

《现代应用数学手册》编委会

# 现代应用数学手册

现代应用分析卷

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

## 内 容 简 介

现代分析数学不仅在数学领域内占有非常重要的地位,而且在各自然科学和工程、技术科学中的应用越来越广泛.本卷论述了现代分析数学各分支中的基本概念、术语、符号、性质和方法.在编写上,注重背景,强调应用,突出常用的基本知识.现代分析数学大多内容比较抽象,为使读者易于理解,书中适当地列举了一些例子.本书适合高等院校各理、工专业的教师、本科生和研究生,以及广大科技工作者使用.

### 图书在版编目(CIP)数据

现代应用数学手册:现代应用分析卷/《现代应用数学手册》编委会编.—北京:清华大学出版社,1998

ISBN 7-302-03054-5

. 现... . 现... . 应用数学-手册 . 029-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 21432 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者:北京清华园胶印厂

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本: 850× 1168 1/32 印张: 22.25 字数: 579 千字

版 次: 1998 年 11 月 第 1 版 1998 年 11 月 第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-03054-5/O · 198

印 数: 0001 ~ 4000

定 价: 36.00 元

# 《现代应用数学手册》

## 编辑委员会

主 编：马振华  
编 委：（依姓氏笔划序）  
    马振华 刘坤林  
    陆 璇 陈景良  
    郑乐宁 顾丽珍  
    葛余博

# 现代应用分析卷

责任编辑委 陈景良

章次	编者	校者
1	陈景良	迟宗陶
2	韩云瑞	迟宗陶
3	陈景良	迟宗陶
4	韩云瑞	迟宗陶
5	韩云瑞	迟宗陶
6	陈景良	迟宗陶
7	姜启源	肖树铁
8	梁国珍	陈景良
9	关 治	迟宗陶
10	马振华	陈景良
11	李秀淳	梁国珍

# 序

随着计算机科学技术的飞速发展,人类正进入信息时代.

信息时代是应用数学大发展的时代,人类长期积累起来的知识体系,正面临着第3次数学化.数学思想,数学方法与数学模型随着计算机的广泛应用,日益渗透到各种行业中去.

当代,除了古典的数学理论(初等数学,微积分学,微分方程,复变函数等)早已得到广泛的应用外,一些比较抽象的现代数学理论(集合论、数理逻辑、范畴论、抽象代数、泛代数、代数几何、拓扑学、泛函分析等)以及一些新兴的数学理论(随机过程、时间序列、运筹学、最优化理论、有限元方法、模糊数学、混沌与分形等)也逐渐地成为社会生产、科学实验、工程技术及经济管理中不可缺少的工具,应用数学的适用范围正在迅速地扩大.

为了满足日益增长的社会需求,清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会,组织编写了这套多卷集的手册.

本书读者是理、工、医、农、经管等各个领域中的广大工程技术人员、科研人员、大、中专院校的教师、学生、研究生及其他使用数学工具的实际工作者.其中有些内容对于中学生也是适用的.

编者力求使本书成为一套高质量的工具书,它有下列特点:

(1) 内容“新颖” 本书力求做到内容现代化,除用现代观点介绍古典内容外,对已出现的新理论、新方法尽量优先选入.

(2) 突出“应用” 本书在选材上突出数学理论的应用,以通俗易懂的方式着重介绍在现代科学技术等实际领域中应用广泛的数学理论和方法.

(3) 紧密“结合”计算机应用 为了更有效地应用数学方法解

决各种实际问题, 广大科技人员迫切要求数学方法与计算机应用相结合, 提高工作效率. 为此, 本书在结合计算机应用方面, 给予特别的重视.

(4) 版面设计“合理”, 便于迅速查阅 为方便读者使用, 本书采用了一套较为完善的索引体系. 除正文中章、节的编号沿用国际通行的十进制编号外, 对于重要的定义、定理、例题、公式、图、表等均有编号. 读者可以从(1) 目录, (2) 中文—外文索引, (3) 外文—中文索引等三种途径, 迅速找到所需资料. 此外, 本书对载入的外国科学家人名, 尽量采用“名从主人”的原则.

(5) 数学符号力求“统一”与国际化 鉴于目前国内各种文献、书籍中使用的数学符号不够统一与国际化, 增加了读者阅读时的困难. 本书除按国家标准 GB3102-93 外, 兼用国际数学界权威著作《数学大百科全书》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics, EDM) 中的符号为标准. 对于不在上述文献中的其他新符号, 则选用较为流行者.

本手册各卷内容独立完整, 便于个人读者与团体读者按需选购. 当前应用数学急剧发展, 编委会在条件成熟的时候, 还将增出新卷.

本书的编撰是与清华大学应用数学系领导, 特别是萧树铁教授的热心支持, 编辑委员会各位编委的通力协作, 校内外的许多教师、科研工作者的大力支持分不开的, 编者深致谢意.

在编辑出版过程中, 还得到清华大学出版社的热情支持.

本书从编撰到出版, 历尽艰辛, 饮水思源, 编者还要感谢本书的发起人, 清华大学应用数学系陆璇教授, 北京出版社李利军编辑及已故的北京出版社社长王政人先生.

最后, 编者还要对夫人王华敏表示谢忱, 没有她的深刻理解、热情支持与持久的帮助, 本书也难以问世.

主编 马振华  
1997 年于清华园

## 符 号 表

$\forall$	全称量词
$\exists$	存在量词
$\in$	属于
$\notin$	不属于
$\supseteq$	包含于
$\not\supseteq$	不包含于
$\subset$	真包含于
$\cup$	并运算
$\cap$	交运算
$\setminus$	差运算
$X^c / C(X)$	集 $X$ 的余集/ 集 $X$ 的补集
$X - Y / X \setminus Y$	集 $X$ 与集 $Y$ 的差集
$X \times Y$	集 $X$ 与集 $Y$ 的笛卡尔积集
$X / \sim$	集 $X$ 关于等价关系 $\sim$ 的等价类组成的商集
$\vdash$	蕴涵 推断
$\equiv$	等价
$\{x \in \mathbb{P}(x)\}$	使性质 $P(x)$ 成立的全体 $x$ 组成的集合
$\limsup A_n$	集合序列 $A_n$ 的上极限
$\liminf A_n$	集合序列 $A_n$ 的下极限
$\lim A_n$	集合序列 $A_n$ 的极限
$\sup X$	实数集 $X$ 的上确界
$\inf X$	实数集 $X$ 的下确界
$X \sim Y$	集 $X$ 对等于集 $Y$

$X/\aleph_0$	集 $X$ 的基数
$<$	偏序关系
$\aleph_0$	阿列夫
$\aleph_0$	阿列夫零
$C^n[a, b]$	$[a, b]$ 上连续 $n$ 阶可导函数的全体
$N$	自然数集(含数“0”在内)
$Z$	整数集
$Q$	有理数集
$R$	实数集
$R$	扩充实数集
$C$	复数集
$R^n$	$n$ 维实空间
$C^n$	$n$ 维复空间
$f: X \rightarrow Y$	$f$ 是从集 $X$ 到集 $Y$ 内的映射
$f: x \mapsto y$	映射记号
$D(f)$	映射 $f$ 的定义域
$R(f)$	映射 $f$ 的值域
$f^{-1}$	映射 $f$ 的逆映射
$f _X$	映射 $f$ 在集 $X$ 上的限制
$g \circ f$	映射 $f$ 与 $g$ 的复合映射
$I_x/I$	集 $X$ 上的恒等映射
$m^*(E)$	$R^n$ 上点集 $E$ 的内测度
$m^*(E)$	$R^n$ 上点集 $E$ 的外测度
$f * g$	$f$ 与 $g$ 的卷积(褶积)
$\sum_a^b (f; T)$	$f$ 在 $[a, b]$ 上关于分划 $T$ 的变差
$\sum_a^b (f)$	$f$ 在 $[a, b]$ 上的全变差
$\cdot$	范数

$\operatorname{ess\,sup}_x \mathcal{G}(x)$	$\mathcal{G}$ 在集 $E$ 上的本性下界
$C_c(a, b)$	定义在 $(a, b)$ 上具有紧支集的函数类
$\operatorname{supp}$	函数的支集
$(X, \mathcal{S}, \mu)$	测度空间
$E^n$	$n$ 维欧几里得空间
$C^n$	$n$ 维酉空间
$(\cdot, \cdot)$	距离
$(S; P; +, \cdot)$	线性空间(向量空间)
$\operatorname{Span} A$	由集 $A$ 生成的线性子空间
$(S, \cdot)$	度量空间
$\operatorname{diam}(A)$	集 $A$ 的直径
$(X, \ \cdot\ )$	赋范线性空间
$(\cdot, \cdot)$	内积
$(X, (\cdot, \cdot))$	线性空间 $X$ 上的内积空间
	正交
	正交和
$L(X, Y)$	由 $X$ 到 $Y$ 的有界线性算子空间
$L(X)$	由 $X$ 到 $X$ 的有界线性算子空间
$X^{**}$	$X$ 的二次共轭空间
$X^{* \dots *}$	$X$ 的 $n$ 次共轭空间
$T^*$	$T$ 的共轭算子
$T$	$T$ 的伴随算子
$U$	$U$ 的直交补空间
$\ker T$	算子 $T$ 的核
$\operatorname{coker} T$	算子 $T$ 的余核
$\operatorname{ind} T$	算子 $T$ 的指数
$\operatorname{tr} A$	算子 $A$ 的迹

$r(x)$	$x$ 的谱半径
$D(\ )$	开区域 $\ $ 上的检验函数空间
$D'(\ )$	$\ $ 上的分布空间
$L_c(\ )/L^c(\ )$	$\ $ 上的局部可积函数空间
	Dirac 分布
$f \otimes g$	$f$ 与 $g$ 的直积
$\text{sgn}$	符号函数
$\text{l. i. m}$	平均收敛

# 目 录

## 符号表

1 集合与映射.....	1
1.1 集合及集合的运算.....	1
1.1.1 集合的概念 .....	1
1.1.2 并集与交集 .....	3
1.1.3 差集与余集 .....	5
1.1.4 积集与投影 .....	7
1.2 映射.....	8
1.2.1 映射与逆映射 .....	8
1.2.2 映射的图象.....	14
1.2.3 映射的延拓与限制.....	14
1.2.4 映射的复合.....	15
1.2.5 集合的特征函数.....	16
1.3 集合的基数 .....	16
1.3.1 对等与基数.....	16
1.3.2 可列集.....	19
1.3.3 连续点集的基数.....	20
1.4 顺序关系及等价关系 .....	21
1.4.1 偏序与全序.....	21
1.4.2 佐恩引理.....	23
1.4.3 等价关系及商集.....	24
1.5 实(数)直线上的点集 .....	24
1.5.1 一些基本概念与性质.....	24
1.5.2 邻域、开集和闭集 .....	28
1.5.3 实(数)直线的完备性.....	28

1.5.4	有界闭集的列紧性与紧性 .....	30
	参考文献 .....	31
2	实变函数论 .....	32
2.1	引言 .....	32
2.1.1	实变函数论的产生 .....	32
2.1.2	建立勒贝格积分的方法 .....	33
2.2	测度论 .....	35
2.2.1	有界集合的内测度与外测度 .....	35
2.2.2	测度的性质 .....	37
2.3	可测函数 .....	39
2.4	勒贝格积分 .....	45
2.4.1	积分的定义与基本性质 .....	45
2.4.2	积分收敛定理 .....	47
2.4.3	富比尼定理 .....	51
2.5	有界变差函数与黎曼-斯蒂尔切斯积分 .....	53
2.5.1	单调函数与有界变差函数 .....	53
2.5.2	黎曼-斯蒂尔切斯积分 .....	56
2.6	绝对连续函数与微分 .....	58
2.7	空间 $L^p$ .....	60
2.8	勒贝格积分的其它定义方法 .....	63
2.8.1	里斯方法 .....	63
2.8.2	基于完备化思想定义勒贝格积分的方法 .....	65
2.9	抽象测度 .....	68
2.9.1	环上的测度 .....	68
2.9.2	测度的扩张 .....	70
2.9.3	可测函数与积分 .....	71
2.9.4	勒贝格-斯蒂尔切斯积分 .....	73
3	空间结构与抽象空间 .....	75
3.1	集合与空间 .....	75
3.1.1	空间结构 .....	75
3.1.2	欧几里得空间 .....	77

3.1.3	酉空间 .....	80
3.2	线性运算 线性空间 .....	81
3.2.1	线性运算 .....	81
3.2.2	线性空间 .....	82
3.2.3	线性子空间 .....	83
3.2.4	线性相关与线性无关 .....	85
3.2.5	维数与基 .....	85
3.3	距离 度量空间 .....	88
3.3.1	距离 .....	88
3.3.2	度量空间 .....	89
3.3.3	开集与闭集 .....	90
3.3.4	聚点与闭包 .....	93
3.3.5	极限与收敛 .....	94
3.3.6	连续映射 .....	95
3.3.7	柯西序列与完备度量空间 .....	97
3.3.8	列紧性与紧性 .....	99
3.3.9	压缩映射与不动点定理 .....	102
3.4	范数 赋范线性空间 .....	103
3.4.1	范数和半范数 .....	103
3.4.2	赋范线性空间 .....	107
3.4.3	强收敛 .....	108
3.4.4	巴拿赫空间 .....	109
3.4.5	连续函数空间 .....	110
3.5	内积 内积空间 .....	112
3.5.1	内积 .....	112
3.5.2	内积空间 .....	113
3.5.3	希尔伯特空间 .....	115
3.5.4	正交与投影 .....	116
3.5.5	正交集 .....	119
3.6	拓扑 拓扑空间 .....	123
3.6.1	拓扑 .....	123

3.6.2	拓扑空间 .....	124
3.6.3	拓扑空间的基本概念与性质 .....	126
	参考文献 .....	129
4	线性泛函分析 .....	131
4.1	引言 .....	131
4.2	线性拓扑空间 .....	132
4.2.1	基本概念 .....	132
4.2.2	局部凸空间 .....	134
4.2.3	弗雷歇空间 .....	135
4.3	有界线性算子 .....	137
4.3.1	定义与基本性质 .....	137
4.3.2	有界线性算子空间 .....	139
4.3.3	算子乘法与逆算子 .....	143
4.4	连续线性泛函 .....	144
4.4.1	基本概念与性质 .....	144
4.4.2	连续线性泛函的一般形式 .....	148
4.4.3	凸集分离定理 .....	151
4.5	有界线性算子的基本定理 .....	152
4.6	共轭空间与共轭算子 .....	155
4.6.1	弱收敛与弱*收敛 .....	155
4.6.2	自反巴拿赫空间 .....	157
4.6.3	共轭算子 .....	159
4.6.4	无界算子的伴随算子 .....	161
4.7	各类算子 .....	164
4.7.1	酉算子与正规算子 .....	164
4.7.2	自伴算子 .....	165
4.7.3	投影算子 .....	166
4.7.4	全连续线性算子 .....	168
4.7.5	弗雷德霍姆算子 .....	169
4.7.6	希尔伯特-施密特算子 .....	170
4.7.7	拉克斯-米尔格拉姆定理 .....	171

4.8	线性算子的谱 .....	172
4.8.1	谱的概念与基本性质 .....	172
4.8.2	自伴算子的谱 .....	175
4.8.3	全连续算子的谱 .....	179
4.9	算子半群 .....	182
4.9.1	一致连续半群与强连续半群 .....	182
4.9.2	压缩半群与耗散算子 .....	185
4.10	巴拿赫代数 .....	189
4.10.1	概念与例 .....	189
4.10.2	预解集与谱 .....	192
4.10.3	理想与同态 .....	193
4.10.4	交换巴拿赫代数 .....	194
	参考文献 .....	196
5	广义函数 .....	197
5.1	引言 .....	197
5.2	检验函数 .....	199
5.3	广义函数 .....	203
5.3.1	定义及例 .....	203
5.3.2	分布的代数运算 .....	206
5.3.3	分布的支集 .....	208
5.3.4	分布序列的收敛 .....	209
5.4	分布导数 .....	212
5.5	一些重要的分布 .....	215
5.6	分布的直积与卷积 .....	223
5.6.1	分布的直积 .....	223
5.6.2	分布的卷积 .....	225
5.6.3	卷积的应用 .....	227
5.7	缓增分布与傅里叶变换 .....	228
5.7.1	速降检验函数 .....	229
5.7.2	缓增分布 .....	230
5.7.3	速降函数的傅里叶变换 .....	232

5.7.4	缓增分布的傅里叶变换 .....	234
5.7.5	直积与卷积的傅里叶变换 .....	240
5.7.6	某些应用 .....	240
5.8	分布的拉普拉斯变换 .....	243
5.8.1	经典函数的拉普拉斯变换 .....	243
5.8.2	分布的拉普拉斯变换 .....	244
5.8.3	变换公式 .....	244
	参考文献 .....	245
6	变分法与变分原理 .....	246
6.1	变分法的问题 .....	246
6.1.1	古典变分学问题 .....	246
6.1.2	变分法的内容与意义 .....	249
6.2	欧拉方程 .....	250
6.2.1	$\int_a^b F(x, y, y') dx$ 型不动边界问题 .....	250
6.2.2	$\int_a^b F(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n') dx$ 型不动边界问题 .....	255
6.2.3	$\int_a^b F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$ 型不动边界问题 .....	256
6.2.4	依赖多元函数的泛函 .....	257
6.2.5	可动边界问题 .....	259
6.2.6	条件极值问题 .....	264
6.3	变分问题的直接法 .....	267
6.3.1	欧拉有限差分法 .....	267
6.3.2	里茨法 .....	269
6.3.3	康托罗维奇法 .....	272
6.4	数学物理中的变分原理 .....	274
6.4.1	二次函数的极值 .....	274
6.4.2	能量法 .....	276
6.4.3	虚功原理 .....	280
6.4.4	广义解 .....	283
6.5	里茨-伽辽金方法 .....	287

6.5.1	变分原理常用的近似解法 .....	287
6.5.2	里茨法的应用及伽辽金法 .....	288
6.5.3	里茨-伽辽金法的收敛性 .....	292
6.5.4	里茨法在特征值计算中的应用 .....	295
	参考文献 .....	301
7	数学模型 .....	302
7.1	数学模型概述 .....	302
7.1.1	建模的目的和步骤 .....	303
7.1.2	模型分类 .....	304
7.1.3	系统辨识 .....	305
7.2	建立数学模型的方法 .....	307
7.2.1	初等分析 .....	307
7.2.2	初等概率 .....	310
7.2.3	量纲分析 .....	311
7.2.4	极值分析 .....	314
7.2.5	微分方程 .....	320
7.2.6	马尔可夫链分析 .....	323
7.2.7	冲量过程 .....	326
7.2.8	层次分析 .....	330
7.3	数学模型的应用 .....	335
7.3.1	人口 .....	336
7.3.2	经济 .....	339
7.3.3	社会 .....	342
7.3.4	交通 .....	345
7.3.5	医学 .....	348
7.3.6	生产 .....	350
7.3.7	生态 .....	352
7.3.8	体育 .....	354
8	不等式 .....	358
8.1	引言 .....	358
8.1.1	不等式的意义 .....	358