线性代数简明教程

伊 良 忠　主编

西 南 交 通 大 学 出 版 社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数简明教程 / 伊良忠主编. —成都：西南交通大学出版社，2002.12
ISBN 7－81057－689－5

Ⅰ. 线…　Ⅱ. 伊…　Ⅲ. 线性代数－高等学校－教材　Ⅳ. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 078551 号

线性代数简明教程

伊良忠　主编

*

出 版 人　宋绍南
责任编辑　刘娉婷
封面设计　肖　勤
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行科电话：87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
E-mail: cbsxx@swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

开本：850mm×1168mm　1/32　印张：6.5625
字数：163 千字　印数：1—3000 册
2002 年 12 月第 1 版　2002 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 7-81057-689-5/O・043
定价：10.00 元

内容提要

本书是根据高等教育大众化的趋势及学生的实际和经济、管理类本科数学教学基本要求编写的系列教材之一。

本书共分六章。主要内容包括行列式、矩阵、向量组的线性相关与线性无关、线性方程组、向量空间、矩阵的特征值与特征向量、二次型。本书内容丰富、逻辑清晰、梯度适当、通俗易懂、可读性强。

本书可作为经济、管理类本科各专业及非数学类专科学生教材，也可以作为其他专业的学生学习数学课程时参考。

前　　言

这是我们为经济类本科各专业学生所编写的数学教材之一，它也适合专科和职业学院各专业作为线性代数教材。

本书面对高等教育大众化的趋势，针对一般普通高等院校本、专科学生的实际水平，按照线性代数的基本要求，在保持数学本身系统性和逻辑性的前提下，选材简明扼要，突出重点，注意加强应用，适当淡化技巧，讲述力求清晰，便于学生使用。

书中每节之后安排有紧扣所述内容的习题，习题安排由浅入深，难度适中，未选入过难过繁的问题。书后给出了全部习题的答案，有的题目还给出了提示，以利学生解答后对照。

本书由伊良忠副教授任主编并统稿，执笔编写的有秦昌明（第一章），伊良忠（第二章、第三章），朱雯（第四章），胡劲松（第五章、第六章）。由张文忠教授主审。

本书的编者都是长期在高校数学教学第一线工作的老师，既有教学经验丰富、曾获四川省普通高校首届优秀教学成果奖的秦昌明教授，又有多次受到学院表彰、深受学生推崇的中青年教学骨干。在本教材的编写中，充分融入了他们的教学心得与体会，愿它对同学们学好线性代数能起到有益的作用。

本书的编写得到了四川工业学院领导和教务处的大力支持，在此特致谢意！

限于编者的水平，书中难免有不当之处，希望读者批评指正。

四川工业学院数学教研室

2002 年 10 月

目　　录

第一章　行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，在线性方程组、矩阵、二次型中都需要用到行列式，所以我们在第一章就先来介绍行列式.

第一节　n 阶行列式的定义

一、n 元排列的定义及其逆序

为了引进 n 阶行列式的概念，需要用到关于排列的一些知识.

定义 1　由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个不重复的有序数组称为一个 n 元排列.

由中学数学知识我们知道，n 元排列一共有 $n!$ 个. 例如 5 元排列共有 $5!=120$ 种不同的排列，其中排列 12345 是 5 元排列中比较特殊的一个排列，它的各个数是按照由小到大的自然顺序排列的，我们称它为 5 元自然序排列或标准排列.

31452 也是一个 5 元排列，但在这个排列中，3 比 1 大，而 3 排在 1 的前面，它们跟自然顺序（由小到大）相反，这时称 3 和 1 这对数构成一个逆序. 在这个排列中，构成逆序数的数对还有 32，42 和 52，因此排列 31452 共有 4 个逆序，称这个排列的逆序数是 4.

定义 2　在一个排列中，一对数如果较大的数排在较小的数之前，就称这对数构成一个逆序. 一个排列包含的逆序的总数，称

为这个排列的逆序数,常用记号 τ 来表示. 例如排列 31452 的逆序数是 4,就记作 $\tau(31452)=4$.

例 1 求 5 元排列35412 的逆序数.

解 在排列 35412 中,

3 排在首位,前面没有比它大的数,逆序数为 0;

5 的前面没有比 5 大的数,故逆序数也为 0;

4 的前面有一个数(5)比 4 大,故逆序数为 1;

1 的前面比 1 大的数有 3 个(3,5,4),故逆序数为3;

2 的前面也有 3 个数(3,5,4)比 2 大,其逆序数也为 3;

于是排列的逆序数为

$$\tau(35412)=0+0+1+3+3=7.$$

例 2 求 n 元排列 $123\cdots n$ 和 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解 n 元排列 $123\cdots n$ 是按自然顺序排列的,其中任一对数都不构成逆序,因此

$$\tau(123\cdots n)=0+0+\cdots+0=0.$$

而 n 元排列 $n(n-1)\cdots 321$ 恰好与自然顺序排列相反,因而有

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

一个排列的逆序数在一定程序上刻画了这个排列的性质.

定义 3 逆序数是偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如 $\tau(31452)=4$,因此排列 31452 是偶排列;又如 $\tau(35412)=7$,因此排列 35412 为奇排列;$\tau(12345)=0$,因而标准排列12345 也是偶排列.

定义 4 把一个排列的某两个数互换位置,而其余数不动,就得到另一个排列,这样一种变换称为对换.

排列 31452 经过 1 和 5 对换,变成排列 35412,而排列 31452 是偶排列,经过上述对换后的排列 35412 却是奇排列,反之亦然.

一般地，我们有定理 1 的结论.

定理 1　对换改变排列的奇偶性.

证明略.

这就是说，偶排列经过一次对换变成奇排列，而奇排列经过一次对换变成偶排列. 很明显，偶数次对换不改变排列的奇偶性，而奇数次对换一定会改变排列的奇偶性.

利用上述结论可以证明下面一个重要定理.

定理 2　在全部 n 元排列中，奇偶排列各占一半，都是 $\frac{1}{2}n!$ 个($n\geqslant 2$).

证　设 n 元偶排列共有 p 个，n 元奇排列共有 q 个，将每个 n 元排列都对换 1 与 2，则每个偶排列都变成了奇排列. 显然，不同的 n 元偶排列经这种对换以后变成了不同的 n 元奇排列. 由于偶排列共有 p 个，于是这样就得到 p 个不同的 n 元奇排列，又由于 n 元奇排列总共才 q 个，所以有

$$p\leqslant q.$$

同理可证

$$q\leqslant p;$$

因此有

$$p=q=\frac{1}{2}n!.$$

二、三阶行列式的定义

1. 二、三阶行列式的定义

形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

的行列式分别称为二阶行列式和三阶行列式. 式中 a_{ij}称为第 i 行第 j 列的元素，i 称为行标，j 称为列标. 二阶行列式是 2^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2)$排成的 2 行 2 列，且两边各加一条竖线而构成的记号；三阶行列式是 3^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$排列成的 3 行 3 列两

边各加一条竖线而构成的记号.

二阶行列式表示两项的代数和,它的取值规则为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

可用图 1—1 的对角线法则记忆,其中实线联结的两个元素的乘积取正号,虚线联结的两个元素的乘积取负号. $a_{11}a_{22}$ 所在的对角线叫主对角线.

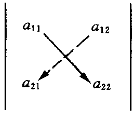

图 1—1

三阶行列式表示 6 项的代数和,其取值规则为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

也可用图 1—2 的对角线法则记忆,其中实线联结的 3 个元素的乘积取正号,虚线联结的 3 个元素的乘积取负号. 而 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 所在的对角线称为主对角线.

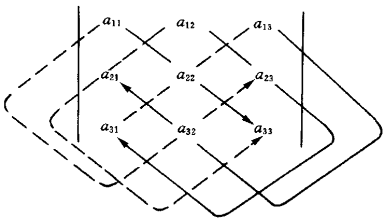

图 1—2

2. 三阶行列式定义的分析

(1) 三阶行列式一共是 3! 项的代数和.

注意到三阶行列式中每项都是 3 个元素的乘积,如果不看前面的符号,结构均为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}. \tag{1.1}$$

其中行标按自然顺序(123)排列,而列标的排列$(j_1j_2j_3)$是 1,2,3 这三个自然数的某一个三元排列,而这三元排列共有 3! 种排法,所以三阶行列式共有 3! 项.

(2) 每项都是 3 个不同元素的乘积,而每个元素都处在不同的行和不同的列中.

例如 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 是三阶行列式的一项,但 $a_{12}a_{22}a_{31}$ 却不是三阶行列式的一项. 虽然表面上看起来是 3 个不同的元素的乘积,但不满足每个元素都要处在不同的行和不同的列中这个条件,例如 a_{12},a_{22} 这两个元素就同处在第 2 列中,而第 3 列却没有元素.

(3) 每项前都冠以一定的正负号,且正项和负项各占 3! 项的一半.

先观察冠以正号的项. 我们看到在行标按自然顺序排列的情况下(此时行标的逆序数 $\tau(123)=0$),列标排列的逆序数都是偶数:

$$\tau(123)=0,\quad \tau(231)=2,\quad \tau(312)=2,$$

即列标的排列为偶排列,且占 3 元排列 3! 个的一半.

再观察冠以负号的项. 在行标仍按自然顺序排列的情况下,列标排列的逆序数都是奇数:

$$\tau(321)=3,\quad \tau(213)=1,\quad \tau(132)=1,$$

即列标的排列为奇排列,也占 3 元排列 3! 个的一半.

设$(j_1j_2j_3)$是列标(123)的一个 3 元排列,在行标按自然顺序排列的情况下,三阶行列式的每一项式(1.1)前都冠以符号$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$,即列标为偶排列冠以正号,列标为奇排列则冠以负号,因而三阶行列式的一般项为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}. \tag{1.2}$$

这样,三阶行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}. \tag{1.3}$$

这里$(j_1j_2j_3)$是列标的一个 3 元排列，$\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对所有 3 元排列求和.

它的取值规则可以用 3 句话来概括：

（i）三阶行列式是 3！项的代数和；

（ii）每项都是三个不同元素的乘积，每个元素都处在不同的行和不同的列中；

（iii）每项前都冠以一定的符号，在行标按自然顺序排列的情况下，其符号为$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

3．三阶行列式定义的再分析

在三阶行列式的一般项(1．2)式中，三个元素的行标都是按自然顺序排列的，此时 $\tau(123)=0$．因而前面冠以一定的符号实际上可以写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}=(-1)^{\tau(123)+\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

例如，
$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}\\=&(-1)^{\tau(123)+\tau(231)}a_{12}a_{23}a_{31}=+a_{12}a_{23}a_{31}.\end{aligned}$$

由于乘法符合交换律，所以在行标与列标分别混排的情况下，仍然有

$$+a_{12}a_{23}a_{31}=+a_{23}a_{12}a_{31}=(-1)^{\tau(213)+\tau(321)}a_{23}a_{12}a_{31},$$

其中，$\tau(213)+\tau(321)=1+3=4$ 必然是偶数，这保证了该项前面仍冠以正号.

再例如
$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}\\=&(-1)^{\tau(123)+\tau(213)}a_{12}a_{21}a_{33}=-a_{12}a_{21}a_{33}\\=&-a_{21}a_{33}a_{12}=(-1)^{\tau(231)+\tau(132)}a_{21}a_{33}a_{12},\end{aligned}$$

其中，$\tau(231)+\tau(132)=2+1=3$ 必然是奇数，保证了该项前面仍冠以负号.

这是因为在一般项(1．2)式中，两个元素交换位置后，原来行标的排列和列标的排列的奇偶性同时发生了变化（对换改变排列的奇偶性），因而两个排列逆序数的和，其奇偶性并未发生变化，想

必读者是能理解的.

如果行标的任一个3元排列记为$(i_1i_2i_3)$,则它的逆序为$\tau(i_1i_2i_3)$,因而三阶行列式的定义又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1i_2i_3)+\tau(j_1j_2j_3)} a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}a_{i_3j_3}. \quad (1.4)$$

式中,$\sum$仍表示对3元排列求和,$(i_1i_2i_3)$和$(j_1j_2j_3)$分别表示行标和列标的任一个3元排列. 这里希望读者注意,$(i_1i_2i_3)$和$(j_1j_2j_3)$的写法虽然是对称的,但它们各自表示的一个3元排列是可以完全不同的.

特别地,若列标的排列$(j_1j_2j_3)$是自然顺序排列(123)时,由于$\tau(j_1j_2j_3)=\tau(123)=0$,所以三阶行列式又可定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1i_2i_3)} (-1)^{\tau(i_1i_2i_3)} a_{i_11}a_{i_22}a_{i_33} \quad (1.5)$$

式中,$\sum\limits_{(i_1i_2i_3)}$表示对行标的所有3元排列求和.

三、n 阶行列式的定义

1. n 阶行列式的定义

在我们深入讨论过三阶行列式的定义后,就可以将三阶行列式的定义平行地推广到n阶行列式上来.

定义 5 由n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成n行n列,两边各加上一条竖直线段,构成记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 其取值规则为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1 j_2 \cdots j_n)} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \quad (1.6)$$

可用三句话概括如下:

(1) n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和.

(2) 每项是 n 个不同元素的乘积,每个元素都处在不同的行和不同的列中.

(3) 每项都冠以一定的符号,在行标按自然顺序排列时,其符号为 $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$.

其中

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1.7)$$

称为 n 阶行列式的一般项. $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$所在的对角线称为主对角线. n 阶行列式常简记为 D 或 $|a_{ij}|$.

按此定义的二阶与三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式显然是一致的. 当$n=1$ 时,由一个元素组成的行列式 $|a|$ 规定为 a,即 $|a|=a$,注意不要与绝对值记号混淆.

我们要特别提醒读者,当 $n \geqslant 4$ 时,即四阶及其以上的行列式,对角线法则是不适用的,例如四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

按行列式定义,它共有 $4!$ 项(24 项),而按对角线法则,它只有 8 项,例如项

$$(-1)^{\tau(3241)} a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} = a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$$

是 D 的一项. 又例如项

$$(-1)^{\tau(3421)} a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} = -a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$$

也是 D 的一项,虽然它们都不满足对角线法则.

例 3 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}.$$

像这种主对角线下方全为零的行列式称为上三角形行列式.

解 据定义

$$D=\sum_{(j_1j_2j_3j_4)}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

这个行列式有不少元素是 0,从而有很多项都为零,因此只要把不为零的项找出来相加就可以了.

我们从零最多的第 4 行开始考虑,要使行列式的项不为零,则每项中的每个元素均应是非零元素,所以第 4 行中的元素 a_{4j_4} 只能取 a_{44}. 而第 3 行有两个非零元素 a_{33} 和 a_{34},而 a_{34} 在第 4 列,与 a_{44}同在一列,不能再取,所以 a_{3j_3} 只能取 a_{33}. 同理,第 2 行的元素 a_{2j_2} 与第 1 行的元素 a_{1j_1},也只能分别取 a_{22} 和 a_{11},而注意到此时列标的排列为(1234)是偶排列,因而这项前面应冠以正号,也即

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}a_{34}.$$

将上述结论推广到 n 阶上三角形行列式,仍有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

由此看出,上三角形行列式是很容易计算的,因此在计算行列式特别是高阶行列式时,常常把它化成上三角形行列式.

主对角线以外的元素全为零的行列式称为对角形行列式,显

然它也是上三角形行列式，因而也有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 4 设有一个五阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

问含有元素 $a_{22}a_{35}$ 的项共有多少项，并写出其中冠以正号和负号的各一项来.

解 含有 $a_{22}a_{35}$ 的各项，其一般式的结构为

$$(-1)^{\tau(j_1 25 j_3 j_4)} a_{1j_1}a_{22}a_{35}a_{4j_4}a_{5j_5},$$

其中列标的 5 元排列（$j_1 25 j_4 j_5$）中，从左至右第 2 位和第 3 位固定为数 2 和数 5，因此第 1，4，5 位只能是数 1，3，4 的三元排列，这种排列共有 3！种，所以含有 $a_{22}a_{35}$ 的各项共有 6 项.

另外，只须注意到冠以正号的项和冠以负号的项其列标的一个排列（$j_1 25 j_4 j_5$）分别为偶排列和奇排列即可. 例如一个冠以正号的项为 $a_{11}a_{22}a_{35}a_{43}a_{54}$. 再将列标 1 和 3 对换，即可得到它的一个冠以负号的项，$-a_{13}a_{22}a_{35}a_{41}a_{54}$.

类似于三阶行列式的（1.4）式和（1.5）式，可得到 n 阶行列式的另外两个等价定义.

定义 6 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}. \tag{1.8}$$

这里$\sum$仍是对 n 元排列求和，$(i_1 i_2 \cdots i_n)$和$(j_1 j_2 \cdots j_n)$分别是行标和列标的任一个 n 元排列. 同样需注意的是，在(1.8)式中$(i_1 i_2 \cdots i_n)$和$(j_1 j_2 \cdots j_n)$的写法虽然具有对称性，但它们各自的 n 元排列却可以完全不同.

当列标的排列$(j_1 j_2 \cdots j_n)$都按自然顺序排列时，因为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n) = \tau(12 \cdots n) = 0$，因而 n 阶行列式的定义又可写为定义 7.

定义 7 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(i_1 i_2 \cdots i_n)} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{1.9}$$

这里 $\sum\limits_{(i_1 i_2 \cdots i_n)}$ 是对行标的 n 元排列求和.

n 阶行列式上述 3 个定义都是等价的.

2. **转置行列式**

定义 8 将行列式 D 的同号数的行换为同号数的列所得到的行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T} 或 D'. 即

若
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则
$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$