

# 声 明

本电子书由中国农业出版社数字出版，相关权利归中国农业出版社拥有。读者、著作权人和（或）依法可以行使著作权的权利人如有疑问，请与中国农业出版社联系：

地址：北京市朝阳区麦子店街 18 号楼

邮编：100026

电话：010-64194921 010-65005894


E-mail:lishanzhao@sina.com

中国农业出版社



全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教材指导委员会审定



**线性规划  
及其应用**

● 陈志渊 主编

● 农业经济管理各专业用

农业出版社

全国高等农业院校教材

# 线性规划及其应用

陈志渊 主编

农业经济管理各专业用

农业出版社

主 编 陈志渊(南京农业大学)  
副主编 杨崇瑞(南京农业大学)  
编写人 陈志渊  
          杨崇瑞  
          李思惠(南京农业大学)  
主审人 裴鑫德(北京农业大学)

## 序

线性规划是运筹学的重要组成部分，是近代生产力发展的需要而逐渐发展起来的一门新的边缘数学分支。目前随着我国社会主义四化建设事业的发展，这一新兴学科在我国从理论到实际应用都取得了可喜的成果，並正受到国民经济各部门的重视，特别是由于电子计算机的推广与普及为线性规划这一学科的应用与发展创造了有利条件。在农业科学领域线性规划已广泛应用于农业生产规划、区域规划、作物种植结构布局、农业经济与管理、畜禽饲养管理、饲料配方、粮食蔬菜供销系统决策、农业环境工程及农业系统工程等许多领域。

现在线性规划已被高等农业院校列为农业经济与管理等专业的必修课以及有关专业的选修课程，因此编写适合高等农业院校需要的线性规划教材是非常必要的。根据全国高等农业院校教材规划的要求，在南京农业大学陈志渊教授主持下由陈志渊教授、杨崇瑞和李思惠两位副教授合作编写的这本《线性规划及其应用》教材，正是根据这种需要而写的。

本书系统地介绍了线性规划的一些基本内容，如线性规划问题及其模型，线性规划的单纯形解法，改进单纯形法，对偶线性规划问题，对偶单纯形法，灵敏度分析及目标规划初步等等，並作了一些有益的尝试，给出了单纯形法和灵敏度分析的计算机语言程序。整个内容重点突出，针对性强，具有一定的先进性，是

一本较好的教材。

在编写方法上，作者注意了由浅入深，循序渐近，简明易懂，理论联系实际的原则。各章既给出了较多的举例，又有一定数量的农业应用例题，这对线性规划教学是很重要的。

本书编写中还注意了少而精的原则，教学时数只需 40 学时左右即可完成基本部分的教学，有些内容附了星号(\*)，可兼顾学时多一些的专业，因此本教材适用性较强。

根据我在高等农业院校讲授运筹学线性规划课和从事这一领域研究工作的体会，对于高等农业院校线性规划课的教学除了要使学生掌握必要的基本概念、基本理论和基本方法外，有两点需要特别注意：第一，要特别重视线性规划在现代农业科学研究和农业生产中的应用，尽可能多介绍一些这方面的最新成果，提高学生对学习线性规划课的目的性的认识，启发学生如何学以致用；第二，线性规划的教学要建立在现代计算工具电子计算机(微机)的基础上，因为线性规划在农业中的应用常常涉及决策变量个数较多，约束方程个数也较多，手算一般是很难实现的，因此现代线性规划课的教材应该给出线性规划模型计算的计算机语言程序，使学生在学本课程过程中就能掌握应用计算机实现线性规划问题的求解计算。在计算机特别是微机日益推广普及的今天这是容易做到的，也是应该做到的。本书在这两方面都有所体现，特别是专门设了一章介绍利用微机求解线性规划问题并作灵敏度分析等有关内容，这是十分重要的也是值得称赞的。

应本书主编陈志渊教授和杨崇瑞、李思惠副教授热情之邀，嘱予作序，盛情难却，写了以上想法，供教学参考，并将此书推荐给读者。更望广大在高等农业院校辛勤从事应用数学教学的同志共勉，为我国社会主义四化建设事业培养具有较高应用数学

---

水平的农业科技人才贡献力量。

裴鑫德

于北京农业大学

1990年9月1日

## 编 者 的 话

多年来，农业院校各专业相继为研究生、本科生开设了线性规划课程，从事农业科技和生产管理人员也迫切希望能系统地掌握线性规划的有关理论及常用方法，以便进一步提高农业科技和生产管理水平。然而，到目前为止，以农业院校学生及农业技术人员为主要对象，结合农业院校和农业生产为特点，有针对性，重点系统介绍有关线性规划的理论、方法及其应用的教科书，在国内还是为数不多。本教材正是为适应这种需要，并经农业部教材指导委员会(1988年)审定，列为指令性计划，作为高等农业院校本科生的基本教材而编写的。

本教材对内容的取舍，既考虑理论的系统性，又考虑实用性、科学性和先进性。因此作了如下一些大胆尝试：在单纯形法中引进了准备表；在改进单纯形法中介绍了改进单纯形表；在对偶线性规划问题中，强调了作为影子价格的对偶解在资源变动分析与投资活动中的应用，并用对偶理论表述了运输问题的特殊解法(表上作业法)；在灵敏度分析中，不仅介绍较为详尽，还给出较为简易的分析方法，同时给出参数变动对目标函数值的影响范围；数学模型的建立分为两阶段，由浅入深，结合若干生产实际问题加以介绍。为了使读者更好地应用线性规划的理论与方法解决实际问题，书后附有单纯形解法与灵敏度分析的 BASIC 程序，并辟专门章节详细介绍其使用方法；该程序不仅可供求解，而且还可自动打印出  $c_i$  与  $b_i$  参数的灵敏度分析结果等六种功能。

在叙述上，为了便于学生自学，力求简明、确切；由浅入深，循序渐近。如本教材分两阶段引入单纯形法，首先介绍初等代数解法，引入若干基本概念，让学生初步掌握线性规划中的单纯形法的基本思路后，再介绍单纯形法的矩阵表述，单纯形表，最优性定理等。既可达到上述目的，又可以使部分只具初等代数知识，没有学过矩阵理论的农业科技人员，也能初步了解线性规划中的单纯形法。本书还在每章末选配必要的习题并附习题答案于书后，供读者参考。

本书共有六章：第一、第六两章由陈志渊同志编写；第二、第三两章由杨崇瑞同志编写；第四、第五两章由李思惠同志编写。书后所附的源程序系陈志渊同志所设计和编写的。全书可供40—50学时讲授，各院校还可以根据不同专业的具体情况和学时要求，选讲其中部分章节。

本书在编写过程中，得到了北京农业大学裴鑫德教授的热情支持和指导，并在百忙中，对本书的初稿做了详尽的审阅，提出了许多宝贵意见，同时还为本书作序，给我们很大的鼓励。在此，特表示诚挚的谢意。

限于编者水平，又加时间仓促，书中不妥之处，希望广大读者批评指正。

1990年10月1日

# 目 录

序

编者的话

第一章 线性规划问题及其数学模型 .....	1
第一节 引言 .....	1
第二节 线性规划问题的数学模型 .....	2
习题一 .....	18
第二章 线性规划问题解的性质 .....	23
第一节 两个变量的线性规划问题的图解法 .....	23
第二节 线性规划问题的标准形式 .....	27
第三节 用消去法解线性规划问题——单纯形方法初探 .....	32
第四节 线性规划问题解的性质 .....	41
习题二 .....	49
第三章 单纯形方法 .....	53
第一节 判别定理 .....	53
第二节 单纯形方法的基本步骤 .....	63
第三节 求初始可行基的方法 .....	87
第四节 改进单纯形方法 .....	109
习题三 .....	125
第四章 对偶线性规划问题 .....	130
第一节 对偶线性规划问题的数学模型 .....	130
第二节 对偶线性规划问题解的基本性质 .....	140
第三节 对偶单纯形法 .....	146
第四节 对偶线性规划问题的经济意义——影子价格 .....	160

*第五节 原始一对偶单纯形法·····	168
*第六节 运输与作物布局问题的表上作业法·····	178
习题四·····	200
第五章 灵敏度分析·····	204
第一节 引言·····	204
第二节 目标函数系数 $c_j$ 的灵敏度分析·····	207
第三节 约束条件右端常数 $b_i$ 的灵敏度分析·····	212
第四节 增加新变量及新约束条件的灵敏度分析·····	220
第五节 约束条件变量系数 $a_{ij}$ 的灵敏度分析·····	226
习题五·····	232
第六章 微机求解线性规划问题与再论建模·····	234
第一节 LP 程序的使用方法·····	234
第二节 再论建模与应用实例·····	258
*第三节 目标规划的单纯形解法·····	293
习题六·····	301
习题答案·····	306
参考文献·····	343
附录 单纯形解法与灵敏度分析的 BASIC 程序 (LP)·····	344

# 第一章 线性规划问题及其 数学模型

## 第一节 引言

为了在我国加速实现四个现代化的宏伟目标，一项紧迫任务是必须提高经济效益，做到优质、高产、低耗。为此，除了采取技术性措施，比如对原料、设备、工艺等方面进行挖潜、改造、革新外；另一个重要措施是必须采用科学的管理方法，提高工作效率，有效地使用资源。后一重要措施要求我们，必须对工农业生产、交通运输、财贸工作等部门加以合理的组织、设计、筹划、安排，使各部门在其各项经济活动中处于最佳状态；从而，在不增加原材料、设备、人力的情况下，最大限度地发挥现有资源的作用，以取得最好的经济效果。对后一方面内容的研究，已形成一门新兴的学科，称之为运筹学。

运筹学是应用科学方法（特别是数学方法）来解决工、农、商、政府机关、国防部门在生产、组织、指挥和管理方面所出现的问题；其目的是帮助管理人员科学地决定其策略和行动。数学规划是运筹学的重要组成部分，而线性规划则是数学规划中理论成熟、方法有效、应用最为广泛的一个分支。数学规划本质是个极值问题，其中线性规划是研究线性的目标函数的极值，而自变量必须满足一组线性等式或不等式组成的约束条件。

线性规划和其他学科一样，也是由于生产力发展的需要而产生

生和发展的。线性规划早期的研究工作始于本世纪 30 年代。1939 年苏联数学家 Л. В. Канторович (康托洛维奇) 发表《生产组织与计划中的数学方法》的小册子, 是有关线性规划的最早文献; 随后, 美国也开始研究这个问题, 这个期间最有影响的是 F. L. Hitchcock (希奇柯克) 研究的运输问题及其解; 然而, 他们的工作未受到人们的注意。后来, 由于战争的需要, 纷纷提出了军事中有关规划、侦察、后勤、生产等各方面的问題。1947 年 G. B. Dantzig (丹捷格) 提出了一般线性规划模型、理论及其著名的单纯形方法 (甚至首次提出线性规划这个名称); 直到现在, 单纯形方法仍然是求解一般线性规划问题的有力工具。

从 50 年代起, 线性规划的应用逐渐从军事扩大到其他领域。特别是大型计算机的出现, 对线性规划的理论及其应用的发展起着决定性的作用。目前利用电子计算机, 已能解决变量个数达百万之多的、具有特殊结构的大型线性规划问题。

我国在建国初期就开始应用线性规划的方法。如东北的一个物资调运小组就创造了物资调运的图上作业法; 1958 年又经中国科学院数学研究所的同志给予理论上证明, 并在全国推广应用, 对我国交通运输作出了卓越的贡献。

目前, 线性规划在我国工农业生产、交通运输、财贸部门及物资管理工作中都有许多成功的应用实例; 小到一个小组的日常工作和计划的安排; 大至整个经济部门, 乃至国家的经济计划问题最优方案的制定等, 都有广阔的应用前景。

## 第二节 线性规划问题的数学模型

数学模型是指用字母、数字及其他数学符号建立起来的抽象数学形式, 用来描述实际问题 (如某种经济活动过程) 的特性及

其内在数量关系。对数学模型的研究，有助于认识问题的性质和寻求问题的较优解决方案。

例 1.2.1 (生产计划问题)某车间制造 A、B 两种产品。已知制造 A 种产品 1 千克需要劳动力 3 个(工作日)，原料 9 千克，电力 4 度；制造 B 种产品 1 千克需要劳动力 10 个，原料 4 千克，电力 5 度。在一个时期内，该车间能够使用的劳动力最多有 300 个，原料最多有 360 千克，电力最多有 200 度。又已知生产 1 千克 A、B 产品的产值分别为 700 元和 1200 元。问该车间应如何安排 A、B 产品的生产，才能在计划期间内获得最大产值。试建立此问题的数学模型。

解 为便于建立数学模型，先将题目所给的数据列成下表：

表 1.2.1

资源种类	单位产品所需资源量(单位)		可使用的资源总量
	A	B	
劳动力(工日)	3	10	300
原料(千克)	9	4	360
电力(度)	4	5	200
产值(百元/千克)	7	12	

设安排生产 A、B 产品的数量分别为  $x_1$  千克与  $x_2$  千克。 $x_1$ 、 $x_2$  的取值取决于我们作出的决策，故  $x_1$ 、 $x_2$  称为**决策变量**，简称为**变量**或**未知数**。它们又表示要达到一定目标的经济活动量，故又称它们为**活动量**，其取值称为**活动水平**。

$x_1$ 、 $x_2$  的不同数值组合表示不同的生产方案，它们所对应的不同的资源利用方案可用下列式子表示：

$3x_1 + 10x_2$	(工作日)	(劳力)
$9x_1 + 4x_2$	(千克)	(原料)
$4x_1 + 5x_2$	(度)	(电力)

为了使这些资源利用方案是合理的,就必须使以上各式表示的数量,都不超过该车间可能提供的资源总量,即应满足:

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \end{cases}$$

显见,产量  $x_1, x_2$  不能取负值,所以还应加上  $x_1, x_2$  非负要求。为此,例 1.2.1 的限制条件可以用下列不等式组表示:

$$\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.2.1)$$

限制条件(1.2.1)通常称为约束条件。

我们的目标是获得最大产值,所以产值最大的生产方案才是最优方案,而各个生产方案所获得的产值都可以表示为:

$$7x_1 + 12x_2 \quad (\text{单位:百元}) \quad (\text{产值})$$

若用  $S$  表示产值,则上式可记为:

$$S = 7x_1 + 12x_2 \quad (1.2.2)$$

称(1.2.2)式为目标函数。

综上所述,本例提出的问题是:要确定一组变量  $x_1, x_2$  的值;该组值应使(1.2.2)式取得最大值,并且满足不等式组(1.2.1)。用数学语言描述之,即得此问题的数学模型为

$$\text{Max } S = 7x_1 + 12x_2$$

$$s.t \begin{cases} 3x_1 + 10x_2 \leq 300 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 360 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

其中 Max 是英文 Maximize(极大化)的缩写, 表示使(1.2.3)式中的第一式(即目标函数)取最大值。s.t 是英文 subject to 的缩写, 表示“受约束于”所列出的不等式组。今后为简便起见, Max 一律写成 max。

例 1.2.2 (多熟制的选择问题) 设某村有150亩同一类别的田块; 有多种熟制可供选择, 即油菜——早稻——晚稻、小麦——水稻、元麦——棉花。它们分别用  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$  代表之。各熟制每亩消耗的资源(劳力与肥料)的数量及本村最多能提供的资源数量列于表1.2.2。各种作物的单产及收购价格列于表1.2.3。

表 1.2.2

资源种类	每亩所需资源量 (单位)			资源最大提供量
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
劳力(工作日)	32	15	45	3000
氮肥(千克)	100	150	125	15000

表 1.2.3

熟制	各种作物每亩产量 (千克)						每亩产值
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_6$	
$A_1$	150	750					495
$A_2$			400	600			308
$A_3$					200	75	274
收购价格 (元/千克)	0.60	0.54	0.32	0.30	0.32	2.80	

表1.2 3中  $C_1$ ——油菜,  $C_2$ ——双季稻,  $C_3$ ——小麦,  $C_4$ ——单季稻,  $C_5$ ——元麦,  $C_6$ ——棉花。

为了满足本村的需要, 稻谷至少需生产 15000 千克; 皮棉至少需生产 3750 千克。问该村应采用何种熟制及种植多大面积, 才能获最大产值。试建立此问题的数学模型。

解 设  $x_1, x_2, x_3$  分别表示熟制  $A_1, A_2, A_3$  应计划种植的亩数。本问题的目标是选择各种熟制的面积, 使总产值最大, 即求目标函数

$$495x_1 + 308x_2 + 274x_3$$

的最大值。

本问题有如下约束条件:

(1) 土地约束。考虑到本村劳力较紧, 可能种植不了那么多土地, 因此各熟制种植的面积总和仅要求不超过 150 亩即可, 故有

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 150$$

(2) 劳力约束。各熟制使用的劳力总和应不超过 3000 工作日, 即

$$32x_1 + 15x_2 + 45x_3 \leq 3000$$

(3) 肥料约束。各熟制施用的肥料总和应不超过 15000 千克, 即

$$100x_1 + 150x_2 + 125x_3 \leq 15000$$

(4) 稻谷约束。熟制  $A_1$  每亩可产稻谷 750 千克, 熟制  $A_2$  每亩可产稻谷 600 千克, 要求生产稻谷至少 15 000 千克, 即

$$750x_1 + 600x_2 \geq 15\ 000$$

(5) 棉花约束。熟制  $A_3$  每亩可产皮棉 75 千克, 要求生产皮棉至少 3750 千克, 即