线性代数简明教程

居余马　林翠琴　胡金德
王飞燕　邢文训　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书为高等院校教材. 全书共 6 章,内容包括: 行列式;矩阵;线性方程组;向量空间与线性变换;特征值和特征向量　相似矩阵;二次型. 一般每章安排两个层次的习题,并在书后按章汇编了历年硕士研究生入学考试中的线性代数试题.

本书层次清晰,阐述深入浅出,简明扼要. 可作为高等院校的教材(适用于 30～45 学时的教学计划)或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数简明教程/居余马,林翠琴主编. —北京: 清华大学出版社,2004
ISBN 7-302-08393-2

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①居… ②林…　Ⅲ. 线性代数-高等学校-教材
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 026643 号

出 版 者: 清华大学出版社　　地　　址: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　　编: 100084
社 总 机: 010-62770175　　客户服务: 010-62776969
责任编辑: 刘　颖
封面设计: 常雪影
版式设计:
印 刷 者:
装 订 者:
发 行 者: 新华书店总店北京发行所
开　　本: 140×203　印张: 7.625　字数: 190 千字
版　　次: 2004 年 6 月第 1 版　2004 年 6 月第 1 次印刷
书　　号: ISBN 7-302-08393-2/O·354
印　　数: 1～5000
定　　价: 　元

前　言

本书是根据国家教委审定的高等工业学校“线性代数课程教学基本要求”,以及我们在清华大学讲授线性代数的实际体会而编写的.本书对历年来硕士研究生入学考试中“线性代数”试题所反映的课程重点给予了足够的重视.

本书适用于教学要求不同的院校和专业(包括非工科专业).本书的基本内容(不打“ * ”节中的小字部分以及打“ * ”的节和习题除外)适用于 30～35 课时(建议课时:行列式、矩阵、向量的线性相关性及线性方程组共用 20～23 课时;$\mathbb{R}^n$ 的基与向量的坐标、向量的内积、特征值与特征向量及二次型共用 10～12 课时).如果把全书的内容都作为教学要求,大约需要 42～45 课时.

我们编著的《线性代数学习指南》(清华大学出版社出版)可作为本书配套的辅导教材.

线性代数是一门基础数学课程,它的基本概念、理论和方法,具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性;它的核心内容是研究有限维线性空间(也称向量空间)的结构和线性空间的线性变换.由于数域 F 上的 n 维线性空间 $V(F)$ 与 n 维向量空间 F^n 是同构的,以及给定了 n 维线性空间 $V(F)$ 的一组基后,$V(F)$ 的线性变换与数域 F 上的 n 阶矩阵一一对应,因此,在 30 多学时的情况下,教学的基本要求是:熟练掌握 n 维向量的线性运算,理解线性相关性的理论,搞清 $\mathbb{R}^n$ 的基、向量在基下的坐标、向量的内积运算及向量的长度与夹角等概念;熟练掌握矩阵的基本运算、线性方程组的解的理论和求解方法;掌握矩阵的特征值和特征向量、矩阵的对

角化及二次型的标准形和正定二次型的基本概念和理论.在上述教学内容中,要注重基本概念和理论,着重培养熟练的运算能力,适当地训练逻辑思维和推理能力.

关于教材内容,本书作了以下一些处理:

1.关于行列式.采用简便的递归法来定义 n 阶行列式,并相应地证明它的性质.这比用逆序法定义更容易掌握,而且可节省一些学时.

2.关于矩阵.从高斯消元法入手,引进矩阵和初等变换的概念.对于矩阵的运算,除了要熟练掌握加法、数乘、乘法、求逆及转置等基本运算,还要加强初等变换和适当地掌握分块矩阵运算,它们不仅是矩阵运算的重要方法和技巧,而且在理论分析中也有重要意义.

3.关于线性方程组.将方程组放在矩阵之后讲解,可以充分利用矩阵工具,使表述简明.向量的线性相关性的概念和矩阵的秩的概念是这一章的难点,以三维几何向量在线性运算下的关系作背景,抽象出 n 维向量的线性相关性的概念,便于初学者理解这个重要的概念.利用初等行变换不改变矩阵的行秩和列秩以及阶梯形矩阵的行秩等于列秩,来证明矩阵的列秩等于其行秩,这样容易为读者所理解.

4.关于向量空间.重点放在搞清 $\mathbb{R}^n$ 的基本结构,以三维几何向量为背景,一并提出 $\mathbb{R}^n$ 中的线性运算和内积运算,阐明 $\mathbb{R}^n$ 的基和向量在基下的坐标的概念以及向量的几何度量性.如果教学学时允许的话,在 $\mathbb{R}^n$ 的基础上再简要地讲授一般线性空间的概念和理论.至于一般的欧氏空间和内积空间的概念,不可能再列入教学要求.

5.关于线性变换.以一元线性函数为背景,抽象出 n 维向量空间的线性变换的概念,进而讲述了线性变换的矩阵表示和线性变换的象(值域)与核的概念.

6．关于特征值和特征向量，书中只讲矩阵的特征值和特征向量的概念和计算，给了相似矩阵的概念，讨论了矩阵在相似意义下可对角化的条件，重点是实对称矩阵的对角化．

7．关于二次型．将其放在最后，目的是用已学过的知识，全面地讨论二次型化标准形的方法和正定二次型的判定．书中只要求掌握通过正交变换和配方法化二次型为标准形．

本书的例题和习题，除了必须熟练掌握的常规基本题，还充分关注了考研题的命题动向．全书的习题分为 3 个档次：①基本题；②打“＊”题和补充题(主要是一些证明题和比较灵活的题，后者是考研题常见的题型，有些就是考研题)；③与打“＊”节配套的习题(它们是第 4 章习题中的 10-13，15，17-21 题)．30 多课时的教学要求是第①档次的题．准备考研时，要掌握第②档次中的多数题及正文中的小号字部分．第③档次的题考研不要求．

在本书的附录中，按章汇编了历年硕士研究生入学考试中线性代数的试题，没有给出这些题的答案(个别题给了提示)，有需要的读者，可参阅我们编著的《线性代数学习指南》中考研试题的题解．

本书是在居余马(主编)与胡金德、林翠琴、王飞燕、邢文训合编的《线性代数》(第 2 版)的基础上，对书中基本内容进一步提炼、加工编写而成的．在此特致以深切的谢意．由于编著者水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者和使用本教材的教师批评指正．

编著者

2004 年 2 月于清华园

目　录

第 1 章　行列式 …… 1

1.1　n 阶行列式的定义及性质 …… 1

1.2　n 阶行列式的计算(展开) …… 12

1.3　克拉默法则 …… 23

附录 1　关于双重连加号“$\sum\sum$” …… 29

习题　补充题　答案 …… 31

第 2 章　矩阵 …… 38

2.1　高斯消元法 …… 38

2.2　矩阵的加法　数量乘法　乘法 …… 46

2.3　矩阵的转置　对称矩阵 …… 59

2.4　可逆矩阵的逆矩阵 …… 60

2.5　矩阵的初等变换和初等矩阵 …… 67

2.6　分块矩阵 …… 74

附录 2　数域　命题　量词 …… 82

习题　补充题　答案 …… 85

第 3 章　线性方程组 …… 96

3.1　n 维向量及其线性相关性 …… 96

3.2　向量组的秩及其极大线性无关组 …… 106

3.3　矩阵的秩　*相抵标准形 …… 109

3.4 齐次线性方程组有非零解的条件及解的结构 …… 118
3.5 非齐次线性方程组有解的条件及解的结构 ……… 124
习题 补充题 答案…………………………………… 132

第 4 章 向量空间与线性变换……………………………… 140
4.1 R^n 的基与向量关于基的坐标 …………………… 140
4.2 R^n 中向量的内积 标准正交基和正交矩阵 ……… 147
*4.3 线性空间的定义及简单性质 …………………… 155
*4.4 线性子空间 …………………………………… 157
*4.5 线性空间的基 维数 向量的坐标 ……………… 159
*4.6 向量空间的线性变换 ………………………… 161
习题 答案……………………………………………… 171

第 5 章 特征值和特征向量 相似矩阵………………………… 176
5.1 矩阵的特征值和特征向量 相似矩阵 …………… 176
5.2 矩阵可对角化的条件 ………………………… 183
5.3 实对称矩阵的对角化 ………………………… 189
习题 补充题 答案…………………………………… 194

第 6 章 二次型……………………………………………… 200
6.1 二次型的定义和矩阵表示 合同矩阵 …………… 201
6.2 化二次型为标准形 …………………………… 204
6.3 正定二次型和正定矩阵 ……………………… 211
习题 补充题 答案…………………………………… 215

附录 历年硕士研究生入学考试中线性代数试题汇编……… 220

第 1章

行　列　式

在线性代数中,行列式是一个基本工具,讨论很多问题时都要用到它 .本章先简单介绍二、三阶行列式的定义及按第一行的展开式,再进一步讨论 n阶行列式 .本章主要内容: n阶行列式的定义及其性质;行列式的计算;求解一类非齐次线性方程组的克拉默(Cramer)法则,以及由此得到的方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组有非零解的必要条件 .

1.1　n阶行列式的定义及性质

行列式的概念首先是在求解方程个数与未知量个数相同的一次方程组时提出来的(以后常把一次方程组称为线性方程组),例如对于以 x_1, x_2 为未知元的二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 . \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,用消元法求解,得其解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} . \tag{1.2}$$

人们从(1.2)式中发现,如果记

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc, \tag{1.3}$$

则(1.2)式可以表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

称(1.3)式中的 D 称为二阶行列式.

对于由 9 个数 $a_{ij}\ (i, j=1,2,3)$排成 3 行 3 列的式子,定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \tag{1.4}$$

并称它为三阶行列式(横为行,竖为列),$a_{ij}\ (i, j=1,2,3)$称为第 i 行第 j 列元素.

(1.4)式中的 6 项是按图 1.1 所示的方法(称为沙路法)得到的.

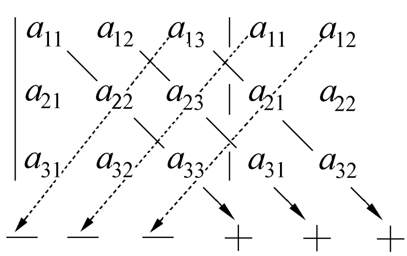

图 1.1

如果三元线性方程组

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

用消元法求解这个方程组,可得

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}. \tag{1.5}$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$是用常数项 b_1, b_2, b_3 分别替换 D 中的第 j 列的元素所得到的三阶行列式,即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

但是,对于 n阶行列式$(n>3)$,不能如图 1.1(沙路法)那样定义.因为如果像图 1.1 那样定义 n阶行列式,当 $n>3$ 时,它将与二、三阶行列式没有统一的运算性质,而且对 n元线性方程组也得不到像(1.5)式那样的求解公式.因此,对一般的 n阶行列式要用另外的方法来定义.在代数中,它可以用 3 种不同的方法做定义,我们采用最简明的递归法做定义.

从二、三阶行列式的展开式中,我们发现它们遵循着一个共同的规律——可以按第 1 行展开,即

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =&\ a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中

$$M_{11}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$$

分别称为元素 a_{11},a_{12},a_{13} **的余子式,并称** $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$, $A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}$, $A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$ **分别为** a_{11},a_{12},a_{13} **的代数余子式.如此,**(1.6)**式即为**

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

同样

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12},\tag{1.7}$$

其中

$$A_{11}=(-1)^{1+1}|a_{22}|=a_{22},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}|a_{21}|=-a_{21}.$$

这里$|a_{22}|,|a_{21}|$**表示一阶行列式(而不是数的绝对值).我们把** a **的一阶行列式**$|a|$**定义为** a.

如果把(1.6),(1.7)两式作为三阶、二阶行列式的定义,那么这种定义的方法是统一的,它们都是用低阶行列式定义高一阶的行列式.因此人们很自然地会想到,用这种递归的方法来定义一般的 n **阶行列式.对于这样定义的各阶行列式,将会有统一的运算性质.下面我们给出** n **阶行列式的递归法定义.**

1.1.1 n阶行列式的定义

定义 1.1 **由** n^2 **个数** $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$**组成的** n **阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\quad(\text{简记作 }|a_{ij}|_1^n)\tag{1.8}$$

是一个算式(a_{ij} **称为第** i **行第** j **列元素,** $i,j=1,2,\cdots,n$**).当** $n=1$ **时,定义** $D=|a_{11}|=a_{11}$;**当** $n\geq2$ **时,定义**

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \qquad (1.9)$$

其中

$$A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j},$$

而 M_{1j} 是 D 中去掉第 1 行第 j 列全部元素后,按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式,即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,j-1} & a_{2\,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3\,j-1} & a_{3\,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的余子式, A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式.

在(1.8)式中, $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 所在的对角线称为行列式的主对角线,相应地 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为主对角元,另一条对角线称为行列式的副对角线.

由定义可见,行列式这个算式是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 构成的 n 次齐次多项式(称作展开式),二阶行列式的展开式中共有 $2!$ 项;三阶行列式的展开式中共有 $3!$ 项;n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 项,其中每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积,在全部 $n!$ 项中,带正号的项和带负号的项各占一半(以上结论可根据定义,用数学归纳法给以证明).当第 1 行元素为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时, n 阶行列式是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐次多项式.

例 1 证明 n 阶下三角行列式(当 $i < j$ 时, $a_{ij} = 0$,即主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 对 n 作数学归纳法.当 $n = 2$ 时,结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立,则由定义得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式,根据归纳假设得

$$D_n = a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}).$$ ■

同理可证,n 阶对角行列式(非主对角线上的元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2　计算 n 阶行列式(副对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & * \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * & * \\ a_1 & * & \cdots & * & * \end{vmatrix},$$

其中,$a_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$,“ * ”表示元素为任意数.

解　注意,对一般的 n,这个行列式不等于 $-a_1a_2\cdots a_n$.

利用行列式定义,可得到

$$D_n = (-1)^{n+1} a_n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \iddots & \cdots \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ a_1 & * & \cdots & * \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_n D_{n-1},$$

再利用上面 n 阶与 $n-1$ 阶行列式之间的关系(通常称为递推关系或递推公式),递推可得

$$
\begin{aligned}
D_n &= (-1)^{n-1} a_n D_{n-1} = (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-2} a_{n-1} D_{n-2} \\
&\cdots \\
&= (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 \\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 .
\end{aligned}
$$

例如,当 $n=2,3$ 时,$D_2 = -a_1 a_2$, $D_3 = -a_1 a_2 a_3$;当 $n=4,5$ 时,$D_4 = a_1 a_2 a_3 a_4$, $D_5 = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$.

此结论对副对角线以下元素全为 0 的行列式也成立 . 利用下面讲的性质 2,对最后一列展开,也得同样的递推公式 .

1.1.2 n 阶行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式,一般是较繁琐的 . 因此,我们要从定义推导出行列式的一些性质,以简化行列式的计算 .

性质 1 行列式的行与列(按原顺序)互换,其值不变,即

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \tag{1.10}
$$

这个性质可用数学归纳法证明,由于证明的表述较繁,我们略去证明,有兴趣者可参阅居余马等编著的《线性代数》第 2 版 .

有了这个性质,行列式对行成立的性质都适用于列 . 以下我们仅对行讨论行列式的性质 .

性质 2 行列式(1.8)对任一行按下式展开,其值相等,即

$$
D = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1.11}
$$

其中

$$
A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},
$$

M_{ij} 是 D 中去掉第 i 行第 j 列全部元素后按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式,它称为 a_{ij} 的余子式, A_{ij} 称为 a_{ij} 的代数余子式.

证法与性质 1 的证明类似,也用数学归纳法.

性质 3(线性性质) 有以下两条:

(1) 行列式 D 的第 i 行元素都乘 k,其值等于 kD,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

(2) 行列式第 i 行每个元素为两数之和 $a_{ij}+b_{ij}$ $(j=1,2,\cdots,n)$,则该行列式等于(1.13)式中两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1.13)$$

利用性质 2,将(1.12),(1.13)式中等号左端的行列式按第 i 行展开,立即可得等号右端的结果.

由(1.12)式又可得以下推论.

推论 1 某行元素全为零的行列式其值为零.

性质 4 行列式中两行对应元素全相等,其值为零,即当 $a_{il}=a_{jl}$ $(i\neq j,\ l=1,2,\cdots,n)$时,有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=0. \tag{1.14}$$

证 用数学归纳法证明.结果对二阶行列式显然成立,假设结论对 $n-1$ 阶行列式成立,在 n 阶的情况下,对第 k 行展开($k\neq i,j$),则

$$D=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\cdots+a_{kn}A_{kn}=\sum_{l=1}^{n}a_{kl}A_{kl}.$$

由于余子式 $M_{kl}(l=1,2,\cdots,n)$是 $n-1$ 阶行列式,且其中都有两行元素相同,所以 $A_{kl}=(-1)^{k+l}M_{kl}=0(l=1,2,\cdots,n)$,故 $D=0$. ■

由性质 3(1)和性质 4,立即可得以下推论.

推论 2 行列式中两行对应元素成比例(即 $a_{jl}=ka_{il}$, $i\neq j$, $l=1,2,\cdots,n$, k 是常数),其值为零.

性质 5 在行列式中,把某行各元素分别乘非零常数 k,再加到另一行的对应元素上,行列式的值不变(简称:对行列式做倍加行变换,其值不变),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.15}$$

利用性质 3(2)**和推论** 2,**可证明**(1.15)**式成立**.

性质 6(反对称性质) **行列式的两行对换,行列式的值反号**.

证 **重复用性质** 5,**然后再利用性质** 3(1),**就有**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \cdots & a_{in}+a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{i1} & -a_{i2} & \cdots & -a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

■

性质 7 **行列式某一行的元素乘另一行对应元素的代数余子式之和等于零**,**即**