21 世纪大学课程辅导丛书

线性代数与空间解析几何典型题

解法·注释·技巧

龚冬保　魏战线

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书通过对近 400 道线性代数和空间解析几何典型例题的分析、求解和注释，归纳总结了本课程分析处理问题的基本方法和常用的解题技巧，所选的每道题都力求有较新颖、独特的解法，以使读者能够举一反三、触类旁通，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为《线性代数与空间解析几何》课程的教学参考书，也可供报考硕士研究生的读者复习应考之用。

西安建筑科技大学印刷厂印装

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何典型题/龚冬保，魏战线编著. -西安 :西安交通大学出版社，2000.7
（21 世纪大学课程辅导丛书）
ISBN 7-5605-1255-0

Ⅰ.线… Ⅱ.①龚…②魏… Ⅲ.①线性代数-高等学校-解题②立体几何 :解析几何-高等学校-解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 23338 号

*

西安交通大学出版社出版发行
（西安市兴庆南路 25 号 邮政编码 :710049 电话 :（029）2668315）
陕西友盛印务有限责任公司印装
各地新华书店经销

*

开本 :787 mm×1 092 mm 1/16 印张 :11.75 字数 :283 千字
2000 年 7 月第 1 版 2001 年 8 月第 3 次印刷
印数 :10 001～14 000 定价 :15.00 元

前　言

本书与《高等数学典型题·解法·技巧·注释》一书在编写格式上是相同的。我们选编了近 400 道代数和几何的典型题为例题，力图讲清楚分析问题的方法及本课程的解题技巧。在正文中，我们的叙述较为精炼，而将一些有关的知识、方法、解题思路放在旁注之中，以启迪读者思维。因此，读者在阅读本书时，一定要边看书边自行推导，以掌握本书所讲的解题方法与技巧，并用这些方法去解更多的题，这对学好本课程必有益处。本书在每章后都有一套独立作业题，是为读者检查学习效果而设置的。

分析、代数、几何相结合，特别是代数与几何相结合，是本书的又一特点。以三维的几何空间为模型，去理解和发展一般 n 维线性空间的理论，思路较为自然；理解了一般 n 维空间的理论后，将它们用于几何空间，就能高屋建瓴，势如破竹。编者从 1990 年起，便在西安交通大学的一些班级，作了这种代数与几何相结合的教学改革试验，反映这方面试验的相应教材《线性代数与空间解析几何》将与本书同时出版。

本书可作为线性代数与空间解析几何课程的教学参考书，也可供准备参加硕士研究生入学考试的读者参考。由于不同专业的读者对本课程的要求不同，因此，本书的部分内容超出了一般专业教学的要求，凡属这些内容的题或章、节，我们都加了星号“ * ”，没有学过与之相关内容的读者，可以不读这些部分。

本书第 1、2、3 章由龚冬保编写，第 4、5、6、7 章由魏战线编写，最后由龚冬保统稿。限于编者水平，本书难免有疏漏和不足之处，恳请读者批评指正。

编者

2000 年 2 月

目　录

第 1 章　矩阵与行列式

1.1　单项选择题

1-1　设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶方阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$，则 $|\boldsymbol{C}|=$(　).

(A) ab　(B) $(-1)^{n+m}ab$　(C) $-ab$　(D) $(-1)^{mn}ab$

解 1　(用拉普拉斯定理)

$$|\boldsymbol{C}|=(-1)^{(1+2+\cdots+m)+(n+1+\cdots+n+m)}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$$

而 $(1+2+\cdots+m)+(n+1+\cdots+n+m)=\dfrac{m(m+1)}{2}+\dfrac{m(2n+m+1)}{2}=mn+m(m+1)$. $m(m+1)$ 是偶数，故 $|\boldsymbol{C}|=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$　选(D).

解 2　(用初等变换)

为了不改变 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 本身的列的顺序，我们这样作初等列变换：将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列依次与 $\boldsymbol{B}$ 的第 n 列、$n-1$ 列…直到第一列交换. 交换 n 次 $\boldsymbol{A}$ 的第一列位于 $\boldsymbol{C}$ 的第一列；同样将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列依次换到 $\boldsymbol{C}$ 的第二列也交换 n 次……，最后将 $\boldsymbol{A}$ 的第 m 列交换至 $\boldsymbol{C}$ 的第 m 列，共交换 mn 次，使 $\boldsymbol{C}$ 等价于 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，故 $|\boldsymbol{C}|=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$.

像这种分块矩阵的行列式 $|\boldsymbol{C}|=(-1)^{mn}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$ 最好当成公式记住.

作为选择题，本题最简单的做法是令 $m=n=1$，便排除了(A)和(B). 再令 $m=1$，$n=2$ 可排除(C)($\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均用单位矩阵). 但平常练习不要这样作.

1-2　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{I}$ 是三阶单位矩阵. $|\boldsymbol{A}|=2$，且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{I}=0$. 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$(　).

(A) 0　(B) -1　(C) -4　(D) -2

解　$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+2\boldsymbol{I}=0$ 即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=-2\boldsymbol{I}$$

从而　$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=-8$　$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=-4$　选(C).

本题虽简单，却包含了矩阵加法、数乘、乘法及矩阵行列式等许多知识点.

1-3　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，则必有(　　).

(A) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$　(B) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}'|$

(C) $(\boldsymbol{AB})'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}'$　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

解　$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$. $|\boldsymbol{BA}'|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}'|$.

而 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}'|$ 且行列式乘积可交换. 故选(B).

本题的正确选项，也是容易选到的，但要否定其余三个选项，便要学会举反例. 平时作

注　平时练习选择题，除了训练很快选定正确的一项外，更应当进一步练习否定其余三项的方法. 如本题，为否定(A)可举反例：设 $A=B=I$ 都是单位矩阵，则 $|A+B|=|2I|=2^n$；而 $|A|+|B|=2$，故只要 $n\geqslant2$，(A)不成立；(D)不成立是明显的，因为 A、B 与 $A+B$ 可逆的关系都没有，如

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

则 $A+B=I$ 但 A^{-1}、B^{-1} 均不存在；(C) $(AB)'=B'A'$ 是成立的，因此只要举 $AB\neq BA$ 的任一例子就可以了.

选择题都这样，学会举反例，对加深理解所学知识十分有益.

1-4　设 A、B 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=0$，则必有(　).

(A) $A=0$ 或 $B=0$.　　(B) $BA=0$.

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$.　　(D) $|A|+|B|=0$.

解　$|AB|=|A|\cdot|B|=0$，故 $|A|$ 或 $|B|=0$. 选(C).

注　为排除(A)，可举例：$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$. $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ 则 $AB=0$；此例也可作为排除(B)的一个反例，这时 $BA=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ 不是零矩阵；排除(D)只要设 $A=I$（单位矩阵），而 $B=0$.

举(B)的反例，再一次强调矩阵乘法无交换律；关于排除(D)，即说明 A、B 不能都是非零的矩阵. 这时 $AB=0$ 必有 $|A|=|B|=0$. 所以这时要用 $|A|\neq0$，$B=0$ 才行. 若 $AB=0$ 而 $|A|\neq0$，那么必有 $B=0$.

对待选择题，作为平时的练习，要像这样既说明选(C)的理由，又说明不选其余三项的理由，这样作一道题，可以顶几道题的效果. 这样练下来，到了考试时，很快就能选到正确的选项.

本题在排除(A)时这样想：设 A 是非零的退化矩阵，X 是 n 维的列向量. 则 $AX=0$ 有非零解. 将它作 B 的一列，B 的其余各列为零向量，则 $B\neq0$，$AB=0$，由此，启发我们得：若 A 的秩为 $r<n$，则 B 的秩最大为 $n-r$.

以后的例题我们不一定都这样作. 希望读者自己都这样作.

1-5　设 n 阶矩阵 A、B、C 满足关系 $ABC=E$（n 阶单位矩阵），则必有(　).

(A) $BCA=E$　　(B) $CBA=E$

(C) $ACB=E$　　(D) $BAC=E$

解　$A(BC)=E$，说明 $BC=A^{-1}$，故 $BCA=E$. 选(A).

本题如要举反例排除(B)、(C)、(D)三选项也不难，关键是确定 C，使 $C=(AB)^{-1}$，且 AC 和 BC 均不可交换，为此，设

$$A=\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$$. 可求得 $C=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$ 读者可以自行验证.

本题一是用到乘法结合律，互逆矩阵乘法有交换律，故 $BCA=ABC=E$. 一般矩阵的乘法不服从交换律，因此(B)、(C)、(D)未必成立.

1-6 四阶行列式 $\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{bmatrix} =$ ( ).

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$.

(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$.

(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$.

解 1 按第一行展开得

原式 $= a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. 选(D).

解 2 不妨设 $b_4 \neq 0$. 用 $-\frac{a_1}{b_4}$ 乘第 4 行加于第一行得

原式 $= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & b_1 - \frac{a_1a_4}{b_4} \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = (a_1a_4 - b_1b_4)\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$.

本题属计算题，但说明行列式的分块并不像矩阵分块一样. 容易选错处是误以为分块后有原式 $=$

$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ b_2 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & b_3 \\ b_4 & 0 \end{vmatrix}$

1-7 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$

则 $f(x) = 0$ 的根的个数为( ).

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解 将原行列式的 1、4 两列各乘 -1 分别加于 2、3 两列得

$f(x) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 1 & x-3 \\ 2x-2 & 1 & 1 & 2x-3 \\ 3x-3 & 1 & x & 3x-5 \\ 4x & -3 & x-4 & 4x-3 \end{vmatrix}$ (第 4、2 列乘 -1 分别加于 1、3 列)

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x-3 \\ 1 & 1 & 0 & 2x-3 \\ 2 & 1 & x-1 & 3x-5 \\ 3 & -3 & x-1 & 4x-3 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x-3 \\ 1 & 1 & 0 & 2x-3 \\ 2 & 1 & 1 & 3x-5 \\ 3 & -3 & 1 & 4x-3 \end{vmatrix}$

说明 $f(x)$ 是 x 的二次多项式，因此 $f(x) = 0$ 有两个根. 选(B).

注 若要求出另一个根，已很简单，将上面最后得到行列式的第 2 行减去第一行得

本题只要求回答 $f(x) = 0$ 有几个根. 由代数基本定理知，只要知道 $f(x)$ 是 x 的几次多项式即可，因此不必算出行列式. 即使要求出根也不必算完行列式(见正文注).

选择题中 4 个选项有一个正确，因此作选择题往往作几步便可选到正确的选项.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & x-3 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 2 & 1 & 1 & 3x-5 \\ 3 & -3 & 1 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 即知 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 的另一个根，当然，严格说还应当肯定 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$，否则有 $f(x) \equiv 0$ 的可能！

1-8 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵，则（ ）.

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(C) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}$.

解　由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{I}$（单位矩阵），同样 $\boldsymbol{B}$ 等价于 $\boldsymbol{I}$，因此 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 等价. 故(A)成立. 选(A).

排除(B)可设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}$ 不是对称矩阵；(C)可设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{I}$；(D)与(C)是同一答案.

1-9 设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}=$（ ）.

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.　　(B) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

(C) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}$.　　(D) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

解　本题作为选择题，可以猜测选(C)，再验证：

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B})\\ &=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\ (\text{将 } \boldsymbol{E} \text{ 写为 } \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B})\\ &=\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

故选(C)是对的.

本题只要令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 即可排除(A)、(B)；(D)可令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\neq\boldsymbol{A}$. 从而 $[\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}]^{-1}\neq(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

1-10 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，则必有（ ）.

(A) $\boldsymbol{AP}_1\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{B}$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

(C) $\boldsymbol{AP}_2\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{B}$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

解　选(B). 首先，用初等矩阵右乘 $\boldsymbol{A}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 作列变换. 故可排除(A)、(C). $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$ 表示将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行加于第 3 行，$\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A})$ 表示再将 1、

2 两行互换. 故选(B).

1-11 已知 $Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&-1&t\\3&1&2\end{bmatrix}$,$P$ 是三阶非零矩阵,且 $PQ=0$. 则 $t=$( ).

(A) -1 (B) 1 (C) -2 (D) 2

解 设 $P=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\\boldsymbol{\beta}\\\boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 是P 的三个行向量,$P\neq0$. 故 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$、$\boldsymbol{\gamma}$ 至少有一个非零向量如 $\boldsymbol{\alpha}\neq0$,则方程 $Q'\boldsymbol{\alpha}'=0$ 有非零解,因此 $|Q|=0$ 得 $t=-1$. 选(A).

本题用到方程组 $Q'X=0$ 有非零解. 则 $|Q'|=0$,只是必要性条件,用克莱姆法则就可以证明.

1-12 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$、$\boldsymbol{\alpha}_3$、$\boldsymbol{\beta}_1$、$\boldsymbol{\beta}_2$ 都是 4 维列向量,4 阶行列式 $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_1|=m$,$|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\alpha}_3|=n$. 则 $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)|=$( ).

(A) $m+n$ (B) $-(m+n)$ (C) $n-m$ (D) $m-n$

解 $|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2|=|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_1|+|\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_3\boldsymbol{\beta}_2|=m-n$. 选(D).

本题完全用行列式的性质.

1-13 设 A 是 n 阶可逆矩阵 ($n\geqslant2$),则( ).

(A) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}^{-1}|$. (B) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|$.

(C) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$. (D) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$

解 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,知 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$. 故 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$ 选(D).

1-14 设 A 是 n 阶($n\geqslant2$)可逆矩阵,则$(\boldsymbol{A}^*)^*=$( ).

(A) $|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$. (B) $|\boldsymbol{A}|^{n+1}=\boldsymbol{A}$.

(C) $|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$. (D) $|\boldsymbol{A}|^{n}\boldsymbol{A}$.

解 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$;$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}$

$=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$. 选(C).

1-15 设三阶行列式的元素为 ±1. 则这样行列式的最大值为( ).

(A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6

解 三阶行列式的展开式中的乘积项共 6 项. 由于元素为 ±1,故每项也是 ±1,因此,代数和为偶数,不可能等于 5 ;我们证明不可能为 6. 如为 6 则三个正号项中出现 -1 的因子应为偶数个,而三个负号项

此题完全是用行列式定义来算的题. 三阶行列式共 3!项,每项三个因子取'+'号与'−'号项至多三个. 由此得出行列式值$\leqslant4$.

中出现 -1 要为奇数个,这是不可能的;因此,最大值至多为 4. 而 $\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=4$. 因此,最大值为 4. 选(B).

而 4 可以达到.

1-16 设 n 阶行列式 $\boldsymbol{I}_n=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}=0$

而 $n-1$ 阶行列式 $\boldsymbol{I}_{n-1}\neq0$. 则 $a=$( ).

(A) 1 (B) -1 (C) $\dfrac{1}{n-1}$ (D) $\dfrac{1}{1-n}$.

解

$$\boldsymbol{I}_n=\begin{vmatrix}1+(n-1)a&1+(n-1)a&1+(n-1)a&\cdots&1+(n-1)a\\a&1&a&\cdots&a\\a&a&1&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$$=[1+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\0&1-a&0&\cdots&a\\0&0&(1-a)&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&(1-a)\end{vmatrix}$$

$$=[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}$$

若 $a=1$,则 $\boldsymbol{I}_{n-1}=0$. 故 $a=\dfrac{1}{1-n}$. 选(D).

1.2 非客观题

1.2.1 行列式

1-17 设 $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_{12}}\neq\dfrac{\alpha_{21}}{\alpha_{22}}$,求行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各代数余子式,其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}\end{bmatrix}$,从而写出 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

本题是通过练习"代数余子式"而得到求可逆的二阶矩阵的逆矩阵公式.

解 $A_{11}=a_{22}$ $A_{21}=-a_{12}$

$A_{12}=-a_{21}$ $A_{22}=a_{11}$.

故 $\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}\alpha_{22}&-\alpha_{12}\\-\alpha_{21}&\alpha_{11}\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}^*}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$.

1-18 设 $a \neq b+2c$；$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$，求行列式的各代数余子式．从而写出 $\boldsymbol{A}^{-1}$．

解 $A_{11}=1$，$A_{21}=-(b+c)$，$A_{31}=-c$

$A_{12}=-1$，$A_{22}=a$，$A_{32}=c$

$A_{13}=-2$，$A_{23}=a+b$，$A_{33}=a-b$

$$|\boldsymbol{A}|=a-b-2c，\boldsymbol{A}^{*}=\begin{bmatrix} 1 & -(b+c) & -c \\ -1 & a & c \\ -2 & a+b & a-b \end{bmatrix}，$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^{*}.$$

本题也是通过求代数余子式，得到 $\boldsymbol{A}^{*}$ 从而得到 $\boldsymbol{A}^{-1}$．三阶以上矩阵求逆这样作就麻烦了．

1-19 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1\,927 & 1\,935 & 1\,921 \\ 1\,949 & 1\,950 & 1\,948 \\ 1\,999 & 2\,000 & 1\,998 \end{vmatrix}$

解 用原行列式第 2 列减第 1 列、第 1 列减第 3 列得

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 8 & 1\,921 \\ 1 & 1 & 1\,948 \\ 1 & 1 & 1\,998 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6 & 8 & 1\,921 \\ 1 & 1 & 1\,948 \\ 0 & 0 & 50 \end{vmatrix}$$

$$=-100.$$

四阶以下行列式的计算，一定要熟悉．尽可能用行列式性质来化简到算出结果．

1-20 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$．

解 将各列加于第一列并提出公因子 10 得

$$D=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=20\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-40\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=160.$$

第二步：第 1 行乘 -1 加于各行；再按第一列展开．并提出 2．

1-21 不具体计算行列式，求方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ 2 & x-2 & 2 \\ 0 & 2 & x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根．

这个方程实际上是矩阵 $A=$

解　设三个根为 x_1,x_2,x_3,则 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. 由代数方程根与系数的关系,得 $x_1+x_2+x_3=6$,

$$x_1x_2x_3=-\begin{vmatrix}-1&2&0\\2&-2&2\\0&2&-3\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}+1&1&0\\-2&-1&2\\0&1&-3\end{vmatrix}=-10.$$

如 $x_1=-1$. 即以 $x=-1$ 代入行列式得

$$\begin{vmatrix}-2&2&0\\2&-3&2\\0&2&4\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}-1&1&0\\2&-3&2\\0&1&-2\end{vmatrix}=0$$

故三个根为 $x_1=-1,x_2=2,x_3=5$.

$\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$ 的特征方程.

本题的解法是先用观察法得到根 $x=-1$,再由根与系数关系容易看出另外两个根.

1-22　验证 $\lambda=\pm1$ 是方程

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-3&2\\1&\lambda-1&2&-3\\-3&2&\lambda-1&1\\2&-3&1&\lambda-1\end{vmatrix}=0$$

的两个根,并求此方程的另两个根.

解　$\lambda=1$ 时行列式为

$$\begin{vmatrix}0&1&-3&2\\1&0&2&-3\\-3&2&0&1\\2&-3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-3&2\\0&-1&3&-2\\-3&2&0&1\\2&-3&1&0\end{vmatrix}=0$$

将第 3、4 行加于第 2 行.

$\lambda=-1$ 时,有

$$\begin{vmatrix}-2&1&-3&2\\1&-2&2&-3\\-3&2&-2&1\\2&-3&1&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1&-3&-1\\-1&-2&2&-1\\-1&2&-2&-1\\-1&-3&1&-1\end{vmatrix}=0$$

将 2、3 列分别加于 1、4 列.

故 $\lambda\pm1$ 是方程的根. 又 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=4$.

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=\begin{vmatrix}-1&1&-3&2\\1&-1&2&-3\\-3&2&-1&1\\2&-3&1&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&-3&-1\\0&-1&2&-1\\-1&2&-1&0\\-1&-3&1&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&1&-3&-1\\0&-2&5&0\\-1&2&-1&0\\-1&-3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&5\\-1&2&-1\\-1&-3&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&-2&5\\0&5&-2\\-1&-3&1\end{vmatrix}=21$$

逐步化简的方法很多,请读者自行计算这个行列式.

记 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$,则 $\lambda_3+\lambda_4=4$. $\lambda_3\cdot\lambda_4=-21$

故 $\lambda_3=-3,\lambda_4=7$ 为所求的另外两个根.

注 以上两个例题我们均引用到多项式的根与系数的关系.一般设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵.则方程 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$ 的 n 个根有如下关系:

$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$.

而
$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素和:$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹.

计算以下各题中的行列式

1-23

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&a_1\\0&0&\cdots&a_2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&a_{n-1}&\cdots&0&0\\a_n&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

以下介绍计算 n 阶行列式的常用方法.

这个题直接用定义更简单,而用'逆推公式'计算 n 阶行列式的方法更普遍.

解 1 直接用定义,此行列式只有一项,它的符号是 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$,故 $\Delta=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n$.

解 2 按第 1 列展开得递推公式:

$$\begin{aligned}\Delta_n&=(-1)^{n+1}a_n\Delta_{n-1}=(-1)^{(n+1)+n}a_na_{n-1}\Delta_{n-2}\\&=(-1)^{n+1+n+\cdots+3}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1\\&=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n\\&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.\end{aligned}$$

1-24 $\Delta=\begin{vmatrix}x&y&0&\cdots&0&0\\0&x&y&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&x&y\\y&0&0&\cdots&0&x\end{vmatrix}$

由于第一列特殊,故按第 1 列展开算本题最简便.

解 按第 1 列展开得 $\Delta=x^n+(-1)^{n+1}y^n$.

1-25 $\Delta=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\cdots&xn\\x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$

先提取公因式,将一列或一行化为 1 是常用方法.

第 $2,3,\cdots,n$ 行减去第 1 行.

解 将各列加于第 1 列并提出 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-m$ 的因子式,得

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & xn \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - m\right)\cdot(-m)^{n-1}$$

1-26 $\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$

解　按第一行展开得

$$\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$$

即
$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta(\Delta_{n-1} - \alpha\Delta_{n-2})$$

故 $\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1}$**是以** β **为公比的等比数列**.($n=3,4,\cdots$).**而首项** $\Delta_2 - \alpha(\alpha+\beta) = \beta^2$

故
$$\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} = \beta^n$$

同理
$$\Delta_n - \beta\Delta_{n-1} = \alpha^n$$

消去 Δ_{n-1}**得**

$$(\beta-\alpha)\Delta_n = \beta^{n+1} - \alpha^{n+1}$$

故

$$\Delta_n = \frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta-\alpha} = \beta^n + \beta^{n-1}\alpha + \beta^{n-2}\alpha^2 + \cdots + \beta\alpha^{n-1} + \alpha^n$$

本题所得到的其实也是递推公式.不过略加变形,这个递推关系成了等比数列的关系.

1-27 $\Delta_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$

解　按最后一行展开得

$$\Delta_n = 2\cos\alpha\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

以下有两种解法来求 Δ_n.

1.**设** Δ_n **是两个等比数列的通项** $a_1 q_1^{n-1}$,$a_2 q_2^{n-1}$ **的和.则有** $a_1 q_1^{n-1} = 2\cos\alpha q^{n-2} - q^{n-3}$

$$q^2 - 2\cos\alpha q + 1 = 0$$

得 q_1,q_2 **是此方程的两个根**:$q_{1,2} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$.

因此

本题又得到一种递推关系:一般说如果一个数列$\{a_n\}$,**有** $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$($\alpha$,$\beta$ **是已知常数),则可令** $a_n = Aq^{n-1}$,**代入可得关于** q **的二次方程,解得**:$a_n = Aq_1^{n-1} + Bq_2^{n-1}$.**令** $n=1$,2,**可定出** A、B,**从**

$$\Delta_n = a_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n-1} + a_2(\cos\alpha - i\sin\alpha)^{n-1}.$$

而 $$\Delta_n = a_1 + a_2 = \cos\alpha.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = 2\cos\alpha = (a_1 + a_2)\cos\alpha + i(a_1 - a_2)\sin\alpha$$

由 $a_1 + a_2 = \cos\alpha$ 得 $a_1 - a_2 = i\sin\alpha$

故 $$a_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)/2 \quad a_2 = (\cos\alpha - i\sin\alpha)/2$$

于是

$$\begin{aligned}\Delta_n &= [(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n]/2 \\ &= \cos n\alpha\ .\end{aligned}$$

而得到 a_n 的表达式.

2. 用数学归纳法:$\Delta_1 = \cos\alpha$,$\Delta_2 = \cos 2\alpha$. 设 $\Delta_{k-1} = \cos(k-1)\alpha$,$\Delta_{k-2} = \cos(k-2)\alpha$ 则

$$\begin{aligned}\Delta_k &= 2\cos\alpha\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2} \\ &= 2\cos\alpha\cos(k-1)\alpha - \cos(k-2)\alpha \\ &= 2\cos\alpha\cos(k-1)\alpha - [\cos(k-1)\alpha\cos\alpha + \sin(k-1)\alpha\sin\alpha] \\ &= \cos\alpha\cos(k-1)\alpha - \sin(k-1)\alpha\sin\alpha = \cos k\alpha.\end{aligned}$$

故 $\Delta_n = \cos n\alpha$ 对任意正整数成立.

用数学归纳法要先看 Δ_1,Δ_2,Δ_3,然后归纳出 Δ_n 的表达式,再加以证明.

1.2.2 矩阵

1-28 若

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

计算 $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$.

解 $$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

三阶矩阵的乘法应很熟悉,本题的另一意图是说明一般 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$.

1-29 计算

$$\boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^n$$

解 $A_2=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{E}$

这样 $A_3=4A_1$，$A_4=2^4\boldsymbol{E}$，…

$$A_n=\begin{cases}2^n\boldsymbol{E}\text{，当 } n=2k\\2^nA_1\text{，当 } n=2k+1\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots)$$

1-30 求 $A_n=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}^n$

解 $A_2=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}$，$A_3=\begin{bmatrix}\lambda^3&3\lambda^2&(1+2)\lambda\\0&\lambda^3&3\lambda^2\\0&0&\lambda^3\end{bmatrix}$

由归纳法知：$A_n=\begin{bmatrix}\lambda^n&n\lambda^{n-1}&\dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0&\lambda^n&n\lambda^{n-1}\\0&0&\lambda^n\end{bmatrix}$

请读者自己完成归纳法的证明.

1-31 设 $f(x)=x^2-2x-3$，而 $A=\begin{bmatrix}2&-1\\1&-1\end{bmatrix}$ 求 $f(A)$.

解 1 $A^2=\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}$ $\quad 2A=\begin{bmatrix}4&-2\\2&-2\end{bmatrix}$

$$f(A)=\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&-2\\2&-2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

解 2

$$f(x)=(x-3)(x+1)$$

故

$$f(A)=\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&1\\-1&-1\end{bmatrix}$$

解 1 是直接计算每一项后再作加、减法；

解 2 是分解因式，先算加、减法，最后算一个乘法，而且知，$(A-3E)$ 与 $(A+E)$ 相乘是可交换的.

1-32 求一切与 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{bmatrix}$ 可交换的矩阵.

解 1（直接算） 设与 A 可交换的矩阵为 $B=(b_{ij})$，于是：

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}$$

直接用计算的方法来求与 A 可交换的矩阵 B 是很麻烦，但作为练习，却可以训练矩阵乘法的基本功；后面求 b_{ij} 之间的关系实际上是求线性方