第 一 章　　绪 论

§1-1　课程简介

本课程是为光电信息工程学系的本科生开设的一门专业基础性课程，内容包括电磁场的基本理论、量子物理学基础以及固体物理学基础，大体上相当于大学理论物理和固体物理中与光学联系密切的内容。因此，本教材在取材上既适当照顾到其作为物理学分支的系统性，又突出了其中的光学重点，强化了为学习物理光学、光电子学等课程打基础的特色。我们希望本书能成为光电信息工程专业本科生合适的物理基础教材。

光从本质上讲是电磁波，因而电磁场基本理论是光电信息专业必不可少的物理基础。这里我们简单介绍了静电场和稳定电流的磁场及其实验定律，但更有意义的还是时变电磁场和麦克斯韦方程组。它使电磁现象和光现象有了统一的理论解释，为物理学及其光学分支带来了巨大飞跃。这是从实践上升到理论，理论又指导实践的一个范例。在学习普通物理的基础上学习电磁场理论，不仅要理解许多物理概念和原理，而且要掌握大量的物理规律及其联系和应用，学会利用它们来分析各种光学现象。

从晶体结构入手，本书还讨论了自由电子理论，布里渊区，固体、半导体的能带结构，p-n结等对半导体的光吸收、光电导、光磁电现象、光电效应、发光现象作了理论分析，以便使读者对学习激光、光电子学有较扎实的基础。

光的粒子性和光的波动性都只描述了光某一方面的特性，光的量子性才是对光的性质的全面描述。因此，量子力学的有关内容也成为本课程的必要组成部分。

§1-2　数学基础

矢量分析是学习本课程的重要数学工具，在此有必要先作一概括性的复习。

一、标量和矢量

三维空间中两点之间的距离或线段长度在坐标系转动变换下不变，凡属于这一类的量用一个数就可描述，称为标量。将这一结论推广，可定义标量如下：

如果一个物理量在坐标系转动变换下为不变量，则称此物理量是标量。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

例如，质量、电荷、电势都是标量。

三维空间点坐标矢量 r 在坐标系转动变换下，其分量将发生变化，由此可一般地定义矢量如下：

如果一个物理量有三个分量，其中每个分量在坐标系转动变换下，如同坐标分量一样变换，则称此物理量是矢量。

例如，速度是一个矢量，因为它的每个分量在坐标系转动变换下将发生变化。

二、场、梯度、散度、旋度

如果在一个空间区域中，某个物理量在其中每一点都取确定值，则称此空间区域中存在该物理量的场。如果该物理量是标量，就称这个场是标量场；如果该物理量为矢量，就称这个场为矢量场。例如，温度场、电势场是标量场，而电场、磁场是矢量场。

可见，在标量场中，分布于各点的物理量 ϕ 是其坐标的单值函数，即

$$\phi = \phi(x,y,z)$$

若在标量场中有一矢量 l，$l_0 = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$，在 l_0 方向上任取 $M(x,y,z)$ 和 $M'(x',y',z')$，则标量场中 ϕ 关于 l 的变化率

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \lim_{M\to M_0}\frac{\phi(M') - \phi(M)}{\Delta l}$$

为 ϕ 沿 l_0 方向的方向导数。据此可得

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma$$

一般来说，在场中的某一点 ϕ 沿不同方向有不同的方向导数。如果在标量场中定义一个矢量 G：

$$G = \mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k \tag{1.1}$$

则

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = G\cdot l_0 = |G|\cos(G,l_0) \tag{1.2}$$

这表明，矢量 G 的方向就是 ϕ 变化率最大的方向，其模就是这个最大的方向导数。我们把矢量 G 称为标量场 φ 的梯度。标量场在某点的梯度方向垂直于同一点处的等值面。

引进矢量微分算子（del operator）

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.3}$$

则可将梯度记为

$$\nabla\phi = i\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.4}$$

为讨论矢量场的散度和旋度，先引进面积矢量的概念。某个面元的面积矢量 $\mathrm{d}\sigma$ 的大小等于该面元的面积，其方向与该面元的外法线相一致，如图 1.1 所示。其各个分量为

$$\mathrm{d}\sigma_x = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}\sigma_y = \mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}\sigma_z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

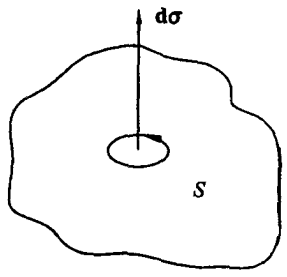

图 1.1

矢量 A 沿任一有向曲面 S 的面积分称为矢量场穿过曲面 S 的通量,即

$$\Psi = \int_S A \cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.5}$$

据此，矢量 A 在闭合曲面上的通量为

$$\Psi = \oint_S A \cdot \mathrm{d}\sigma \tag{1.6}$$

在研究矢量场时常引进矢量线，如电力线、磁力线等。有一类场，其矢量线从场中一些点发出，终止在另一些点或无穷远处，这类场叫纵场；另外一类矢量场，其矢量线是无头无尾的闭合曲线，这类场称横场。后者对任何闭曲面的通量为零，仅前者对式（1.6）的积分才可以是非零的。如果 $\Psi > 0$，表明有矢量线从中发出，该曲面内是有场源的；若 $\Psi < 0$，表明有矢量线终止在该闭合曲面内，即其中有吸收矢量线的汇；如果把汇看成负源，则 $\Psi \neq 0$ 的场为有源场，$\Psi = 0$ 的场为无源场。

对于无限小平行六面体的闭合表面，易于导出

$$\mathrm{d}\Psi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对于每一个平行六面体元都可使用以上公式，积分即得奥 - 高定理：

$$\oint_S A \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}\tau \tag{1.7}$$

该定理利用高斯积分公式，将对于封闭曲面的积分化成了体积分，式中 $\mathrm{d}\tau$ 为体积微分。当空间区域 Ω 以任意方式缩为一点 x_0 时，极限值

$$\lim_{\Omega \to x_0} \frac{\oint_\Omega A \cdot \mathrm{d}\sigma}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V}$$

称为矢量场 A 在 x_0 点的散度，记为 $\mathrm{div}A$。

由此可见，矢量场中任一点的散度，就表示该点作为场源的强度。有

$$\mathrm{div}A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.8}$$

上式即为散度在直角坐标系下的表达式。引用 del 算子，上式可简化为

$$\mathrm{div}A = \nabla \cdot A \tag{1.9}$$

下面我们讨论旋度。

设有矢量场 A，则称 A 沿场中任一有向闭合曲线 L 的积分为矢量 A 沿 L 的环量或环流，即

$$\Gamma = \oint_L A \cdot \mathrm{d}l \tag{1.10}$$

式中 $\mathrm{d}l$ 是长度微分。只有横场才有不为零的环量，纵场对任意闭合回路的环量恒为零。

若取 A 为磁场 H，根据安培环路定理，式(1.10) 的积分就表示沿与 L 成右手螺旋方向，通过 L 所围任一曲面的电流。电流是激发磁场的源，故若 Γ 不为零，表明 L 所围横场 A 的源不为零。环量面密度的概念就是为了描述场中一点作为横场源的强度而引进的。

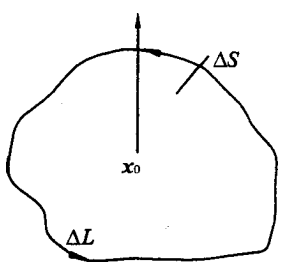

图 1.2

取矢量场中一点 x_0，在该点取定方向 n，并过该点作一微小曲面 ΔS 其方向恰为 n。取 ΔL 为 ΔS 按右手螺旋方向的周界，如图 1.2 所示。定义矢量场沿 ΔL 的环量与面积 ΔS 之比，在 ΔS 趋于零时的极限

$$\lim_{\Delta L\to 0}\frac{\oint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \Gamma}{\Delta S}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 在 x_0点沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度。可见，环量面密度描述了场中各点横场源强度沿指定方向的投影。

利用斯托克斯积分变换公式可得

$$\oint_{\Delta L}\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{\Delta S}\left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}\sigma \tag{1.11}$$

再利用积分中值定理，得

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta \Gamma}{\Delta S}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cos\gamma$$

我们定义矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}. \tag{1.12}$$

显然，$\boldsymbol{A}$ 的旋度对场中任一给定点是个矢量，由(1.11)式，场中任一点 $\boldsymbol{A}$ 沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度可通过 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 求出，为 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}$。这表明，某矢量的旋度在任意方向上的投影就给出沿该方向的环量面密度（或称环量强度），因此 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ 的方向就是环量面密度最大值的方向，其模就是环量面密度的最大值。引用 del 算符，可表示为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix} \tag{1.13}$$

可见，一般情况下，$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\leqslant|\mathrm{rot}\boldsymbol{A}|$

如果一个矢量场的旋度处处为零，则称为无旋场；如果一个矢量场的散度处处为零，则称为无散场。可以证明，无旋场即纵场，无散场即横场。

三、关于 ∇ 算符的一些计算公式

以上已引进 ∇ 算子表示标量场的梯度、矢量场的散度和旋度：

$$\nabla u=\boldsymbol{i}\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.14}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.15}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{1.16}$$

该算子还可以按下述方法构成一个纯标量算子：

$$\nabla\cdot\nabla=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.17}$$

称为拉普拉斯算子，可作用在标量或矢量函数上。

(1) 设 u 是标量场，则有

$$\nabla f(u)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u \tag{1.18}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.19}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A}(u) = \nabla u \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.20}$$

(2) 设 u 和 v 是标量场，$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是矢量场，则有

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \tag{1.21}$$

$$\nabla \cdot (u\boldsymbol{A}) = \nabla u \cdot \boldsymbol{A} + u\nabla \cdot \boldsymbol{A} \tag{1.22}$$

$$\nabla \times (u\boldsymbol{A}) = \nabla u \times \boldsymbol{A} + u\nabla \times \boldsymbol{A} \tag{1.23}$$

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot \nabla \times \boldsymbol{B} \tag{1.24}$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} - (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\boldsymbol{B} + (\nabla \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{1.25}$$

$$\nabla(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) + (\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} \tag{1.26}$$

关于 ∇ 的二级微分运算有下列公式：

$$\nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla)u = 0 \tag{1.27}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = (\nabla \times \nabla)\boldsymbol{A} = 0 \tag{1.28}$$

$$\nabla \cdot \nabla u = (\nabla \cdot \nabla)u = \nabla^2 u \tag{1.29}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A} \tag{1.30}$$

其中 (1.27) 式和 (1.28) 式是两个重要结论，即标量场的梯度是一个无旋场，矢量场的旋度是一个无散场。

(3) 设 $\boldsymbol{R} = (x - x')\boldsymbol{i} + (y - y')\boldsymbol{j} + (z - z')\boldsymbol{k} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，并且

$$R = |\boldsymbol{R}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

记

$$\nabla' = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'}$$

则

$$\begin{aligned}
&\nabla R = -\nabla' R = \frac{\boldsymbol{R}}{R}, && \nabla r = -\nabla' r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}\\
&\nabla \frac{1}{R} = -\nabla' \frac{1}{R} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}, && \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3},\\
&\nabla f(R) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}R}\frac{\boldsymbol{R}}{R}, && \nabla f(r) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\frac{\boldsymbol{r}}{r},\\
&\nabla \cdot \boldsymbol{R} = 3, && \nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3,\\
&\nabla \times \boldsymbol{R} = 0, && \nabla \times \boldsymbol{r} = 0,\\
&\nabla \times \frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0, && \nabla \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0,\\
&\boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{R} = \boldsymbol{A}, && \boldsymbol{A} \cdot \nabla \boldsymbol{r} = \boldsymbol{A},\\
&\nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{C}, && \nabla(\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{C},\\
&\nabla^2 \frac{1}{R} = -\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R} = -4\pi\delta(\boldsymbol{R}), && \nabla^2 \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{1.31}$$

(4) 利用 ∇ 算子，可将高斯公式、斯托克斯公式和格林公式写成

$$\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}\tau \tag{1.32}$$

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{1.33}$$

需要全本请访问 www.ertongbook.com

$$\oint_S u\nabla v \cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V [u\nabla^2 v + (\nabla u)\cdot(\nabla v)]\mathrm{d}\tau \tag{1.34}$$

$$\oint_S (u\nabla v - v\nabla u)\cdot \mathrm{d}\sigma = \int_V (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\mathrm{d}\tau \tag{1.35}$$

四、球坐标系和柱坐标系中的重要公式

空间点的球坐标(r,θ,φ)和直角坐标有下列关系：

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

可导出梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子在球坐标系中的表达式：

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi \tag{1.36}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{1.37}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A} = {} & \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right. \\ & \left. - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned} \tag{1.38}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \tag{1.39}$$

空间点的柱坐标(ρ,φ,z)与直角坐标有下列关系：

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

因此，梯度、散度、旋度和拉普拉斯算子在柱坐标中的表达式为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial\rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.40}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right] \tag{1.41}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z \tag{1.42}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \tag{1.43}$$

习　　题

1. 设 u 是空间坐标 x,y,z 函数，证明(1.18),(1.19) 和(1.20) 式。

2. 设 $\boldsymbol{R} = (x-x')\boldsymbol{i} + (y\quad y')\boldsymbol{j} + (z-z')\boldsymbol{k}$ 是由源点(x',y'',z') 指向场点(x,y,z) 的矢量：

(1) 证明下列结果，并体会对源变数求微商 $\left(\nabla' = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x'} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y'} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z'}\right)$ 与对场变数求微

商($\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$)的关系。

$$\nabla R = -\nabla' R = \frac{\boldsymbol{R}}{R}, \nabla\frac{1}{R} = -\nabla'\frac{1}{R} = -\frac{\boldsymbol{R}}{R^3}, \nabla\times\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0, \nabla\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = -\nabla'\cdot\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} = 0$$

(2) 求 $\nabla\cdot\boldsymbol{R}, \nabla\times\boldsymbol{R}, (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{R}, \nabla\cdot[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r})], \nabla\times[\boldsymbol{E}_0\sin(\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r})]$,其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{E}_0$ 均为常矢量。

3. 令 r 表示任意选取的原点到空间某点的距离，试证明标量 $\varphi = \frac{1}{r}$ 满足拉普拉斯方程。

第二章　电磁场的普遍规律及基本方程组

总的来说，电磁场理论的基础是电荷守恒定律、麦克斯韦方程组和洛仑兹力公式。它们是通过对不同条件下电磁现象实验规律的分析、概括，总结出来的基本定律。本章将重点讨论这些基本规律，并根据这些基本规律揭示电磁场的物质本质。

§2-1　电荷、电流与电荷守恒定律

一、电荷

自然界中只存在正、负两种电荷，物质微粒不管带正电荷或负电荷，其电量都是基本电荷单位 e 的整数倍。测量得出：

$$e = 1.602 \times 10^{-19}\mathrm{C}$$

任何宏观物体的电量必然也是基本电荷 e 的整数倍。因此，宏观物体电荷量严格说是量子化的。但是一个宏观物体包括数目极大的带电粒子，基本电荷单位与之相比真是小之又小，故可以认为对宏观物体电荷量连续取值，这样做对宏观物体而言是足够精确的。

为了描述电荷在带电体上的分布，引进电荷体密度 $\rho(\boldsymbol{r})$。空间 $\boldsymbol{r}$ 点的电荷体密度是包括该点在内的小区域 Ω 中的电荷总量 ΔQ 与该区域体积 ΔV 之比在 $\Delta V \to 0$ 时的极限值，即

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} \tag{2.1}$$

当带电体的大小和形状的影响可以忽略不计时，带电体上的电荷可被看成是集中在一个几何点上的电荷，称点电荷。在坐标 $\boldsymbol{r}'$ 上电量为 Q 的点电荷，其密度分布函数为

$$\rho(\boldsymbol{r}) = Q\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{2.2}$$

与此类似，当电荷分布在一个薄层中，若薄层厚度的影响可以忽略，则可用面电荷密度 $\sigma(\boldsymbol{r})$ 描写它的分布。面上 $\boldsymbol{r}$ 点的面电荷密度是包括该点的面元 ΔS 带的电荷总量 ΔQ 与面元面积 ΔS 之比，在 $\Delta S \to 0$ 时的极限值，即

$$\sigma(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} \tag{2.3}$$

同理，若电荷沿一条细线分布，可以引进线电荷密度 $\lambda(\boldsymbol{r})$ 描述电荷分布。线上 $\boldsymbol{r}$ 点的线电荷密度是在含有该点的线元 Δl 上的电荷总量 ΔQ 与线元 Δl 之比，当 $\Delta l \to 0$ 时的极限值，即

$$\lambda(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} \tag{2.4}$$

当然，任何实际的带电体，其电荷不可能分布在一个几何点、几何面或几何线上，点电荷、面电荷、线电荷只是一定条件下实际问题的抽象。

二、电流

电荷在空间的运动形成电流。这里我们引进电流密度矢量 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ 来描述电流的分布。电流场中 $\boldsymbol{r}$ 点的电流密度矢量，其方向就是该点电流流动的方向，大小等于过该点与电流垂直的面元 ΔS 上流过的电流强度 ΔI 与面元 ΔS 之比，当 $\Delta S \to 0$ 时的极限值，即

$$j(r) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} \tag{2.5}$$

如果电流是由一种带电粒子的运动形成的，设这种带电粒子的电荷密度为 $\rho(r)$，运动速度为 v，则电流密度为

$$j(r) = \rho(r)v \tag{2.6}$$

如果电流是由几种带电粒子运动形成的，则总电流密度矢量等于每一种带电粒子电流密度的矢量和。

如果电流存在的空间是一个厚度可以忽略的薄层，那么可以用面电流密度 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ 来描述电流分布。面上 $\boldsymbol{r}$ 点的面电流密度，其方向为沿该点的电流流动方向，大小定义为过该点与电流垂直的线元 Δl 上流过的电流 ΔI 与线元长度 Δl 之比，当 $\Delta l \to 0$ 时的极限值，即

$$a(r) = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta l} \tag{2.7}$$

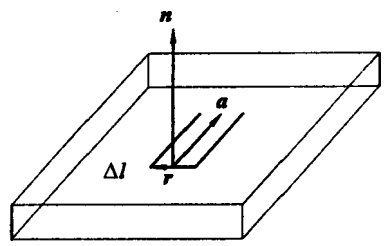

图 2.1

在电流场中，电流密度矢量 j 通过任一有向曲面的电流强度，就是电流密度矢量对 S 面的通量，也就是电流强度。

$$I = \int_S \boldsymbol{j} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \tag{2.8}$$

类似地，在面电流情况下，流过面上任一曲线 L 的电流强度可表示为

$$I = \int_L (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.9}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于电流所在平面的单位矢量。

三、电荷守恒定律

实验和事实都表明，在一个物理系统中不论发生任何变化过程，系统中的电荷总量不变。这个实验事实称为电荷守恒定律，它是迄今为止人们认识到的自然界中精确成立的少数几个基本定律之一。

考虑由闭合界面 S 包围的空间区域 V，由于电荷守恒，V 中发生的任何过程都不会引起电荷的产生和消灭，V 中的电荷增加率必等于单位时间内由界面 S 流入的电荷，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}\tau = -\oint_S \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j} \tag{2.10}$$

这就是电荷守恒定律的积分表示。当区域 V 取定时，V 中的电荷增加率等于其中各点电荷增加

率之和，对上式右边应用高斯公式得

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}\tau = -\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{j} \mathrm{d}\tau$$

考虑到上式对任意区域 V 成立，被积函数必处处相等。于是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{2.11}$$

这就是微分形式的电荷守恒定律，又称电流连续性方程。

在稳恒情况下，电荷密度与时间无关。因此，稳恒电流连续性方程为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{2.12}$$

其积分形式为

$$\oint \mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{2.13}$$

这表明稳恒电流线总是闭合的。

§2-2 真空中的静电场与稳恒电流的磁场

在本节中，我们将复习普通物理中学过的有关定律并加以深化，这是电磁场理论的基础。

一、真空中的静电场

1. 库仑定律，电场

库仑定律是静电情况下的一条基本实验规律，表述如下：真空中静止的点电荷 Q' 对另一静止点电荷 Q 的作用力为

$$\boldsymbol{F} = \frac{QQ'\boldsymbol{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{2.14}$$

其中 ε_0 是真空介电常数，$\boldsymbol{R}$ 是由电荷 Q' 所在点引向电荷 Q 所在点的矢量，$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$，$R = |\boldsymbol{R}|$，如图 2.2所示。库仑定律表明，真空中静止的两个点电荷之间的作用力大小与点电荷电量乘积成正比，与相互间距离的平方成反比；作用力沿点电荷连线；同号电荷相斥，异号电荷相吸。

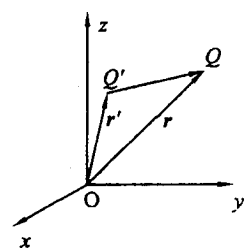

图 2.2

库仑定律正确描述了真空中两个静止点电荷作用力的大小和方向，但它并没有揭示这个作用力的物理本质。也就是说，这个作用力是哪里来的。法拉第以前的传统观念认为，电荷之间的作用是“超距作用”，即一个带电体不通过任何中间媒介，直接地、瞬时地把作用力施加到另一个带电体上。法拉第最早引入“场作用”的概念，认为电磁作用是通过“场”，以有限速度传播过去的。这两种观点都可以解释库仑定律。但在电荷运动变化的情况下，场可以离开电荷在空间单独存在，这两种观点显示出本质上的不同的物理内容。现代物理已抛弃了“超距”作用的观点，认为任何相互作用都是通过物理场进行的，场本身是物质存在和运动的一种方式。电磁场就是传播电磁

相互作用的一种特殊物质。

在电荷 Q' 周围的空间中,引入另一点电荷 q,q 就会受到力的作用，我们称电荷在其中会受到作用力的空间为电场。因此，q 受到的作用力是 Q' 激发的场对 q 的作用，这个作用力当然和该场的大小和方向有关。我们可以把 q 作为试探电荷,放入 Q' 场中的不同点，根据它受力情况研究 Q' 电场的分布。不过,q 应足够小，才不致于影响原来的场分布。

设试探电荷 q 在场中 r 点受到的作用力为 F,则该点的电场强度定义力 F 与 q 之比，记为 E。

$$E = \frac{F}{q} \tag{2.15}$$

可见，电场强度是个矢量，其方向与该点正电荷受电场力方向相同，大小等于单位点电荷在该点受到的电场作用力。

若电荷分布已知，可以利用库仑定律计算静电场的电场强度。单个电荷 Q' 激发的电场强度，由式(2.15) 和式(2.14)推出

$$E(r) = \frac{Q'R}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{2.16}$$

其中 $R = r - r'$ 是 Q' 点到场点的矢径。各点场强的大小和方向只与源电荷 Q' 及其位置有关，而与试探电荷 q无关。对于空间每一点，按(2.16) 式都能定出该点的场强。实验证明，多个点电荷激发的电场等于每个点电荷单独激发的电场矢量和，这个性质称为电场的叠加性。必须指出，电场叠加性应当看作是一条新的实验定律，它不是库仑定律的逻辑推论。

设空间有 N个点电荷，其中第 i个点电荷的坐标为 r_i',它到观察点 r 的矢径为 $R_i = r - r_i'$. 由电场叠加性,r 点的总电场强度

$$E(r) = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i' R_i}{4\pi\varepsilon_0 R_i^3} \tag{2.17}$$

若电荷连续分布，分布区域为 V,取体积元 $\mathrm{d}\tau'$,其中的电荷 $\mathrm{d}Q' = \rho(r')\mathrm{d}\tau'$,当 $\mathrm{d}\tau'$ 足够小时就可把 $\mathrm{d}Q'$ 看成是点电荷,于是有

$$E(r) = \int_V \frac{\rho(r')R}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathrm{d}\tau' \tag{2.18}$$

显然,(2.17) 式是(2.18) 式的特殊情况。

2. 高斯定理，静电场的散度

高斯定理认为：在静电场中，通过任何闭合曲面的电通量与该曲面内电荷的代数和成正比，与这些电荷的分布无关，也与曲面外的电荷无关。用公式表示就是

$$\oint_S \mathrm{d}\sigma \cdot E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V \tag{2.19}$$

其中左边是通过闭合曲面 S 的电通量，右边的积分部分 $\int_V \rho \mathrm{d}V$

当 S面内的电荷是一些离散点电荷时，应将其换为 $\sum_i q_i$。高斯定理中的闭合曲面 S通常称为高斯面。

(2.19) 表示的高斯定理以积分形式反映了电场和场源的关系。应当注意，高斯定理说的是通过闭合曲面的电通量与曲面外的电荷无关，但曲面上各点的场强 E 仍然是由所有电荷产生的，包括曲面外的电荷。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

在电荷呈球对称分布或一定类型的轴对称或面对称分布的情况下，利用高斯定理的积分形式可以很方便地求出它们的电场。对于一般情况，不能直接用上述积分形式的高斯定理来计算场强，因为它只给了 E 对一个闭合面的通量，还不足以完全确定各点的 E。

高斯定理告诉我们，静电场是一种有源场，电荷是静电场的源。

为了能细微地反映出场和场源的关系，需要导出高斯定理的微分形式。

将(2.19) 式两边除以曲面 S 所限定的体积 V,得

$$\frac{\oint_S \mathrm{d}\sigma \cdot \boldsymbol{E}}{V} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{V} = \frac{\bar{\rho}}{\varepsilon_0}$$

式中 $\bar{\rho}$ 为体积 V 内的平均电荷密度。现将曲面 S 缩小至矢径为 r 的某一点，这时上式左边的极限给出场强 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点的散度：

$$\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint_S \mathrm{d}\sigma \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

而右边的极限正好是 $\boldsymbol{r}$ 处电荷密度的 $1/\varepsilon_0$ 倍。于是得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{2.20}$$

这就是高斯定理的微分形式，或称为静电场的散度定理，它反映了电荷和电场的微分关系，即在空间某点处，电场强度的散度只和该点处的电荷密度有关，而与其他点的电荷分布无直接联系。

显然，$\nabla \cdot \boldsymbol{E} \neq 0$ 的那些点就是体电荷所在处（电力线的起点或终点），通常称为电场的源。源可正可负。在 $\rho = 0$ 处，$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$，表示既无电力线自该点发出，也无电力线终止于此，但可以有电力线连续地通过该处。

3. 环路定理，静电场的旋度

在普通物理课程中，我们曾得出结论：在静电场中移动电荷时，电场力所作的功只与初末位置有关，而与路径无关。这个结果可以表示成

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0 \tag{2.21}$$

其中 L 是任意闭合路径。这就是静电场的环路定理。这个结果表明，静电场的电力线不能是闭合曲线。

环路定理和高斯定理是彼此独立的，因为如果在高斯定理的场强 $\boldsymbol{E}$ 上再加上一个电场 $\boldsymbol{E}'$，这个附加电场的电力线若是闭合的，那么对于任意一个闭合曲面，穿进去的 $\boldsymbol{E}'$ 线一定要穿出，因此 $\boldsymbol{E}'$ 对总通量的贡献为零，即总场强 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}'$ 仍满足高斯定理。这也表明单有高斯定理还不能惟一地确定电场。可以证明，高斯定理和环路定理合在一起，就可以完全确定场强。

与高斯定理类似，式(2.21)只能说明整个闭合回路上电场的总情况。为了研究电场中每一点的情况，需要将该式改写成微分形式。

利用斯托克斯公式，得

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\sigma = 0$$

由 L 的任意性，可得

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \tag{2.22}$$

这就是环路定理的微分形式，也称静电场的旋度定理。它表明，静电场是无旋场的。

在场强连续可微的条件下,环路定理的微分形式和积分形式完全等价。但在上述条件不满足时,例如在介质的分界面上,微分形式没有意义,积分形式仍然成立。

二、稳恒电流的磁场

1. 安培定律

实验证明两个电流之间存在着作用力。安培分析了大量的实验资料以后，总结出了真空中两个稳恒电流元之间作用力的公式。电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$ 受到电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$ 的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}$ 可以表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\frac{\mu}{4\pi}\cdot\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\times[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\times\boldsymbol{R}]}{R^3} \tag{2.23}$$

这里 $\boldsymbol{R}$ 是由 $\boldsymbol{r}'$ 点引向 $\boldsymbol{r}$ 点的矢量，μ_0 是真空磁导率。电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$ 受到电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$ 的作用力 $\mathrm{d}\boldsymbol{F}'$ 则需要用另一个公式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}'=\frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\times[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\times\boldsymbol{R}']}{R'^3} \tag{2.24}$$

表示,式中 $\boldsymbol{R}'=-\boldsymbol{R}$。

上式描述了真空中两个稳恒电流元之间的作用。读者也许会提出，这种关系不满足作用力与反作用力定律。这是因为“电流元”只是我们为了叙述分析的方便引进的抽象概念，客观世界中并不存在孤立的稳恒电流元。可以证明，两个稳恒电流元之间的作用力是满足作用力与反作用力定律的。安培定律在稳恒磁场中的地位和库仑定律在静电场中的地位是相当的。

2. 磁场，毕奥 - 萨伐尔定律

两个电流之间的作用是怎么传递的呢？也是通过场传递的，传递电流之间相互作用的场被称为磁场。磁场对放入其中的电流有作用力。于是，也可以引入一个小电流，根据它在磁场中的受力情况来研究磁场的性质和分布。

实验分析表明，电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$ 受到另一电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$ 的作用力可以写作

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau\times\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{2.25}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 与电流元 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau$ 无关,它描述了 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'$ 的磁场性质，称为磁感应强度。将式(2.25)与式(2.23)比较,$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 可以写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\times\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{2.26}$$

实验表明，磁场也满足叠加性，一个稳恒电流激发的磁场可以表示为各个电流元磁场的叠加，即

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'\times\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{2.27}$$

上式称为毕奥 - 萨伐尔定律。

在很多情况下只考虑线电流，此时导线外各点电流密度都是零，积分区域可以只取导线回路。以 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表示导线上的线元，取 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 方向沿电流方向,则

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{2.28}$$

I 是 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ 对导线横截面的积分，为导线上的电流强度。在线电流情况下(2.27)式可写为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{2.29}$$

3. 稳恒磁场的散度

毕奥 - 萨伐尔定律反映了稳恒电流激发磁场的规律，可以由这条定律出发，求出稳恒电流磁场的方程。

首先改写毕奥 - 萨伐尔定律为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{R}}{R^3}\mathrm{d}\tau' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int(\nabla\frac{1}{R})\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \end{aligned} \tag{2.30}$$

这里，∇ 算子是对场点坐标微分的算子，与源点坐标 $\boldsymbol{r}'$ 无关，所以

$$\nabla\times[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{R}] = (\nabla\frac{1}{R})\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$$

因此，(2.30) 式可化为

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\times\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau' = \nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{2.31}$$

其中

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}\mathrm{d}\tau' \tag{2.32}$$

是磁场的矢势，它也是描述磁场的一个重要物理量，后面还要仔细讨论。这里只是考虑到 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 可以表示为一个矢量场的旋度，根据第一章的结论“任意矢量场的旋度必为无散场”，有

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.33}$$

上式表明，磁场是无散场，磁力线总是构成闭合回路。自然界是否存在有散的磁场，即是否存在单独的磁荷激发或吸收磁力线，近年来有不少讨论，但到目前为止，还没有发现自然界有磁荷存在。在这个前提下，(2.33) 式是磁场的一个基本方程式。

4. 稳恒磁场的旋度，安培环路定理

下面由毕奥 - 萨伐尔定律求稳恒磁场的旋度。由 (2.31) 式

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{2.34}$$

先考虑上式右边第一项。由 (2.32) 式

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\cdot\int_V\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau'}{R} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V(\nabla\frac{1}{R})\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V(\nabla'\frac{1}{R})\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{2.35}$$

这里应用了 $\nabla\frac{1}{R} = -\nabla'\frac{1}{R}$。再应用公式

$$\nabla'\cdot[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{R}] = (\nabla'\frac{1}{R})\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') + \frac{1}{R}\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \tag{2.36}$$

由稳恒电流条件 (2.12) 式，上式右边第二项应等于零。把式(2.36) 代入(2.35) 式中，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V(\nabla'\cdot[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\frac{1}{R}]\mathrm{d}\tau = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\mathrm{d}\sigma\cdot\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R}$$

由于积分区域 V 含有 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\neq 0$ 的全部区域，在 V 的边界面 S 上 $j_n = 0$，因此

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.37}$$

式(2.34)式中的第二项为

$$\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')\nabla^2\frac{1}{R}\mathrm{d}\tau' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\tau' \\ &= -\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{2.38}$$

将式(2.37),(2.38)代入(2.34)中,得稳恒磁场的旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{2.39}$$

上式表明，稳恒电流磁场的源强度是电流密度矢量。

在磁场中任一有向曲面上对式(2.39)两边积分得

$$\int_S \mathrm{d}\sigma\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\int_S \mathrm{d}\sigma\cdot\boldsymbol{j}=\mu_0 I$$

I 为通过有向曲面 S 的电流强度。设 L 是曲面 S 的边界线,其绕行方向与 S 的法向成右手螺旋关系，应用斯托克斯积分变换公式得

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I \tag{2.40}$$

(2.40)式即为安培环路定理:磁感应强度沿任一闭合回路 L 的环量等于穿过以 L 为边界的任意曲面的电流强度的 μ_0 倍。

安培环路定理和静电场中的高斯定理可以对应起来。在某些情况下电流分布具有一定的对称性，此时应用安培环路定理求空间的磁场分布是相当方便的。

§2-3 时变电磁场与麦克斯韦方程组

一、法拉第电磁感应定律

电流可以激发磁场,反过来,磁场能否产生电流呢 法拉第经 10 年之久的实验，于 1831 年发现，当通过闭合导体回路的磁通量 B 发生变化时，回路中就有电流通过。这样产生的电流称为感生电流。这一现象被称为电磁感应现象。

通过进一步实验研究，法拉第总结出了著名的电磁感应定律，即：闭合导体回路中的感生电动势的大小，与通过此回路所围的任一曲面的磁通量的变化率成正比，即

$$\varepsilon=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\sigma \tag{2.41}$$

式中 ε 是感生电动势，负号表示感生电流的磁场总是削弱原磁场的变化，可以据此判断感生电动势的方向。事实上，这个方向与直接用楞次定律得到的结果相同。

由(2.41)式可见，感生电动势与磁场变化的原因无关，而只与其变化率有关。

麦克斯韦对法拉第电磁感应定律进行了仔细分析，于 1861 年提出了涡旋电场的假设，认为感生电动势的出现是由于回路中存在感生电场，这里导体的作用仅在于显示感生电场的存在，没有它，空间也应当存在感生电场，它和回路中电动势的关系是

$$\varepsilon = \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.42}$$

结合(2.41)和(2.42)式并设回路 L 固定,则曲面 S 不随时间改变,得

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\sigma \tag{2.43}$$

式(2.43)就是静止回路中电磁感应定律的普遍形式。对上式的左边利用斯托克斯公式，可得

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\sigma = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\sigma$$

由于曲面 S 是任意的，所以每一点上都应当有

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.44}$$

这就是电磁感应定律的微分形式，式中 $\boldsymbol{E}$ 是感生电场。它表明，在空间任一点，磁场随时间的变化都要激发电场，这种电场不同于静电场，其旋度不为零，称为涡旋电场。它的源就是磁感应强度的变化率。

可见，电荷产生的电场是无旋场，而感生电场是有旋场。因此，变化的磁场可以激发有旋的电场，同样，电场也可以激发有旋的磁场。

当空间同时存在由电荷产生的电场以及由变化的磁场产生的电场时，合场强应当是两者之和。由于前者是无旋场，合场强应当也满足(2.44)式。所以,公式(2.44)是普遍情况下电磁场的一个基本方程。

对公式(2.44)两边取散度，并注意到对时间的微商和对空间坐标的微商次序可交换，可导出

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \boldsymbol{B}) = \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{E}) = 0$$

这表明 $\boldsymbol{B}$ 的散度与时间无关，即

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = C(x,y,z)$$

对于稳定磁场,$C(x,y,z) = 0$ 恒成立。假设在某一时间间隔内，所研究的磁场是稳定的，即 $C = 0$,考虑到 C 与时间无关，当磁场变化时,C 仍应为零。于是有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.45}$$

式(2.45)也是时变电磁场的一个基本方程。该式之所以成立，原因在于自然界中不存在单独的磁极,或者说不存在自由磁荷。

二、电场散度公式的推广

我们已知静电场的散度公式是

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

即电荷是无旋电场的源，而在变化的电磁场情况下，无旋电场也并不会再有其他的源，因此上式可以推广到变化的电磁场的一般情况。

三、位移电流假设

由 §2-2 知，按安培环路定理的微分形式，稳恒电流的磁场的旋度为

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$$

现在我们考虑该式能否推广到时变电磁场的情况。假如可以，必有

$$\mu_0 \nabla \cdot \boldsymbol{j} = \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0$$

即仍有 $\nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$，电流仍是稳恒的，但在普遍情况下，电荷守恒定律要求

$$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

这样，就和电荷守恒定律相矛盾。麦克斯韦对此提出了修正方案，他认为存在一个称为位移电流的物理量 j_d，只要在安培环路定理的右边加上该电流项，使总电流的散度为 $\nabla \cdot \boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ 即可。既然电荷和变化的磁场都能激发电场，那么除了传导电流能激发磁场外，还应当有一种电流。由电荷守恒定律和

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

即要求

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}) = 0$$

据此，将安培环路定理改写为

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2.46}$$

则与电荷守恒定律的矛盾即可消除。麦克斯韦认为，除了传导电流能产生磁场外，变化的电场也能产生磁场。这里他将 $j_d = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ 称为位移电流密度，这个物理量与电场的变化率有关，说明变化的电场产生磁场是合理的。

四、真空中的麦克斯韦方程组

由以上讨论和推广，可以得到真空中的麦克斯韦方程组为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{A}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{B}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{C}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{D}$$

由于麦克斯韦方程组是电磁场理论的基本方程组，故这里用特殊的公式标号，以与其他公式相区别，便于使用。请读者务必仔细思考其中各式的物理意义。

麦克斯韦方程组是由不同条件下电磁场的特殊规律推广而来的，它包括了电荷守恒定律，是一组内部没有矛盾的方程组。（A）式表示有散电场的源强度和电荷密度有关，（C）式说明不存在有散的磁场。一个矢量的横场部分和纵场部分是独立的，可以分别确定，故（A）和（B）不矛盾；同样（C）和（D）也不矛盾。（B）式和（D）式又具有对称的含义，（B）式表明，不仅电荷能激发电场，变化的磁场也能激发电场，这种电场是左旋的；（D）式表明，不仅传导电流能激发磁场，变化的电场也能激发磁场，这种磁场是右旋的。

五、洛仑兹力

在求解电磁场问题时，只要给出其中电荷、电流的分布及区域边界上的条件，给出电磁场

需要全本请访问 www.ertongbook.com