的理论和方法.四是为适应不同的学生和不同专业的需要,配置了一些用* 号表示的内容,以供选学.

参加本书编写工作的有陕西工业职业技术学院的段瑞(第1、2章)、桂林工学院南宁分院的周承贵(第3章)、广西机电职业技术学院的龙伟忠(第4章)、陕西理工学院的熊启才(第5、6章)、重庆交通学院职业技术学院的韩乐文(第7、8章).全书框架结构安排、统稿、定稿工作由周承贵承担.由于我们的水平有限,书中难免存在一些缺点和错误,敬请读者批评指正.

本书在编写过程中得到许多同志的关心和支持,在此我们表示衷心的感谢!

编 者

2004 年 1 月

目录

第1章　向量代数与空间解析几何 …… 1
1.1　空间直角坐标系 …… 1
1.1.1　空间点的直角坐标 …… 1
1.1.2　两个重要公式 …… 2
习题1.1 …… 3
1.2　向量及其坐标表示法 …… 3
1.2.1　向量的概念 …… 3
1.2.2　向量的坐标表示法 …… 5
习题1.2 …… 7
1.3　向量的数量积和向量积 …… 7
1.3.1　向量的数量积 …… 7
1.3.2　向量的向量积 …… 9
习题1.3 …… 11
1.4　平面与空间直线 …… 12
1.4.1　平面的方程 …… 12
1.4.2　空间直线方程 …… 15
习题1.4 …… 19
1.5　二次曲面与空间曲线 …… 19
1.5.1　曲面及其方程 …… 19
1.5.2　空间曲线 …… 24
习题1.5 …… 26
第2章　函数　极限　连续 …… 27
2.1　函数 …… 27
2.1.1　区间、邻域 …… 27
2.1.2　平面点集、区域 …… 28
2.1.3　映射 …… 29
2.1.4　函数的定义 …… 30
2.1.5　函数的表示法 …… 33
2.1.6　初等函数 …… 34
习题2.1 …… 37

2.2　数列的极限 …… 38
2.2.1　两个实例 …… 38
2.2.2　数列的极限概念 …… 39
2.2.3　数列极限的几何意义和性质 …… 40
习题 2.2 …… 41
2.3　函数的极限 …… 41
2.3.1　一元函数的极限 …… 41
2.3.2　极限的四则运算 …… 43
2.3.3　两个重要极限 …… 45
2.3.4　无穷小与无穷大 …… 48
2.3.5　二元函数的极限 …… 50
习题 2.3 …… 51
2.4　函数的连续性 …… 52
2.4.1　一元函数的连续性 …… 52
2.4.2　二元函数的连续性 …… 55
2.4.3　闭区间上连续函数的性质 …… 56
习题 2.4 …… 57
第 3 章　微分学 …… 58
3.1　导数的概念 …… 58
3.1.1　函数的变化率问题举例 …… 58
3.1.2　导数的定义 …… 60
3.1.3　几个基本初等函数的求导公式 …… 60
3.1.4　导数的几何意义 …… 62
3.1.5　函数的可导性和连续性的关系 …… 63
习题 3.1 …… 64
3.2　导数的运算法则 …… 65
3.2.1　函数的和、差、积、商的求导法则 …… 65
3.2.2　复合函数的求导法则 …… 67
3.2.3　反函数的求导法则 …… 68
3.2.4　初等函数的求导问题 …… 70
习题 3.2 …… 71
3.3　高阶导数、隐函数及参变量函数的求导 …… 72
3.3.1　高阶导数 …… 72
3.3.2　隐函数及其求导 …… 73
3.3.3　取对数求导法 …… 74
3.3.4　参数方程所确定的函数的导数 …… 75
习题 3.3 …… 75

3.4　偏导数 …… 77
3.4.1　偏导数的概念及偏导数的计算 …… 77
3.4.2　高阶偏导数 …… 78
*3.4.3　多元复合函数及隐函数的求导法则 …… 79
*3.4.4　偏导数在几何中的应用 …… 81
习题 3.4 …… 84
3.5　微分 …… 85
3.5.1　一元函数的微分 …… 85
3.5.2　二元函数的全微分 …… 88
3.5.3　微分在近似计算中的应用 …… 90
习题 3.5 …… 91
第 4 章　微分学的应用 …… 93
4.1　微分中值定理　罗比塔法则 …… 93
4.1.1　中值定理 …… 93
4.1.2　罗比塔法则 …… 94
习题 4.1 …… 96
4.2　一元函数的单调性与极值 …… 96
4.2.1　一元函数的单调性的判定法 …… 96
4.2.2　一元函数的极值 …… 98
习题 4.2 …… 100
4.3　一元函数的最大值和最小值 …… 101
习题 4.3 …… 103
4.4　一元函数图像的描绘 …… 104
4.4.1　曲线的凹向和拐点 …… 104
4.4.2　曲线的渐近线 …… 105
4.4.3　一元函数图形的描绘 …… 106
习题 4.4 …… 107
*4.5　曲率 …… 108
4.5.1　弧微分 …… 108
4.5.2　曲率及其计算公式 …… 108
4.5.3　曲率半径和曲率圆 …… 110
习题 4.5 …… 111
4.6　二元函数的极值 …… 111
4.6.1　二元函数的极值 …… 111
4.6.2　二元函数的最大值和最小值 …… 112
4.6.3　条件极值 …… 112
习题 4.6 …… 114

第 5 章　一元函数的积分学 …………………………… 115
5.1　不定积分的概念与基本积分公式 ………… 115
5.1.1　原函数的概念 ………………………… 115
5.1.2　不定积分的概念 ……………………… 116
5.1.3　不定积分的几何意义 ………………… 116
5.1.4　不定积分的基本积分公式 …………… 117
5.1.5　不定积分的性质 ……………………… 117
习题 5.1 ……………………………………………… 118
5.2　定积分 …………………………………………… 119
5.2.1　定积分的概念 ………………………… 119
5.2.2　定积分的几何意义 …………………… 121
5.2.3　定积分的性质 ………………………… 121
习题 5.2 ……………………………………………… 124
5.3　微积分基本定理 ……………………………… 125
5.3.1　变上限函数及其导数 ………………… 125
5.3.2　牛顿-莱布尼兹(Newton-Leibniz)公式 ……… 126
习题 5.3 ……………………………………………… 128
5.4　积分法 …………………………………………… 128
5.4.1　换元积分法 …………………………… 129
5.4.2　分部积分法 …………………………… 133
习题 5.4 ……………………………………………… 135
5.5　积分表的使用 ………………………………… 136
习题 5.5 ……………………………………………… 137
5.6　广义积分 ……………………………………… 138
5.6.1　无穷限的广义积分 …………………… 138
*5.6.2　无界函数的广义积分 ………………… 139
习题 5.6 ……………………………………………… 141
5.7　定积分的应用 ………………………………… 142
5.7.1　定积分的微元法 ……………………… 142
5.7.2　定积分在几何中的应用 ……………… 142
5.7.3　定积分在物理中的应用 ……………… 150
习题 5.7 ……………………………………………… 152
第 6 章　二元函数的积分学 …………………………… 153
6.1　二重积分的概念与性质 ……………………… 153
6.1.1　二重积分的概念 ……………………… 153
6.1.2　二重积分的性质 ……………………… 154
6.1.3　二重积分的计算法 …………………… 155
习题 6.1 ……………………………………………… 160

*6.2　二重积分的应用 …… 160
6.2.1　曲面的面积 …… 160
6.2.2　平面薄片的重心 …… 162
6.2.3　转动惯量 …… 163
习题 6.2 …… 163
*6.3　对坐标曲线的积分 …… 164
6.3.1　对坐标曲线积分的概念与性质 …… 164
6.3.2　对坐标的曲线积分的计算法 …… 165
6.3.3　格林公式 …… 166
6.3.4　平面曲线积分与路径无关的条件 …… 167
习题 6.3 …… 168
第 7 章　微分方程 …… 169
7.1　微分方程的概念 …… 169
习题 7.1 …… 170
7.2　一阶微分方程 …… 171
7.2.1　可分离变量的微分方程 …… 171
7.2.2　一阶线性微分方程 …… 176
习题 7.2 …… 182
7.3　二阶常系数线性微分方程 …… 183
7.3.1　二阶常系数齐次线性微分方程 …… 183
7.3.2　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 186
习题 7.3 …… 192
第 8 章　无穷级数 …… 194
8.1　数项级数 …… 194
8.1.1　数项级数的基本概念 …… 194
8.1.2　数项级数的基本性质 …… 196
习题 8.1 …… 197
8.2　数项级数收敛的判别法 …… 198
8.2.1　正项级数及其审敛法 …… 198
8.2.2　交错级数的审敛法 …… 201
8.2.3　任意项级数 …… 201
习题 8.2 …… 202
8.3　幂级数及其性质 …… 203
8.3.1　幂级数及其收敛性 …… 203
8.3.2　幂级数的运算性质 …… 206
习题 8.3 …… 209
8.4　函数展开成幂级数 …… 209
8.4.1　泰勒级数 …… 209

8.4.2　函数展开成幂级数 …………………………… 213
*8.4.3　幂级数在近似计算中的应用 ………………… 216
习题 8.4 ………………………………………………… 218
*8.5　傅立叶级数 ………………………………………… 219
8.5.1　周期为 2π 的周期函数展开成傅立叶级数 ……………………………………… 219
8.5.2　周期为 $2l$ 的周期函数展开成傅立叶级数 ……………………………………… 224
8.5.3　定义在有限区间上的函数展开成傅立叶级数 ……………………………………… 227
习题 8.5 ………………………………………………… 229
习题答案 ………………………………………………… 231
附录　积分表 …………………………………………… 251
参考文献 ………………………………………………… 260

第 1 章
向量代数与空间解析几何

向量代数和空间解析几何在工程技术中有着广泛的应用. 在这一章里, 首先建立空间直角坐标系, 并引进向量概念, 再介绍向量的一些运算, 然后以向量为工具讨论空间的平面和直线, 最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容.

1.1 空间直角坐标系

1.1.1 空间点的直角坐标

过空间一个定点 O, 作三条互相垂直的数轴 Ox、Oy、Oz, 一般它们具有相同的长度单位. 这三条轴分别叫做 x 轴(横轴) 、y 轴(纵轴) 、z 轴(竖轴) , 统称为坐标轴. 它们的指向符合右手螺旋法则, 即伸出右手, 让四指与大拇指垂直, 并使四指先指向 x 轴, 然后让四指沿握拳方向旋转 $90°$ 指向 y 轴, 此时大拇指的方向即为 z 轴方向. 这样三条互相垂直的坐标轴就组成了一个空间直角坐标系, 点 O 叫做坐标原点(或原点) . 通常将 x 轴和 y 轴取水平位置, 而 z 轴则是铅直向上的(图 1. 1) .

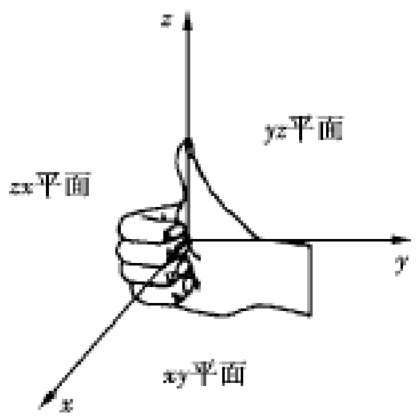

图 1. 1

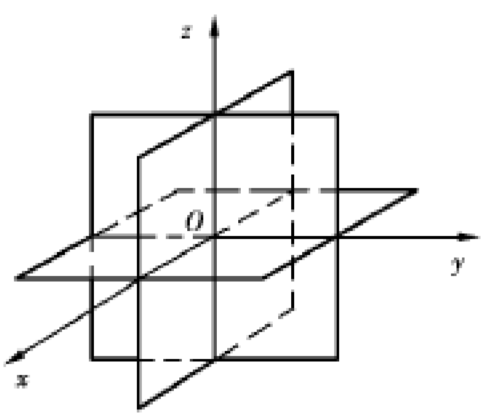

图 1. 2

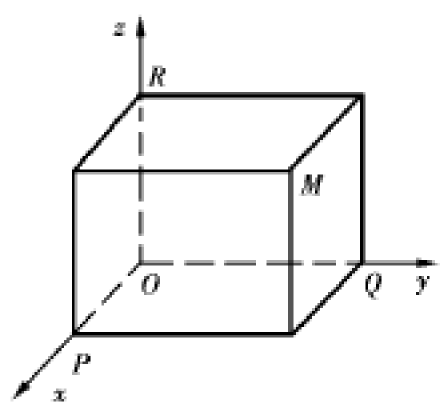

图 1. 3

三个坐标轴两两确定互相垂直的三个平面 xOy、yOz、zOx 称为坐标平面, 这三个平面把空间分为 8 个部分, 称为卦限. 以 x 轴正半轴、y 轴正半轴、z 轴正半轴为棱的那个卦限称为第 Ⅰ

卦限，在 xOy 平面上方的其他三个卦限按逆时针方向依次为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，在 xOy 平面下方与第Ⅰ卦限相对的为Ⅴ卦限，然后按逆时针方向依次为第Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限(图 1.2)．

设 M 为空间一点，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴，它们与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次为 P、Q、R(图 1.3)，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z. 于是空间点就惟一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反过来，已知一个有序数组 x, y, z，则可以分别在三个坐标轴上找到坐标为 x、y、z 的相应的点 P、Q、R，然后通过点 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴和 z 轴的垂直平面，由这三个垂直平面得到了惟一的交点 M(图 1.3)．这样，空间的点 M 和有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系，这组数 x, y, z 就叫做点 M 的坐标，并依次称 x, y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记作 (x, y, z)．坐标为 x, y, z 的点 M 通常记作 $M(x, y, z)$．

1.1.2　两个重要公式

(1) 空间两点的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，过点 M_1、M_2 各作三个分别垂直于坐标轴的平面，这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 1.4)．因此

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \\ &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 \end{aligned}$$

即
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

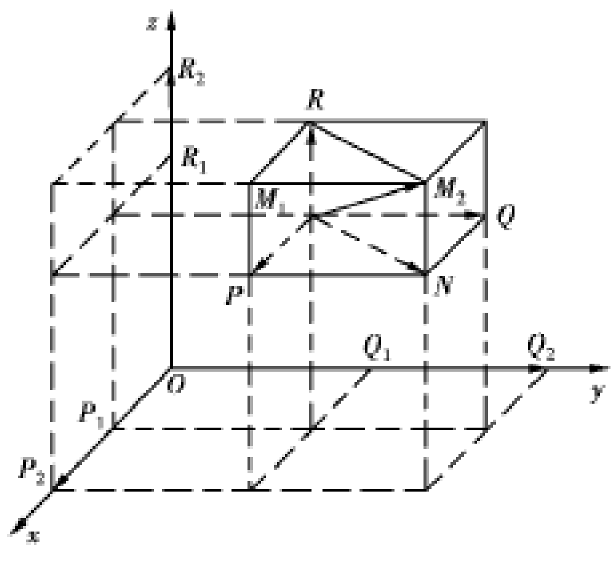

图 1.4

这就是空间两点间距离公式.

(2) 中点坐标公式

设 $M(x, y, z)$ 为线段 M_1M_2 的中点，过 M 作垂直于 x 轴的平面交 x 轴于 P 点.

因为 $|M_1M| = |MM_2|$，所以 $|P_1P| = |PP_2|$

即
$$|x - x_1| = |x_2 - x|$$

于是
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

同理可得
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

因此，线段 M_1M_2 的中点坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

例 1　在 z 轴上求与点 $A(-2, 1, 3)$ 和点 $B(4, 5, -1)$ 等距离的点 M，并求 AB 的中点坐标.

解　因为点 M 在 z 轴上，则设其坐标为 $(0, 0, z)$．
依题意得 $|MA| = |MB|$，即

$$\sqrt{(0+2)^2 + (0-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + (5-0)^2 + (-1-z)^2}$$

得 $z = -\dfrac{7}{2}$，故所求点的坐标为 $M\left(0, 0, -\dfrac{7}{2}\right)$.

设 AB 的中点坐标为$(x_中, y_中, z_中)$，则 $x_中 = \frac{-2+4}{2} = 1$, $y_中 = \frac{1+5}{2} = 3$, $z_中 = \frac{3+(-1)}{2} = 1$.

习题 1.1

1　在空间直角坐标系中，给出下列各点的位置：

　A(1, 2, 3)；　B(-1, 3, 2)；　C(0, -1, 1)；　D(2, 0, 0).

2　坐标面和坐标轴上的点各有什么特征？指出下列各点位置的特殊性：

　A(1, 0, 3)；　B(0, 0, 0)；　C(0, -3, 4)；　D(0, 0, 2).

3　求点 M(a, b, c) 关于各坐标平面、坐标轴、坐标原点的坐标.

4　求点 M(3, -4, 5) 与原点及各坐标轴之间的距离.

5　证明 A(1, 2, 3)，B(2, 3, 1)，C(3, 2, 1) 为直角三角形的三个顶点；并求三边中点坐标.

1.2　向量及其坐标表示法

1.2.1　向量的概念

(1) 向量的基本概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时所遇到的量，可以分为两大类. 一类是只有大小没有方向的量，如质量、体积、温度、时间等，这一类量称为数量(或标量). 另一类是不仅有大小而且还有方向的量，如速度、力、位移等，这一类量称为向量(或矢量). 往往用一条从始点到终点带有箭头的线段或黑体字母表示向量，如 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 或 **a**, **b**(图 1.5).

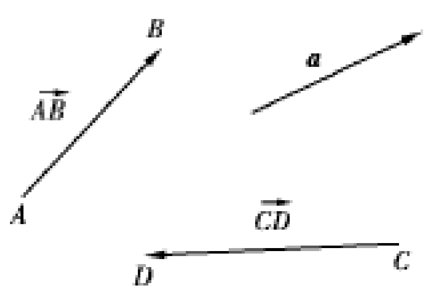

图 1.5

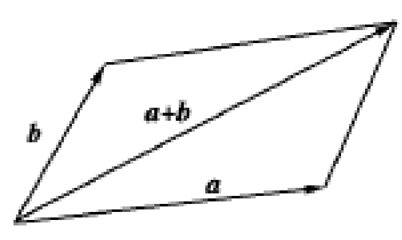

图 1.6

向量的大小叫做向量的模，向量 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 及 **a**, **b** 的模依次记作 $|\overline{AB}|$, $|\overline{CD}|$, $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$. 模为 1 的向量叫做单位向量. 模等于 0 的向量叫做零向量，记作 **0**，零向量的方向可以看做任意的.

如以直角坐标系的原点 O 为始点，向一个点 M 引向量 $\overline{OM}$，这个向量叫做点 M 对于点 O 的向径，常用 **r** 表示. 若只研究向量的大小和方向，而不考虑它的始点位置，这种向量称做自由向量. 在自由向量中，大小相等并且方向相同的两个向量 **a**, **b** 相等，记作 **a** = **b**. 与向量 **a** 大小相等方向相反的向量称为向量 **a** 的负向量，记作 -**a**.

(2) 向量的线性运算

1) 加法

使两向量 a, b 始于同一个点, 作以 a, b 为邻边的平行四边形, 则由始点到对顶点的向量称为 a, b 的和, 记作 $a+b$, 用这种方法定义的加法称为平行四边形法则(图 1.6). 由于平行四边形的对边平行且相等, 所以从图可以看出, 还可以将 b 平行移动使其始点与 a 的终点重合, 则由 a 的始点到 b 的终点的向量叫做 a, b 之和, 这种方法称为三角形法则.

三角形法则还可以推广到求任意有限个向量的和, 只需将前一个向量的终点作为后一个向量的始点, 相继做出向量 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$, 然后从第一个向量的始点向最后一个向量的终点引一向量, 此向量即为这 n 个向量的和, 如图 1.7, $\overrightarrow{OD}$就是四个向量 a、b、c、d 的和.

向量的加法满足下列运算律:

①交换律　　$a+b=b+a$

②结合律　　$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c$

这两个规律从图中很容易得知.

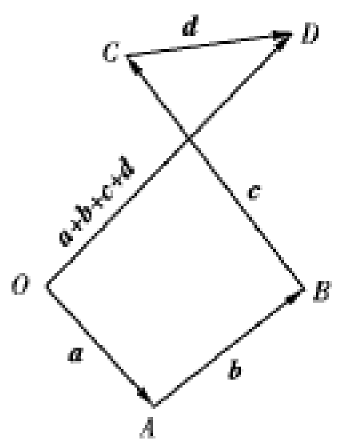

图 1.7

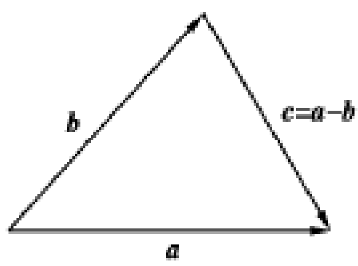

图 1.8

由负向量的概念可以规定两个向量的差:

$$a-b=a+(-b)$$

显然

$$a-a=a+(-a)=0$$

由三角形法则可以看出: 要从 a 减去 b, 只要把 $-b$ 加到向量 a 上去即可(图 1.8).

2) 数量与向量的乘法

数量 λ与向量 a 的乘积 λa 是一个向量, 它的模$|\lambda a|=|\lambda||a|$; 当 $\lambda>0$ 时, λa 的方向与 a 一致, $\lambda<0$ 时, λa 的方向与 a 相反, $\lambda=0$ 时, λa 是零向量, 即 $\lambda a=0$. 特别地当 $\lambda=-1$ 时, 可得 a 的负向量 $-a$.

数与向量的乘积符合下列运算律

①结合律　　$\lambda(\mu a)=\mu(\lambda a)=(\lambda\mu)a$

②分配律　　$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$

　　　　　　$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$

③交换律　　$\lambda a=a\lambda$

设 a 为一个非零向量, 常把与 a 同向的单位向量记为 a^0, 那么

$$a^0=\frac{a}{|a|}$$

向量的加法运算及数量与向量的乘法统称为向量的线性运算.

例 1　在平行四边形 ABCD 中, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, M 是平行四边形对角线的交点, 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$ (图 1.9).

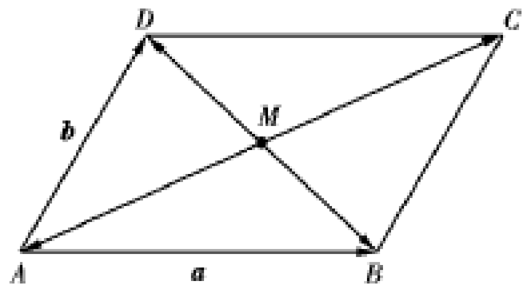

图 1.9

解　由于平行四边形的对角线互相平分, 因此

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{AM}$$

即
$$2\overrightarrow{MA}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

于是
$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

又因
$$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{MD}$$

于是
$$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),\quad \overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$$

1.2.2　向量的坐标表示法

(1) 向量的坐标表示

用 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴、z 轴正方向的单位向量, 并称它们为基本单位向量. $\overrightarrow{OM}$ 为向径, 点 M 的坐标为 (x, y, z), 过 M 点分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的平面且与坐标轴交于 P, Q, R 三点, 则向量 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$, 由向量的加法 (如图 1.10) 得

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}+\overrightarrow{M'M}=(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

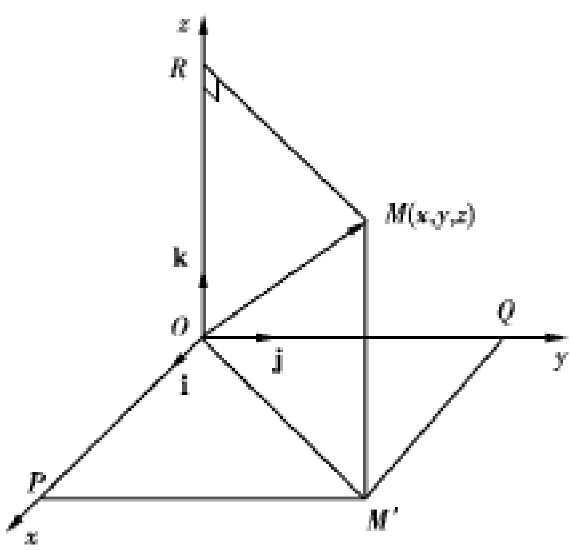

图 1.10

即点 $M(x, y, z)$ 的向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表达式为 $\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, 还可简记为 $\{x, y, z\}$, 即 $\overrightarrow{OM}=\{x, y, z\}$.

知道向量 $\overrightarrow{OM}$ 坐标表达式, 由两点间距离公式可得向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

把向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 x 轴, y 轴, z 轴正方向的夹角分别记为 α, β, γ $(0\le\alpha, \beta, \gamma\le\pi)$ 称为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向角, 方向角确定了向量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向, 则 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量的方向余弦. 由图 1.11, 利用角的余弦定义可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

把以上三式两边分别平方后相加, 得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=1$$

这就是说,任一向量的方向余弦的平方和等于 1.

例 2 求向量 $a=i+j-k$ 的模及方向角.

解 $|a|=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$

因为 $$\cos\alpha=\frac{x}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{y}{|a|}=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{z}{|a|}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

所以 $\alpha=60°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$

(2) 向量的代数运算

设 $a=a_1i+a_2j+a_3k$, $b=b_1i+b_2j+b_3k$,利用向量的坐标,可得向量的加、减以及向量与数量的乘积如下:

$$a+b=(a_1+b_1)i+(a_2+b_2)j+(a_3+b_3)k=\{a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3\}$$

$$a-b=(a_1-b_1)i+(a_2-b_2)j+(a_3-b_3)k=\{a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3\}$$

$$\lambda a=\lambda a_1i+\lambda a_2j+\lambda a_3k=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}$$

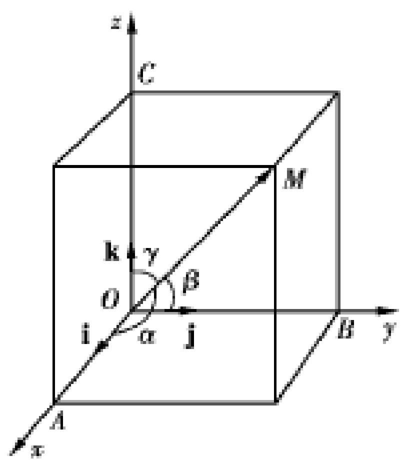

图 1.11

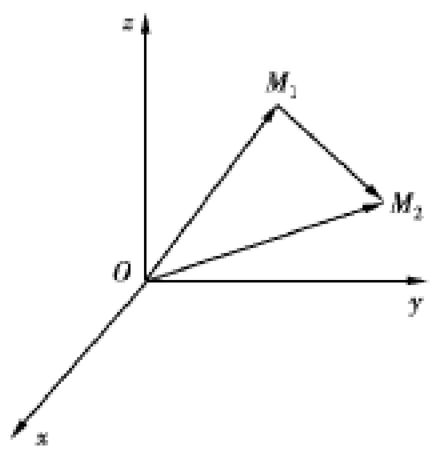

图 1.12

例 3 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 分别为自由向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的始点与终点(图 1.12),求向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标、模以及方向余弦.

解 由三角形法则得 $$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

又因为 $\overrightarrow{OM_1}$、$\overrightarrow{OM_2}$ 均为向径,所以

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1i+y_1j+z_1k$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2i+y_2j+z_2k$$

于是 $$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2i+y_2j+z_2k)-(x_1i+y_1j+z_1k)$$
$$=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$$

即 $$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$$

则 $$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y_2-y_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z_2-z_1}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

例 4　**求证向量** $a=\{a_1,a_2,a_3\}$ **与向量** $b=\{b_1,b_2,b_3\}$ **平行的充要条件是** $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$.

证　**设** $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda$

则　$a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2,\ a_3=\lambda b_3$

即　$\{a_1,a_2,a_3\}=\{\lambda b_1,\lambda b_2,\lambda b_3\}=\lambda\{b_1,b_2,b_3\}$

所以　$a=\lambda b$

由向量与数量的乘法定义可得　$a\parallel b$

反之,设 $a\parallel b$

1) **若** $b=0$, **即** $b_1=b_2=b_3=0$, **则有** $\frac{0}{a_1}=\frac{0}{a_2}=\frac{0}{a_3}$

2) **若** $b\neq 0$, **由** $a\parallel b$ **可得** $a=\lambda b$, **写成坐标形式, 即**

$$a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2,\ a_3=\lambda b_3$$

所以

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$$

习题 1.2

1　**用向量的方法证明梯形两腰中点的连线平行底边且等于两底边和的一半.**

2　**已知** $A(1,2,-2)$, $\overrightarrow{AB}=\{3,2,-1\}$, **求点** B **的坐标.**

3　**已知** $A(1,2,-4)$, $B(6,2,z)$, $|\overrightarrow{AB}|=11$, **求** z **的值.**

4　**设已知两点** $M_1(4,\sqrt{2},1)$, $M_2(3,0,2)$, **计算向量** $\overrightarrow{M_1M_2}$ **的模、方向余弦和方向角.**

5　**求平行于向量** $a=\{6,7,-6\}$ **的单位向量.**

6　**试确定** m **和** n **的值, 使向量** $a=-2i+3j+nk$ **和** $b=mi-6j+2k$ **平行.**

1.3　向量的数量积和向量积

1.3.1　向量的数量积

由物理学知道, 一物体在常力 F **作用下沿直线从点** A **移动到点** B, **若以** s **表示位移** $\overrightarrow{AB}$, **则力** F **所做的功为**

$$W=|F||s|\cos(\widehat{F,s})=|F||s|\cos\alpha$$

其中 α **为** F **与** s **的夹角(图 1.13).**

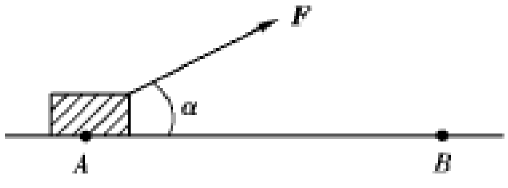

图 1.13

在其他一些问题中, 有时也会遇到这种运算, 一般地, 给出如下定义:

定义 两个向量 a 和 b 的模与它们之间夹角的余弦的乘积, 叫做向量 a 与 b 的数量积, 记作 $a \cdot b$, 即

$$a \cdot b = |a||b|\cos(\widehat{a, b})$$

由于此运算符号使用"·", 因此向量的数量积也称为向量的点积.

显然根据定义有, 功 $W = F \cdot S$.

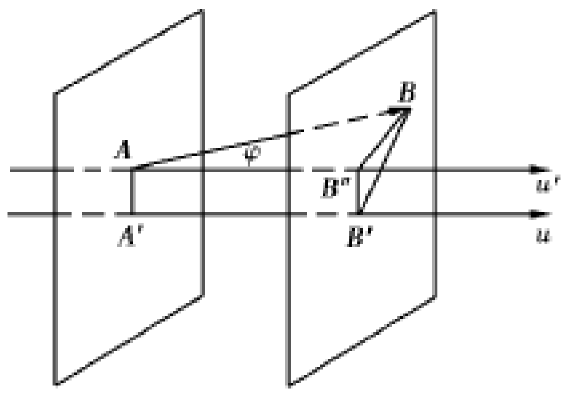

图 1.14

设已知空间一点 A 及一轴 u, 过点 A 作与轴 u 垂直的平面, 该平面与轴 u 的交点 A′叫做点 A 在轴 u 上的投影. 设已知向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为点 A′和 B′(图 1.14), 那么有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影, 它是一个数量, 记作 $Prj_u \overrightarrow{AB}$.

关于向量的投影有以下投影定理:

定理 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量夹角 φ 的余弦, 即

$$Prj_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$$

由投影定理, 根据数量积的定义可以推得

$$a \cdot b = |a| Prj_a b = |b| Prj_b a$$

即两向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在这向量上的投影的乘积.

由数量积的定义可以推得:

1) $a \cdot a = |a|^2$

2) 两个非零向量 a、b 互相垂直的充要条件是 $a \cdot b = 0$

证 1) $a \cdot a = |a||a|\cos 0 = |a|^2$

2) $a \perp b \quad a \cdot b = |a||b|\cos 90° \quad a \cdot b = 0$

特别地有 $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, i \cdot j = i \cdot k = j \cdot i = j \cdot k = k \cdot i = k \cdot j = 0$

两个向量的数量积具有下列运算规律:

①交换律 $a \cdot b = b \cdot a$

②分配律 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

③结合律 $(\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) = a \cdot (\lambda b)$ (λ 为数量)

证明略.

两个向量的数量积还可用坐标表示.

设 $a = x_1 i + y_1 j + z_1 k, b = x_2 i + y_2 j + z_2 k$

则有

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \cdot (x_2 i + y_2 j + z_2 k) \\ &= x_1 i \cdot (x_2 i + y_2 j + z_2 k) + y_1 j \cdot (x_2 i + y_2 j + z_2 k) + z_1 k \cdot (x_2 i + y_2 j + z_2 k) \\ &= x_1 x_2 i \cdot i + x_1 y_2 i \cdot j + x_1 z_2 i \cdot k + y_1 x_2 j \cdot i + y_1 y_2 j \cdot j + y_1 z_2 j \cdot k + z_1 x_2 k \cdot i \\ &\quad + z_1 y_2 k \cdot j + z_1 z_2 k \cdot k \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned}$$

即

$$a \cdot b = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

这就是两个向量数量积的坐标表示式.

由于

$$a \cdot b = |a||b|\cos(\widehat{a, b})$$