普通高等教育‘十五’国家级规划教材

线性代数与空间解析几何

(第二版)

电子科技大学应用数学学院
黄廷祝　成孝予

高等教育出版社

郑 重 声 明

策　　划　李艳馥

编　　辑　文小西

封面设计　于文燕

责任绘图　郝　林

版式设计　张　岚

责任校对　朱惠芳

责任印制

内容提要

本书是在第一版的基础上修改而成的。全书共八章，主要内容为矩阵及其初等变换，行列式，几何空间，n 维向量空间，特征值与特征向量，二次型与二次曲面，线性空间与线性变换。本书对线性代数与空间解析几何的传统内容进行了重新处理，特别注意代数与几何的结合，将初等变换作为贯穿全书的计算和重要的理论推导工具，精选了大量应用实例，便于在教学改革中使用。

本书可作为工科和其他非数学类专业本科生教材或教学参考书。

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市东城区沙滩后街 55 号
邮政编码　100009
传　　真　010 - 64014048

购书热线　010 - 64054588
免费咨询　800 - 810 - 0598
网　　址　http:∥www.hep.edu.cn
　　　　　http:∥www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
排　　版
印　　刷

开　　本　787×960　1/16
印　　张　18.75
字　　数　330 000

版　　次　　　年　月第　版
印　　次　　　年　月第　次印刷
定　　价　19.90 元

第一版前言

电子科技大学是国家工科数学课程教学基地建设单位，根据基地建设规划的要求，已出版了多部教材，

是在该教材的基础上，根据 21 世纪科技人才素质的要求，吸取国内外改革教材的长处修改而成的，具有以下特点:

一、重视代数与几何的结合

本书将线性代数与空间解析几何的内容结合在一起，用代数方法解决几何问题，为代数理论提供几何背景。在讲几何空间向量的运算规则时，有意识地将它们按线性空间的八条公理形式表述，为线性空间的定义奠定几何基础。在介绍 n 维向量的线性相关性定义与性质时，特意介绍三维空间中的几何背景。在特征值与特征向量概念之后介绍相应的几何意义。用正交变换的方法处理二次曲面方程化简的问题。对线性空间的概念及基变换与坐标变换的问题都从几何意义上作出了相应的解释。对代数与几何的有机结合进行了大胆而有益的尝试。

二、将初等变换作为贯穿全书的计算工具

线性代数中解线性方程组、求矩阵的秩与逆、确定向量组的最大无关组与秩、矩阵的特征值与特征向量的计算、行列式的性质

与矩阵的初等变换有着密切关系，因此本书将初等变换作为贯穿全书的一个基本计算工具。在第一章就尽早引出矩阵的行初等变换，利用行初等变换将矩阵化为行阶梯形矩阵与行简化阶梯形矩阵，然后研究初等变换的有关性质，使学生在计算过程中尽可能地使用初等变换。使用同一种计算手段解决不同类型的问题，更有利于计算过程与计算格式的程序化。在理论推导中多次使用矩阵的初等变换使推导过程更容易理解，同时使理论推导与计算方法的介绍更加紧密且自然地结合在一起。

三、精选应用实例，安排数学实验

工科学生在学习数学课程之后应该了解数学的应用，学会用数学思维与方法分析和解决实际问题。本书对重要概念都尽可能地介绍应用背景，重要结果都尽可能地举出应用实例。应用范围涉及经济、社会、生物、医学等学科领域，许多典型应用与数学建模结合起来。在某些应用性较强的章节后除编写了应用实例外，还安排了数学实验，培养学生建立数学模型，利用数学软件解决实际问题的意识与能力。

四、内容结构合理，可读性强，便于教学

本书既考虑到教学改革的发展与需要，又充分考虑到教学的实际情况与可

第二版前言

本书自 2000 年出版以来，我们采用它作为教材，已经历了三年的教学实践。根据我们在教学过程中的体会和使用本教材的同行们所提出的宝贵意见，此次所作的调整和修改主要有以下几个方面:

一、考虑到国内部分高校已将“数学实验”列为一门单独的课程开设，故在此次修改时，原书中关于“数学实验”的内容没有再编入本书。

二、为便于教学实施和读者阅读的方便，将原书中关于应用的内容集中在第八章，同时增加了一些应用实例，以便读者在学习本门课程之后，对本课程理论与方法的应用有初步的了解，并增强应用意识，提高应用能力。

三、对几何空间中“内积”的定义方式进行了调整，以使其与“外积”的定义方式协调一致。

四、在“线性空间与线性变换”一章中增加了“欧氏空间”一节，以期使读者对抽象的“空间”概念有更全面的了解。

此外，在例题和习题的选配上，也作了一些修改和调整。

借本书再版的机会，向对本书给予了大力支持和关心的清华大学谭泽光教授、西安交通大学徐成贤教授、北京理工大学史荣昌教授、电子科技大学李正良教授、谢云荪教授、钟守铭教授，成都信息工程学院张志让教授，以及对本书提出宝贵意见的同行们表示衷心的感谢，并对高等教育出版社理工分社对本书的关心和扶持致以诚挚谢意。

编　者

2003 年 1 月

能，将传统与现代，理论与应用进行了较好的结合。

本书在克拉默法则、矩阵可逆的等价条件、矩阵乘积的行列式等的证明中，采用了简便的处理方法。注意强调重要理论的内在联系，多次使用一系列等价命题的方式给出重要定理。将线性空间作为代数系统 $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{P}$, + , ·)

义。将几何空间，n 维向量空间到线性空间的概念从特殊到一般作了较好的铺垫。

本书的编者是：黄廷祝

章)

书进行了全面的修改，并提供了部分应用实例与数学实验题目。本书由李正良教授、张志让教授、钟守铭教授主审，他们认真地审阅了全书，并提出了重要的修改意见。谨向他们表示衷心的感谢。刘金水副教授仔细地校阅了全书，电子科技大学应用数学系的教师们也对本书提出了许多修改意见，在此一并致谢。

编写具有改革新意的线性代数与空间解析几何教材，缺乏经验，限于水平，疏漏之处，恳请同行专家及读者提出宝贵的意见。

编　者

2000 年 1 月

目　录

第一章　矩阵及其初等变换

在自然科学和工程技术中有大量的问题与矩阵这一数学概念有关，并且这些问题的研究常常反映为对矩阵的研究．甚至有些性质完全不同的，表面上完全没有联系的问题，归结成矩阵问题以后却是相同的．这就使矩阵成为数学中一个极其重要的应用广泛的工具，因而也就成为代数，特别是线性代数的一个主要研究对象，尤其是随着计算机的广泛应用，矩阵知识已成为现代科技人员必备的数学基础．

本章主要介绍矩阵的运算、解线性方程组的高斯消元法与矩阵的初等变换、逆矩阵和分块矩阵．

§1.1　矩阵及其运算

一、矩阵的概念

在物资调运中，某类物资有 3 个产地、5 个销地，它的调运方案可在表 1.1 中反映．

表　1.1　　　　单位：t

调运数 / 销地 / 产地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
Ⅰ	0	3	4	7	5
Ⅱ	8	2	3	0	2
Ⅲ	5	4	0	6	6

如果我们用 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4,5)$　　i 个产地运往第 j 个销地的运量　$a_{12}=3$，$a_{24}=0$，$a_{35}=6)$　　3 行 5 列的数表

$$\begin{matrix} 0 & 3 & 4 & 7 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{matrix}.$$

用这种数表来表达某种状态或数量关系，在自然科学、技术科学以及实际生活中也是常见的．这种数表我们称为矩阵．

定义 1　由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵，简称为 $m \times n$ 矩阵，其中 a_{ij}表示第 i 行第 j 列处的元，i 称为 a_{ij}的行指标，j 称为 a_{ij}的列指标．

通常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\cdots$或者(a_{ij})　$b_{ij})$　$\cdots$表示矩阵．若需指明矩阵的行数和列数，常写为 $\boldsymbol{A}_{m \times n}$或 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$．

例如

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

为一个 2×3 矩阵．

n 元线性方程组

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

的系数可以组成一个 m 行 n 列矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix},$$

称为方程组的系数矩阵；而系数及常数项可以组成一个 m 行$n+1$列矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix},$$

称为方程组的增广矩阵．我们将利用矩阵这一工具来研究线性方程组．

完全为零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$．如

$$\boldsymbol{O}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{O}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当 $m=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵（或 n 阶方阵）．

只有 1 行 $(1\times n)$　1 列 $(m\times 1)$

$$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})\qquad \begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\cdots\\a_{m1}\end{pmatrix}$$

分别称为行矩阵和列矩阵．

若方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的元 $a_{ij}=0\ (i\neq j)$　$\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，$a_{ii}\ (i=1,2,\cdots,n)$　$\boldsymbol{A}$ 的对角元，记作 $\boldsymbol{A}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$．如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&5\end{pmatrix}=\operatorname{diag}(-1,5)$$

为二阶对角矩阵．

对角元全为数 1 的对角矩阵称为单位矩阵，n 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{I}_n$，在不致混淆时也记为 $\boldsymbol{I}$，即

$$\boldsymbol{I}=\operatorname{diag}(1,1,\cdots,1)=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix}.$$

形如

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

的矩阵分别称为上三角形矩阵和下三角形矩阵．

二、矩阵的线性运算

矩阵是线性代数的基本运算对象之一，为了讨论矩阵的运算，我们首先给

出矩阵相等的概念.

如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，就称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵.

两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$

即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

就称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & x & -1\\ 3 & 4 & y\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}z & 3 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix},$$

如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则立即得

$$x=3,\qquad y=2,\qquad z=0.$$

现在我们介绍矩阵的加法运算及矩阵与数的乘积.

设有两种物资(单位: t)

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}30 & 25 & 17 & 0\\ 20 & 0 & 14 & 23\\ 0 & 20 & 20 & 30\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}10 & 15 & 13 & 30\\ 0 & 40 & 16 & 17\\ 50 & 10 & 0 & 10\end{pmatrix},$$

那么，从各产地运往各销地两种物资的总运量是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}40 & 40 & 30 & 30\\ 20 & 40 & 30 & 40\\ 50 & 30 & 20 & 40\end{pmatrix}.$$

定义 2 (矩阵的加法) 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\quad 与\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$$

是两个 $m\times n$ 矩阵，将它们的对应元相加，得到一个新的 $m\times n$ 矩阵

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

值得注意的是，只有同型矩阵才能相加，且同型矩阵之和仍为同型矩阵．如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不能相加．

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$

$$\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$．显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}.$$

利用矩阵的加法与负矩阵的概念，我们可以定义两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差，即矩阵的减法：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}),$$

就是把 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元相减．

显然，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 与 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 等价．

下面介绍矩阵与数的乘积．

设从某三个地区分别到另两个地区的距离(单位：km) 3×2 的矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 90 & 60 \\ 120 & 70 \\ 80 & 55 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \\ \begin{array}{cc} \text{甲} & \text{乙} \end{array} \end{array}.$$

已知货物每吨公里的运费为 2 元，那么，各地区之间每吨货物的运费只要将

$\boldsymbol{A}$ 中每一元都乘以 2，即得

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 180 & 120 \\ 240 & 140 \\ 160 & 110 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \\ \begin{array}{cc} 甲 & 乙 \end{array} & \end{array}.$$

矩阵与数的乘积的定义如下．

定义 3（矩阵的数乘）　设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，k 是一个数，则称矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 k 的乘积（简称矩阵的数乘）．记为 $k\boldsymbol{A}$．

也就是说，用数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就是将 $\boldsymbol{A}$ 中的每一元都乘以 k．

矩阵的加法与数乘统称为矩阵的线性运算．

容易证明，设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵，k，l 为数，那么矩阵的线性运算满足下列八条性质：

1°　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$；

2°　$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$；

3°　$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{O} = \boldsymbol{A}$；

4°　$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$；

5°　$1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$；

6°　$k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A}$；

7°　$k(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$；

8°　$(k + l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$．

例 1　设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 5 & 1 & 9 \end{pmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$．

解　由 $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ 得

$$\boldsymbol{X} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7-3 & 5-(-1) & -4-2 \\ 5-1 & 1-5 & 9-7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

三、矩阵的乘法

设甲、乙两家公司生产Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三种型号的计算机，月产量

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \text{Ⅰ} & \text{Ⅱ} & \text{Ⅲ} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 25 & 20 & 18 \\ 24 & 16 & 27 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \end{array} \end{array}.$$

如果生产这三种型号的计算机每台的利润

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.7 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \text{Ⅰ} \\ \text{Ⅱ} \\ \text{Ⅲ} \end{array},$$

则这两家公司的月利润

$$\begin{pmatrix} 25\times 0.5+20\times 0.2+18\times 0.7 \\ 24\times 0.5+16\times 0.2+27\times 0.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29.1 \\ 34.1 \end{pmatrix}\begin{array}{c} \text{甲} \\ \text{乙} \end{array}.$$

可见，甲公司每月的利润为 29.1 万元，乙公司的利润为 34.1 万元.

矩阵的乘法的定义如下：

定义 4　设 $m\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$p\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$，则由元

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

构成的 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

由定义可知：

(1) $\boldsymbol{A}$ 的列数必须等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘；

(2) 乘积 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于 $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{C}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的列数；

(3) 乘积 $\boldsymbol{C}$ 中第 i 行第 j 列元 c_{ij} 等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元对应乘