

“国家工科数学课程教学基地”系列教材

线性代数与空间解析几何 同步学习指导

电子科技大学应用数学学院 编

电子科技大学出版社

内 容 提 要

本书是根据教育部《关于高等工业院校线性代数课程的教学基本要求》和《全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写的，并与“十五”国家级规划重点教材《线性代数与空间解析几何》(电子科技大学应用数学学院编，高等教育出版社出版)的内容相同步。每章的内容分为四个部分：(1)基本要求；(2)内容提要；(3)典型题例；(4)检测题。

本书内容全面，例题典型，融入了编者多年的教学经验，是工科本科各专业学生结合课程学习、复习和参加研究生入学统考的难得的参考资料，也可作为成教、自考等各类学生学习该课程的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数与空间解析几何同步学习指导/电子科技大学应用数学学院编. —成都: 电子科技大学出版社, 2002. 9

ISBN 7—81065—953—7

I. 线… II. 电… III. ①线性代数-高等学校-教学参考资料
②立体几何:解析几何-高等学校-教学参考资料 IV. ①O151.2②
O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 073890 号

线性代数与空间解析几何同步学习指导 电子科技大学应用数学学院 编

出 版: 电子科技大学出版社

(成都建设北路二段四号, 邮政编码 610054)

责任编辑: 徐守铭

发 行: 新华书店

印 刷:

开 本: 850×1168 1/32 印张 8.375 字数 209 千字

版 次: 2002 年 9 月第一版

印 次: 2002 年 9 月第一次印刷

书 号: ISBN 7—81065—953—7/O·43

印 数: 1—6000 册

定 价: 14.00 元

前 言

本书是根据教育部《关于高等工业院校线性代数课程的教学基本要求》和《全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》编写的。本书的编写思想是，帮助大学生在学习线性代数与空间解析几何时，进一步深入理解基本概念，掌握基本理论和基本方法，提高分析问题和解决问题的能力。

本书的特色是，紧扣大纲，突出重点，加强基础，重视综合，总结题型，启迪思维，注重应用，体现线性代数与空间解析几何的有机结合。本书共分七章，每章的内容分为四个部分：(1) 基本要求；(2) 内容提要；(3) 典型例题；(4) 检测题。

本书内容全面，例题典型，融入了编者多年的教学经验，并与“十五”国家级规划重点教材《线性代数与空间解析几何》(电子科技大学应用数学学院编，高等教育出版社出版)的内容相对应，分析透彻，深入浅出，叙述清晰，便于自学，是大学生学习线性代数与空间解析几何的得力助手。同时，还选编了近三年电子科技大学《线性代数与空间解析几何考试题》供学生复习参考。

本书是工科本科各专业学生结合课程学习、复习和参加研究生入学统考的难得的参考资料，也可作为成教、

自考等各类学生学习本课程的参考书。

本书是电子科技大学“国家工科数学课程教学基地”系列教材之一，各章的撰写者分别是：钟守铭（第一、二章），黄廷祝（第四、六章），成孝予（第五、七章），李卷澜（第三章及第六章中空间解析几何部分），附录部分由刘金水选编。

限于编者水平，疏漏之处，敬请批评指正。

编 者

2002年9月

目 录

第一章 矩阵及其初等变换

一、基本要求	(1)
二、内容提要	(1)
三、典型例题	(9)
四、检测题	(26)
毕达哥拉斯	(31)

第二章 行列式

一、基本要求	(32)
二、内容提要	(32)
三、典型例题	(37)
四、检测题	(77)
阿基米德	(83)

第三章 几何空间

一、基本要求	(85)
二、内容提要	(85)
三、典型例题	(90)
四、检测题	(104)
欧几里德	(107)

第四章 n 维向量空间

一、基本要求	(109)
二、内容提要	(109)
三、典型例题	(113)
四、检测题	(143)

韦达	(146)
----	-------

第五章 特征值与特征向量

一、基本要求	(148)
二、内容提要	(148)
三、典型例题	(151)
四、检测题	(177)
笛卡儿	(181)

第六章 二次型与二次曲面

一、基本要求	(183)
二、内容提要	(183)
三、典型例题	(186)
四、检测题	(206)
阿贝尔	(209)

第七章 线性空间与线性变换

一、基本要求	(211)
二、内容提要	(211)
三、典型例题	(213)
四、检测题	(230)
伽罗华	(233)

附录一	(235)
-----	-------

电子科技大学 99 级线性代数与空间解析几何考试题	(235)
电子科技大学 99 级线性代数与空间解析几何考试题参考解答	(238)
电子科技大学 2000 级线性代数与空间解析几何考试题	(242)
电子科技大学 2000 级线性代数与空间解析几何考试题参考解答	(244)
电子科技大学 2000 级线性代数与空间解析几何考试题	(248)
电子科技大学 2000 级线性代数与空间解析几何考试题参考解答	(250)

附录二 检测题参考解答	(254)
-------------	-------

第一章 矩阵及其初等变换

一、基本要求

1. 理解矩阵的概念,掌握单位矩阵、对角矩阵、对称矩阵、反称矩阵及其性质;
2. 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算及其各种运算规律;
3. 熟练掌握矩阵的初等变换,了解初等矩阵;
4. 理解逆矩阵的概念,熟练掌握逆矩阵的性质,掌握用初等变换求逆矩阵;
5. 了解分块矩阵,掌握分块矩阵的运算.

二、内容提要

1. 矩阵的定义

由 mn 个数排成 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列的矩阵,简称为 $m \times n$ 矩阵,其中 a_{ij} ($i=1,2,\cdots,m$; $j=1,2,\cdots,n$) 表示第 i 行第 j 列的元, i 称为 a_{ij} 的行指标, j 称为 a_{ij} 的列指标.

2. 矩阵的线性运算

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

为两个 $m \times n$ 矩阵, k 为一个数, 则矩阵的线性运算为

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

注: 当 $k \neq 0$ 时, kI 称为数量矩阵, 其中 I 是单位矩阵.

3. 线性运算的性质

(1) 加法交换律 $A + B = B + A$

(2) 加法结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$

(3) 零矩阵的作用 $A + O = O + A = A$

(4) 负矩阵的作用 $A + (-A) = O$

其中

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

(5) $1A = A$

(6) 乘法结合律 $k(lA) = (kl)A$

(7) 分配律 $k(A+B) = kA + kB$

(8) 分配律 $(k+l)A = kA + lA$

在线性运算的 8 条性质中, A, B, C 均为 $m \times n$ 矩阵, k, l 为数, O 为 $m \times n$ 阶零矩阵. 由这 8 条性质还可推出如下结果:

(1) $(-1)A = -A$

(2) $0A = O$

(3) $kO = O$

(4) 减法的定义 $A - B = A + (-B)$

4. 矩阵的乘法及其性质

(1) 矩阵乘法的定义:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}$$

则由元

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, s)$$

组成的 $m \times s$ 矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 A 与 B 的乘积, 记为 $AB=C$.

(2) 矩阵乘法的性质

结合律 $A(BC) = (AB)C$ $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

分配律 $A(B+C) = AB+AC$ $(A+B)C = AC+BC$

单位矩阵的作用 $IA = AI = A$

一般说来, 交换律不存在, 即 $AB \neq BA$; 若 $AB = BA$, 则称矩阵 A 与 B 可交换.

方阵的幂 设 k 为正整数, $A^{k+1} = A^k A$ ($k=2, 3, \dots$), $A^1 = A$, 方阵的幂具有的性质是: $A^m A^k = A^{m+k}$, $(A^m)^k = A^{mk}$.

方阵的多项式 设

$$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是 x 的 k 次多项式, A 是 n 阶方阵, 则称

$$f(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I$$

是方阵 A 的 k 次多项式.

方阵的多项式满足: 设 $f(A)$ 、 $g(A)$ 都是 A 的多项式, 有

$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

5. 转置矩阵及其性质

转置矩阵的定义: 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

如果将 A 的行、列交换后, 所得到的矩阵称为 A 的转置矩阵, 记为 A^T , 即

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

转置矩阵的性质：

$$(1) (A^T)^T = A$$

$$(2) (A+B)^T = A^T + B^T$$

(3) $(AB)^T = B^T A^T$ ，一般地，有

$$(A_1 A_2 \cdots A_s)^T = A_s^T A_{s-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$$

$$(4) (kA)^T = kA^T$$

两个特殊矩阵：

$$(1) \text{对称矩阵} \quad A^T = A$$

$$(2) \text{反称矩阵} \quad A^T = -A$$

6. 矩阵的初等变换

(1) 矩阵中某两行元互换位置；

(2) 用非零的常数乘以矩阵的某一行的全部元；

(3) 矩阵某一行元的 k 倍加到另一行。

以上三种变换都称为矩阵的初等行变换。将上面(1)、(2)、(3)中的“行”换成“列”就是矩阵的初等列变换。矩阵的初等行变换和初等列变换统称为矩阵的初等变换。

7. 矩阵的等价

设 A 与 B 是同阶矩阵，若 A 经过有限次初等变换化为 B ，则称 A 与 B 等价，记为 $A \cong B$ 。

矩阵的等价的性质：反身性 $A \cong A$

对称性 $A \cong B \Leftrightarrow B \cong A$

传递性 $A \cong B, B \cong C \Rightarrow A \cong C$

8. 方程组与求解法

$AX = b$ 称为非齐次线性方程组， $AX = 0$ 称为齐次线性方程

组,其中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = (A, b) \xrightarrow{\text{初等变换}} \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

若 $d_{r+1} = 0$, 则 $AX = b$ 有解. 此时, 当 $r = n$ 时, 有惟一解; 当 $r < n$ 时, 有无穷多个解. 若 $d_{r+1} \neq 0$, 则 $AX = b$ 无解.

$AX = \mathbf{0}$ 有非零解的条件是 $r < n$.

9. 初等矩阵

对单位矩阵任作一次初等变换得到的矩阵就称为初等矩阵,

即

$$\mathbf{E}_{ij} = \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & & 1 & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & \vdots & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & 1 & & \cdots & & 0 & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{(第 } i \text{ 行)} \\ \\ \\ \\ \text{(第 } j \text{ 行)} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\mathbf{E}_i(c) = \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & c & & & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & 1
 \end{array} \right] \text{(第 } i \text{ 行)}$$

$$\mathbf{E}_{ij}(c) = \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & \cdots & & c & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{(第 } i \text{ 行)} \\ \\ \\ \text{(第 } j \text{ 行)} \\ \\ \\ \end{array}$$

或

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

12. 分块矩阵

以子矩阵为元的矩阵称为分块矩阵. 求分块矩阵的加、数乘、乘法运算时, 与矩阵的加、数乘、乘法运算对应一致, 特别是求分块对角矩阵的逆矩阵时, 可把它化为求对角元的子矩阵的逆.

13. 几个等价结论

A 可逆 $\Leftrightarrow AX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow A \cong I \Leftrightarrow A$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积.

三、典型例题

例 1 设 X 是实 $n \times 1$ 矩阵, 试证: (1) $X^T X \geq 0$; (2) $X^T X = 0$ 的充要条件是 $X = 0$.

证 (1) 设

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

则 $X^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, 于是

$$X^T X = (a_1, a_2, \dots, a_n) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq 0$$

(2) 必要性: 设 $X^T X = 0$, 即有

$$X^T X = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 0$$

显然有 $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, 所以 $X = 0$.

充分性: 因为 $X=0$, 即 $X^T=(0,0,\dots,0)$, 故

$$X^T X = (0, 0, \dots, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

例 2 设 X 是 $n \times 1$ 矩阵, 且 $X^T X = 1$, 试证 $S = I - 2XX^T$ 是对称矩阵, 且 $S^2 = I$.

证 因为

$$\begin{aligned} S^T &= (I - 2XX^T)^T \\ &= I^T - 2(XX^T)^T = I - 2(X^T)^T X^T \\ &= I - 2XX^T = S \end{aligned}$$

所以 S 是对称矩阵.

由于 $X^T X = 1$, 我们有

$$\begin{aligned} S^2 &= (I - 2XX^T)(I - 2XX^T) \\ &= I - 4XX^T + 4XX^T XX^T \\ &= I - 4XX^T + 4XX^T = I \end{aligned}$$

例 3 已知 $\alpha = (1, 2, 3)$, $\beta = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, 且 $A = \alpha^T \beta$, 计算 A^n .

解 因为

$$\beta \alpha^T = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 + 1 + 1 = 3$$

于是有

$$\begin{aligned} A^n &= (\alpha^T \beta)^n = \alpha^T \beta \alpha^T \beta \cdots \alpha^T \beta \\ &= \alpha^T (\beta \alpha^T)^{n-1} \beta = 3^{n-1} \alpha^T \beta \end{aligned}$$