《现代应用数学手册》编委会

现代应用数学手册

运筹学与最优化理论卷

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书是运筹学与最优化理论的常备工具书,内容新颖,实用性强,查阅方便.主要介绍运筹学与最优化理论在科学研究、工程技术、经济管理中各种实际问题的数学模型及计算方法.本卷分为 6 章,依次为线性规划、非线性规划、整数规划、动态规划、多目标规划及对策论,并配有丰富的例题,便于读者加深理解、掌握与运用.为便于读者查阅,还附有中文—外文名词索引、外文—中文名词索引.本书可供广大科研人员、工程技术人员、管理人员、大中专院校师生和研究生使用.

图书在版编目(CIP)数据

现代应用数学手册:运筹学与最优化理论卷/《现代应用数学手册》编委会编.—北京:清华大学出版社,1997

ISBN 7-302-02760-9

Ⅰ 现… Ⅱ 现… Ⅲ.①应用数学-手册②运筹学③最优化-数学理论

Ⅳ.029-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 25853 号

出版者:清华大学出版社 (北京清华大学校内,邮编 100084)
因特网地址:www.tup.tsinghua.edu.cn

印刷者:北京市清华园胶印厂

发行者:新华书店总店北京科技发行所

开 本:850×1168 1/32 印张:16 字数:413 千字

版 次:1998 年 4 月第 1 版 1998 年 4 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-02760-9/O·190

印 数:0001~4000

定 价:28.00 元

《现代应用数学手册》
编辑委员会

主　编：马振华

编　委：(依姓氏笔画序)

马振华　刘坤林

陆　璇　陈景良

郑乐宁　顾丽珍

葛余博

运筹学与最优化理论卷

责任编委　郑乐宁

章次	编者	校者
1	王燕来	陈宝林
2	陈宝林	王燕来
3	马仲蕃	刘振宏
4	姜启源	郑乐宁
5	郑乐宁	谭泽光
6	王建华	马振华

序

随着计算机科学技术的飞速发展,人类正进入信息时代.

信息时代是应用数学大发展的时代,人类长期积累起来的知识体系,正面临着第3次数学化.数学思想,数学方法与数学模型随着计算机的广泛应用,日益渗透到各种行业中去.

当代,除了古典的数学理论(初等数学,微积分学,微分方程,复变函数等)早已得到广泛的应用外,一些比较抽象的现代数学理论(集合论、数理逻辑、范畴论、抽象代数、泛代数、代数几何、拓扑学、泛函分析等)以及一些新兴的数学理论(随机过程、时间序列、运筹学、最优化理论、有限元方法、模糊数学、混沌与分形等)也逐渐地成为社会生产,科学实验,工程技术及经济管理中不可缺少的工具,应用数学的适用范围正在迅速地扩大.

为了满足日益增长的社会需求,清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会,组织编写了这套多卷集的手册.

本书读者是理、工、医、农、经管等各个领域中的广大工程技术人员、科研人员,大、中专院校的教师、学生、研究生及其他使用数学工具的实际工作者.其中有些内容对于中学生也是适用的.

编者力求使本书成为一套高质量的工具书,它有下列特点:

(1) 内容"新颖" 本书力求做到内容现代化,除用现代观点介绍古典内容外,对已出现的新理论、新方法尽量优先选入.

(2) 突出"应用" 本书在选材上突出数学理论的应用,以通俗易懂的方式着重介绍在现代科学技术等实际领域中应用广泛的数学理论和方法.

(3) 紧密"结合"计算机应用　为了更有效地应用数学方法解决各种实际问题,广大科技人员迫切要求数学方法与计算机应用相结合,提高工作效率.为此,本书在结合计算机应用方面,给予特别的重视.

(4) 版面设计"合理",便于迅速查阅　为方便读者使用,本书采用了一套较为完善的索引体系.除正文中章、节的编号沿用国际通行的十进制编号外,对于重要的定义、定理、例题、公式、图、表等均有编号.读者可以从(1) 目录,(2) 中文—外文索引,(3) 外文—中文索引等三种途径,迅速找到所需资料.此外,本书对载入的外国科学家人名,尽量采用"名从主人"的原则.

(5) 数学符号力求"统一"与国际化　鉴于目前国内各种文献、书藉中使用的数学符号不够统一与国际化,增加了读者阅读时的困难.本书除按国家标准 GB3102-93 外,兼用国际数学界权威著作《数学大百科辞典》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics, EDM)中的符号为标准.对于不在上述文献中的其他新符号,则选用较为流行者.

本手册各卷内容独立完整,便于个人读者与团体读者按需选购.当前应用数学急剧发展,编委会在条件成熟的时候,还将增出新卷.

本书的编撰是与清华大学应用数学系领导,特别是萧树铁教授的热心支持,编辑委员会各位编委的通力协作,校内外的许多教师、科研工作者的大力支持分不开的,编者深致谢意.

在编辑出版过程中,还得到清华大学出版社的热情支持.

本书从编撰到出版,历尽艰辛.饮水思源,编者还要感谢本书的发起人,清华大学应用数学系陆璇教授,北京出版社李利军编辑及已故的北京出版社社长王政人先生.

最后,编者还要对夫人王华敏表示谢忱,没有她的深刻理解、热情支持与持久的帮助,本书也难以问世.

主编　马振华

1997年于清华园

数学符号表

"	全称量词
v	存在量词
	等价
[ ]/ [ ]	底([α]是不超过实数 α 的最大整数)
[ ]	顶([α]是不小于实数 α 的最小整数)
O	Landau 符号(当 $x \to \alpha$ 时 $\lvert f(x)/ g(x) \rvert$ 有界,记作 $f(x) = O(g(x))$)
o	Landau 符号(当 $x \to \alpha$ 时 $\lvert f(x)/ g(x) \rvert \to 0$,记作 $f(x) = o(g(x))$)
	等价(当 $x \to \alpha$ 时 $f(x)/ g(x) \to 1$)
$:=$	定义与赋值号($k := k + 1$)
$>^{l}$	字典序($\boldsymbol{x} >^{l} \boldsymbol{y}$, x 按字典序大于 y/ x 优超于 y)
$\rho(A)$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的谱半径($\rho(\boldsymbol{A}) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \lvert \lambda_i \rvert$)
$f(\boldsymbol{x})$	$f(\boldsymbol{x})$的梯度
$^{2} f(\boldsymbol{x})$	$f(\boldsymbol{x})$的 Hesse 矩阵
$s \parallel z^{(i)}$	在 n 维向量 $(x^{(1)}, \cdots, x^{(i)}, \cdots, x^{(n)})$ 中,用 $z^{(i)}$ 代替 $x^{(i)}$: $s \parallel z^{(i)} > (x^{(1)}, \cdots, x^{(i-1)}, z^{(i)}, x^{(i+1)}, \cdots, x^{(n)}))$
lex min	按字典序最小

目　　录

1　线性规划

1.1　线性规划问题

1.1.1　引言

线性规划(linear programming)是运筹学中产生较早、应用广泛的一个分支.早在 20 世纪 30 年代, Канторович 研究并发表了《生产组织与计划的数学方法》,其中论述的就是线性规划问题.1947 年 G.B.Dantzig 提出了单纯形法.其后在计算机上的成功实现使得应用线性规划解决的问题迅速增加.线性规划已广泛用于国防、科技、经济、工业、农业、环境工程、教育及社会科学中.

线性规划是研究在一组线性约束之下,某个线性函数的最小值或最大值问题.

例 1.1.1　某工厂有三种原料 B_1, B_2 和 B_3,其储量分别为 170 kg、100 kg 和 150 kg.现用来生产两种产品 A_1 和 A_2.已知每生产 1 kg A_1 产品需要原料 B_1 5 kg,原料 B_2 2 kg,原料 B_3 1 kg.每生产 1 kg A_2 产品需要原料 B_1 2 kg,原料 B_2 3 kg,原料 B_3 5 kg.又知 A_1 产品每 kg 利润为 10 元, A_2 产品每 kg 利润为 18 元.问在工厂现有资源条件下,应如何安排生产,才使工厂获得最大利润?

解　设安排 A_1, A_2 产品的产量分别为 x_1, x_2 kg.则该问题的数学模型为

$$\begin{aligned}
\max \quad & 10x_1 + 18x_2; \\
\text{s.t.} \quad & 5x_1 + 2x_2 \le 170, \\
& 2x_1 + 3x_2 \le 100, \\
& x_1 + 5x_2 \le 150, \\
& x_1 \ge 0, \\
& x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

这是一个线性规划问题(linear programming problem),简记为(LP).

一般地,线性规划问题的数学模型为

$$\begin{aligned}
\min/\max \quad & f(x_1, \cdots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n; \\
\text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \le b_1 \quad (\text{或} \ge b_1; \text{或} = b_1), \\
& \cdots\cdots \qquad , \\
& a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \le b_m \quad (\text{或} \ge b_m; \text{或} = b_m), \\
& x_j \ge 0 \quad (j = 1, \cdots, n).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

其中,$x_1, \cdots, x_n$ 称为决策变量(decision variables),是线性规划问题中要求解的变量.$f(x_1, \cdots, x_n) = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$ 称为目标函数(objective function).常数 $c_1, \cdots, c_n$,称为费用系数(cost coefficients).$a_{i1} x_1 + \cdots + a_{in} x_n \le b_i$(或 $\ge b_i$;或 $= b_i$) $(i = 1, \cdots, m)$称为第 i 个约束(constraint).系数 a_{ij}组成的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为约束矩阵(constraint matrix).列向量 $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 称为右端向量(right-hand-side vector).条件 $x_j \ge 0 (j = 1, \cdots, n)$称为非负约束.本书中约束条件记为 s.t.是 subject to 的缩写,意思是满