

线性代数作业集

(B)

西北工业大学应用数学系线性代数教学组 编

西北工业大学出版社

1999年8月 西安

(陕) 新登字 009 号

【内容简介】

线性代数作业集
西北工业大学应用数学系线性代数教研组编
责任编辑 冷国伟
责任校对

*

© 1998 西北工业大学出版社出版
(邮编：710072 西安市友谊西路 127 号 电话：8491147)
陕西省新华书店发行
西北工业大学出版社印刷厂印装
ISBN 7-5612-1126-0 / O151.2-44

*

开本：787 毫米×1092 毫米 1/ 16 印张： 字数： 千字
1999 年 8 月第 1 版 1999 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—4 000 册 定价：0.0 元

购买本社出版的图书，如有缺页、错页的，本社发行部负责调换。

一、“第二章 矩阵及其运算”习题

1. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3 \\ x_2 = y_1 + y_2 - y_3 \\ x_3 = y_1 - y_2 + y_3 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1 = z_1 + 2z_2 + 3z_3 \\ y_2 = -z_1 - 2z_2 + 4z_3 \\ y_3 = 5z_2 + z_3 \end{cases}$$

(1) 分别写出它们对应的矩阵;

(2) 求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

2. 计算下列乘积:

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & b & b \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

3. 设 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, 求 A^k (其中 k 是正整数) .

4. 求满足 $A + aB = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $A + B = E$, $AB = O$ 的数 a 及二阶方阵 A 和 B .

5 . 求下列方阵的逆矩阵:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad (a^2 + b^2 = 2)$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(6) \text{ 已知 } A^* = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ 求 } A^{-1}.$$

6 . 设 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 求 $(A + 2E)^{-1} (A^2 - 3E)$.

7. 解下列矩阵方程:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad X \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8. 利用逆矩阵解线性方程组
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} .$$

9. 求解矩阵方程 $XA = B + 2X$, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

10 . 设 $A^k = O$ (k 为某一正整数), 证明 $(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

11 . 设 A 是 n 阶可逆方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则下列结论中_____正确; 试证明你的结论 .

- a) $(A^*)^* = (\det A)^{n-1} A$; b) $(A^*)^* = (\det A)^{n+1} A$;
c) $(A^*)^* = (\det A)^{n-2} A$; d) $(A^*)^* = (\det A)^{n+2} A$.

12 . 设 A 是实方阵, 证明: 若 $A^T A = O$, 则 $A = O$.

13 . 设 A 为 n 阶可逆对称矩阵, B 为 n 阶对称矩阵 . 当 $E + AB$ 可逆时, 试证 $(E + AB)^{-1}A$ 为对称矩阵 .

14 . 设 $P^{-1}AP = \Lambda$, 其中 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, 求 A^n .

15 . 设 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 且 $a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$ ($i = 1, 2$), 试求 $a_0 \Lambda^n + a_1 \Lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \Lambda + a_n E$.

16 . 设 m 阶方阵 A 及 n 阶方阵 B 都可逆, 求 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1}$.

17. 已知实矩阵 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 满足条件: (1) $a_{ij} = A_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$), 其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式; (2) $a_{11} \neq 0$. 计算行列式 $\det A$.

18. 是非题(设 A, B 为 n 阶方阵)

- (1) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. ()
- (2) 若 $AX = AY$, 且 $\det A \neq 0$, 则 $X = Y$, 其中 X, Y 都是 $n \times m$ 矩阵. ()
- (3) 若 $A^2 = O$, 则 $A = O$. ()
- (4) 若 $A^2 = B^2$, 则 $A = B$ 或 $A = -B$. ()
- (5) 若 $AB = O$, 则 $A = O$ 或 $B = O$. ()
- (6) 若 $\det A = 0$, 则 $AA^* = O$, 其中 A^* 是 A 的伴随矩阵. ()
- (7) 若 A, B 都可逆, 则 $A + B$ 可逆. ()
- (8) 若 $A^3 = O$, 则 $E + A$ 可逆且 $(E + A)^{-1} = E - A + A^2$. ()

19. 选择、填空题

- (1) 已知 $B = (1, 2, 3)$, $C = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$. 设 $A = B^T C$, 则 $A^n =$ _____.
- (2) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $\det A = 2$, 则 $\det \left[-\frac{1}{2}A\right]^{-1} =$ _____.
- (3) 若 A, B 都是 n 阶方阵, 则_____成立.
 - a) $\det(AB) = \det(BA)$; b) $\det(A + B) = \det A + \det B$;
 - c) $(AB)^T = A^T B^T$; d) $(AB)^k = A^k B^k$.
- (4) 设 n 阶方阵 A, B, C 都可逆, 则 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & O \end{bmatrix}^{-1} =$ _____.
 - a) $\begin{bmatrix} A^{-1} & B^{-1} \\ C^{-1} & O \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & A^{-1} \end{bmatrix}$;
 - c) $\begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}AC^{-1} \end{bmatrix}$; d) $\begin{bmatrix} -B^{-1}AC^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$.
- (5) 设方阵 A 满足 $A^2 + A - 7E = O$, 则 $A^{-1} =$ _____, $(A + 3E)^{-1} =$ _____.
- (6) 设 n 阶方阵 A, B, C 满足关系式 $ABC = E$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, 则必有_____.
 - a) $ACB = E$; b) $CBA = E$; c) $BAC = E$; d) $BCA = E$.

二、“第四章 向量组的线性相关性 (一)”习题

1 . 已知 $\alpha = (5, -1, 3, 2, 4)$, $3\alpha - 4\alpha = (3, 5, -7, -2, 8)$, 试求 $2\alpha - 3\alpha$.

2 . 将向量 $\alpha = (-1, -9, 2, 6)$ 表示成 $\alpha = (1, -2, 0, 3)$, $\alpha = (2, 3, 0, -1)$, $\alpha = (2, -1, 2, 1)$ 的线性组合 .

3 . 判断下列向量组的线性相关性:

(1) $\alpha = (1, 2, -1, 4)$, $\alpha = (9, 100, 10, 4)$, $\alpha = (-2, -4, 2, -8)$.

(2) $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$.

$$(3) \quad \gamma_1 = (3, 1, 0, 2), \gamma_2 = (1, -1, 2, -1), \gamma_3 = (1, 3, -4, 1).$$

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 试判断下列向量组的线性相关性:

$$(1) \quad \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

$$(2) \quad \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3, 2\alpha_1 - \alpha_2 + 3\alpha_3.$$

5. k 取何值时, 向量组 $\alpha = (1, k, 0)$, $\alpha = (0, 1, k)$, $\alpha = (1, 2, 1)$ 线性无关.

6. 设 $\alpha, \alpha, \dots, \alpha_m$ 为 n 维向量组, 令 $\beta = \alpha + \alpha$, $\beta = \alpha + \alpha$, $\dots$, $\beta_m = \alpha_m + \alpha$, 证明:

(1) 当 m 为偶数时, $\beta, \beta, \dots, \beta_m$ 线性相关.

(2) 当 m 为奇数时, 若 $\alpha, \alpha, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 则 $\beta, \beta, \dots, \beta_m$ 线性无关.