

第一章

现代数学概貌

第一节 数学科学的百年回顾

1900年，在巴黎举行的国际数学家大会上，数学大师D·希尔伯特(Hilbert, 1862—1943)在讲演的开始就说“揭开隐藏在未来之中的面纱，探索未来世纪的前景，谁不兴奋呢？”^[1]接着，他提出了20世纪需要解决的23个数学问题。现在，20世纪已经过去，一百年来，数学面纱一层层被揭开。爱因斯坦的相对论，20年代出现的量子力学，产生于50年代的杨-米尔斯规范场论，使微分几何、拓扑理论、抽象分析获得全新的原动力。电子计算机的出现，改变了人类社会的生活方式，也改变了数学本身。数学技术渗入到航天飞行、医疗检测、经济管理以及众多的社会科学领域。在20世纪末，费马猜想终于获得证明，成为人类智慧的一种最高象征。希尔伯特在1900年提出的问题，多半已经有了结果。今天，数学家们又在为21世纪的数学问题进行构想。数学科学仍将一日千里地迅速发展，在探索自然奥秘和推动社会发展中作出自己的贡献。中国数学应该在新世纪为人类作出更大的贡献。

1. 20世纪数学的开端（1900—1918）

在19、20世纪之交，法国的H·庞加莱(Poincare, 1854—1912)是无可争辩的数学领袖。他在三体问题、微分方程的定性理论、拓扑学的大量原创性研究，成为挖掘不尽的数学宝藏。如果说庞加莱主要以自然科学的实践背景为数学研究的源泉，那么德国的希尔伯特则更多地从数学本身的完善上寻求数学的进步。他的著名工作有数论报告、几何基础、抽象积分方程与抽象空间。希尔伯特倡导

的形式主义学派 成为 20 世纪的主导数学哲学。

这一时期最重要的数学事件，是爱因斯坦的相对论把新时代的几何学推到了科学的最前沿。四维时空的狭义相对论，产生了闵可夫斯基空间几何。弯曲时空的广义相对论，使得张量分析、黎曼几何、高维几何成为物理学革命的工具。我们生存着的宇宙空间，可以用黎曼在 1867 年创立的高维流形和曲率理论来描述。人们不禁惊叹造化之工，数学之巧。

在物理学推动数学发展的同时，纯粹数学也以惊人的方式大步前进。19 世纪初 J·B·傅里叶 (Fourier, 1768—1830) 提出的调和函数，是众多数学分支的出发点。G·康托尔 (Cantor, 1845—1918) 从研究傅里叶级数的唯一性提出“点集”的概念，以后发展为“集合论”，成为所有抽象数学的表述工具。法国的 H·勒贝格 (Lebesgue, 1875—1941) 创立了建立在可列可加测度上的积分理论，使得许多黎曼意义下不可积的函数也可以进行傅里叶展开，实现了一次积分革命。康托尔和勒贝格建立的数学理论，常常涉及一些没有导数的病态函数、没有切线的奇异曲线，以及看上去千疮百孔的怪异集合。当时的数学家难以想像勒贝格积分竟会成为 20 世纪工程师手中的工具。

康托尔的集合论是一个怪物，他所建立的关于无限集合的超限数理论很难使人接受。例如，正方形一边上的点和对角线上的点一样多。康托尔本人也陷入了自己提出的一个悖论：由一切基数 (cardinal number) 构成的集合 S 其基数将大于 S 中的所有基数。这使康托尔日夜难寐。当时德国数学界的当权人物克罗内克 (Kronecker, 1823—1891) 曾对康托尔的无限观进行猛烈的抨击，反对康托尔进入柏林大学。康托尔于 1884 年患精神分裂症，病情时好时坏，1918 年病逝于哈雷精神病研究所内。希尔伯特是康托尔数学业绩的积极支持者。他曾说：“没有人能把我们从康托尔所创造的天国中赶走。”^[2]

1903 年英国哲学家、数理逻辑学家 B·罗素 (Russell, 1872—1970) 发现了一个十分简单的悖论：考察一切不以自身为其中一元素的集合所构成的集合 B 此时若 $x \in B$ 则有 $x \notin B$ ；而若 $x \notin B$ 则

又有 $x \in B$, 横竖都不对。这触发了数学基础的大论战, 史称“第三次数学危机”。为避免罗素悖论, 罗素提倡“逻辑主义”, 认为数学即逻辑, 只要数理逻辑没有矛盾, 数学就不会有矛盾, 而且是永远绝对正确。希尔伯特则提出“形式主义”, 认为数学研究的对象可以不必考虑实际意义, 无非是一些对象按一套公理作形式演绎的结果。只要公理无矛盾、独立、完备, 数学就永远绝对正确。直觉主义则采取保守态度, 不承认“自然数全体所成的集合”, 反对使用排中律, 主张“数学对象的存在, 必须能够构造”, 因而把数学限制在很小的范围内。逻辑主义想把数学划归为逻辑的愿望未能实现, 但留下了“数理逻辑”这门重要的学科。希尔伯特的形式主义后来被 K·哥德尔 (Godel, 1906—1978) 的两个不完备定理所否定, 寻求数学绝对严格基础的理想随之破灭。但是, 形式主义的思想为后来的布尔巴基学派所继承和发展, 对 20 世纪数学观念的影响极为深刻。直觉主义的思想过于保守, 束缚了数学家的手脚, 也没有得到广泛承认。只有构造主义的想法, 随着电子计算机的出现, 获得了新的生命力。

20 世纪初, 英国的分析学派非常强大。G·哈代 (Hardy, 1877—1947) 和李特伍德 (Littlewood, 1885—1977) 是领袖人物。他们在一个时期中的解析数论、单复分析、不等式、级数等在“硬”分析领域里有很高建树。哈代发现并培养了印度传奇数学家拉马努詹 (Ramanujan, 1887—1920)。拉马努詹未受过正规教育, 在不知道什么是现代意义下的严格证明的前提下, 完成了大量的数学工作。拉马努詹的笔记本, 写满了大量公式, 但没有详细的证明。60 多年之后, 美国的 B·C·Berndt 把拉马努詹笔记本加以整理, 完成证明, 分三册出版^[3]。该书的研究表明, 除少量公式有误之外, 拉马努詹笔记本中的绝大部分是正确的。拉马努詹是如何进行数学思考的? 这一数学之谜, 仍有待解开。

经典的数学应用工作, 仍在深入进行。力学、电学、光学、机械工程、建筑工程中的数学问题被大量研究。引人瞩目的工作是数理统计学以“生物统计学”的形式开始出现。标准差、平均差、相关等术语, 在 1901 年由 K·皮尔逊 (Pearson, 1857—1936) 创办的《生物计

量学》(Biometrika 杂志上陆续使用。

2. 以哥丁根学派为中心的黄金时期 (1918—1933)

从第一次世界大战结束到 1933 年希特勒法西斯上台,世界的数学中心在德国的哥丁根大学。在哥丁根学派的带动下,出现了 20 世纪数学发展的一段黄金时期。

哥丁根是德国的一座小城,以哥丁根大学而著名。大数学家高斯(Gauss, 1777—1850)曾长期在此工作。1886 年,F·克莱因(Klein, 1849—1925)来哥丁根任教授并主持数学系,遂延请希尔伯特、闵可夫斯基来校执教,不久就成世界数学中心。第一次世界大战结束时,德国虽是战败国,但数学的元气未伤。法国在大战中损失了一代大学生,巴黎高师的学生名册上布满了黑框。在 20 世纪 20 年代,法国几乎是函数论王国,很少有新学科产生。一个例外是 E·嘉当(Cartan, 1869—1951)他在李群表示、外微分方法、活动标架法、微分方程组的研究上有独到的见解,成为日后微分几何的经典性工作,可惜当时未受到充分重视。英国继续维持哈代的分析学派,没有新的突破。20 世纪 20 年代的美国数学,还远远落后于西欧。前苏联、东欧诸国的数学刚刚起步。尽管优秀数学家遍布欧洲和世界各地,哥丁根却是公认的世界数学中心。

在 20 世纪 20 年代 克莱因已经退休 希尔伯特也已老了。闵可夫斯基则因病在 1909 年去世。但是,新人在不断成长。希尔伯特的继承人是 H·外尔(Weyl, 1885—1955)。他是全才的数学大家,他创立的学科数不胜数 例如 数论中的一致分布理论、黎曼曲面、微分流形、算子谱论、偏微分方程、胞腔概念、规范场理论、李群表示、数学物理等等,都在他的手中得到改观。

克莱因的继承者是 R·柯朗(Courant, 1888—1971)。他专长分析 在数学物理方程、差分方法、变分学等领域都有创造性的工作,尤其具有行政组织能力;1929 年,柯朗任哥丁根数学研究所所长。20 世纪最伟大的女数学家 E·诺特 Noether, 1882—1935 在哥丁

根完成一般理想论，创立了抽象代数学科。

冯·诺伊曼曾是希尔伯特在数学基础研究上的助手。

20世纪20年代，前苏联数学学派开始崛起，鲁金（Lusin, 1883—1950）和叶戈洛夫（Egorov, 1869—1931）领导的函数论群体，出现了像柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov, 1903—1987）、亚历山大罗夫（Alexandrov, 1896—1982）那样著名的数学家。他们都和哥丁根有密切联系。柯尔莫哥洛夫常到哥丁根访问，他的成名作《概率论的基本概念》^[4]用测度论和实变函数论方法把概率论建立在完全严格的基础上。此书最初是用德文写成并发表的。亚历山大罗夫则和诺特联系密切。诺特对亚历山大罗夫建立代数拓扑学有关键性的建议。第一次世界大战之后，波兰数学发展迅速。这一学派的中坚人物，如西尔宾斯基（Sierpinski, 1882—1969）、斯坦因豪斯（Steinhaus, 1887—1972）都深受哥丁根学派的影响。

在20世纪20年代，量子力学的诞生，是物理学的又一场革命。哥丁根学派及时为量子力学提供了数学框架。冯·诺伊曼的《量子力学的数学基础》，外尔的《群论与量子力学》成为一个时期的经典著作。^[5]

这一时期数学成就的特色是：无限维空间、抽象的代数方法、几何上的大范围整体性质，显示出与19世纪的数学在研究对象和研究方法上有了根本的差别，而以三个数学新分支的形成成为重要标志：

(1) 泛函分析

它起源于希尔伯特的抽象积分方程理论，其中使用了由无限维正交系所生成的完备空间，现在称之为希尔伯特空间。冯·诺伊曼正是利用这一理论为量子力学提供了数学框架（1929年）。此外，波兰的S·巴拿赫（Banach, 1892—1945）提出了赋范空间，发展了其上的算子理论。

(2) 抽象代数

以诺特于1926年发表的一般理想论为主要标志。在汉堡大学的E·阿廷（Artin, 1898—1962）也做出了开创性的工作。范·德·瓦尔登（Van. der Waerden, 1903—）于1932年出版的《代数学》

是抽象代数早期工作的总结。

(3) 拓扑学

其基本思想可导源于庞加莱于 1896 年所写的《位置分析》。由于康托集合论的影响，研究数列和函数各种收敛性的点集拓扑学随之产生，其代表作是德国数学家豪斯多夫 (Hausdorff, 1868—1942) 于 1913 年完成的《集论纲要》。但是，意义更为重大的几何拓扑学由苏联的亚历山大罗夫和瑞士的 H·霍普夫 (Hopf, 1894—1971) 合作完成。他们合写的《拓扑学》(1935 年) 是拓扑学最早的经典著作。与此同时美国的 S·莱夫谢兹 (Lefschetz, 1884—1972), J·W·亚历山大 (Alexander, 1888—1971) 和 H·M·莫尔斯 (Morse, 1892—1977) 分别以拓扑不动点理论，曲面同调论和临界点理论为拓扑学增色。在 20 世纪 20 年代的美国，拓扑学的研究是在世界上领先的少数学科之一。1930 年，比利时的德·拉姆 (De Rham, 1903—1969) 给出高维微分流形上微分形式和上同调性质的关系，是一项重要的成就。

1933 年，柏林大学、哥丁根大学等德国一流大学的校园内贴出告示，让一切犹太人离开学校。德国数学就此被断送。

3. 反法西斯战争时期的数学 (1933—1945)

1930 年以后，德国政局动荡，法西斯的阴影笼罩欧洲。冯·诺伊曼首先觉察到未来的变化，于 1930 年到了美国的普林斯顿大学。此时，美国企业家资助成立的普林斯顿高等研究院刚刚成立。1933 年之后，研究院首批聘请的 6 位研究教授是爱因斯坦、外尔、冯·诺伊曼以及美国数学家 J·W·亚历山大、H·M·莫尔斯和研究工作的组织者 O·维布伦 (Veblen, 1880—1960)。这份名单预示着普林斯顿将是未来的世界数学中心。同时到达美国的有柯朗、E·诺特、阿廷，数学基础方面的天才 K·哥德尔、概率论专家 W·费勒 (Feller) 分析学家 G·波利亚 (Polya) 和 G·切戈 (Szegő) 等等。那时美国正值经济大萧条时期，大学的经费相当困难，在维布伦等的努

力下，美国容纳了这批精英人士，使美国数学迅速达到世界的顶峰。与此对照，德国数学一蹶不振。L·比贝巴赫（Bieberbach, 1886—1982）因提倡“日耳曼数学”而臭名昭著。富有数学才华的泰希穆勒（Teichmüller, 1913—1943）忠于希特勒而死于战场。

数学家们积极投入反法西斯战争，并促进了数学的发展。

1940年，英国和美国海军为了对付德国的潜艇威胁，发展了运筹学。这种旨在提高设备能力和使用效率的学问，战后大量用于经济部门。1938年苏联的L·康特罗维奇（Kantorovich, 1912—1986）发明线性规划的单纯形解法。战后美国的丹泽（Dantzig, 1914—）独立发现了该法，并在经济部门推广使用，有极高经济效益。

1942年，苏联的柯尔莫哥洛夫和美国的N·维纳（Wiener, 1894—1964）分别研究火炮的自动跟踪，形成随机过程的预测和滤波理论。1948年维纳写成《控制论》一书开辟了新的学科。

1939年开始英国数学家A·图灵（Turing, 1912—1954）帮助英国情报部门破译德军密码成功。

1944年冯·诺伊曼发展对策论，并用于太平洋海战。美国政府组织的AMP（Applied Mathematics Panel 应用数学小组）吸收了大批数学家参与工作。柯朗和他的助手研究喷气式飞机，水下爆炸。代数拓扑学家惠特尼（Whitney, 1907—1989）曾研究空中发射火箭。G·伯克霍夫（Birkhoff, 1912—）负责考察水下弹道学问题。代数学家S·麦克莱因（MacLane, 1909—）曾是AMP的技术代表。统计学家沃尔德（Wald, 1902—1950）为节约实弹射击试验的弹药而提出“序贯分析”方法。出生于波兰的数学家S·M·乌拉姆（Ulam, 1909—1984）参加原子弹的研制，并在计算和估计中发挥了关键作用。数学家的这些努力，对于提高数学在国家和公众心目中的地位，有十分重要的作用。

在应用数学迅猛发展的同时，纯粹数学也在继续前进。最引人瞩目的是法国的布尔巴基学派。当德国数学衰落之时，以J·迪厄多内（Dieudonné），A·维伊（Wiel）为代表的一批法国年轻数学家，冲破“函数论王国”的束缚，力图以结构主义的观点整理全部数学，

1939年出版《数学原本》第一卷^[6]。他们的观点在第二次世界大战之后影响巨大。

拓扑学继续迅猛发展。同伦论和同调论取得长足进步。分析学继续是数学的主体，但是代数学、微分几何学正在成为现代数学的主流学科。此时最重要的结果有：O·扎里斯基(Zariski, 1899—1986)将意大利学派的代数几何学严格化；陈省身于1945年证明高维的高斯-博内公式，完成大范围微分几何的奠基工作；L·施瓦茨(Schwarz, 1915—)提出广义函数论；冯·诺伊曼、I·M·盖尔范德创建的算子代数和赋范环论；庞特里雅金发展“连续群论”；英国的哈代，苏联的维诺格拉多夫，中国的华罗庚继续在解析数论上创造新的成果；费勒、柯尔莫哥洛夫、辛钦等建立的随机过程理论；冯·诺伊曼和乌拉姆创立的蒙特卡洛方法，在理论和实践上都有重大意义。

第二次世界大战期间的科学成果中，对数学影响最大的，当然是电子计算机的产生。冯·诺伊曼在这一影响人类历史进程的工作中起了关键的作用。

4. 美苏冷战时期的数学争雄（1945—1980）

第二次世界大战结束之后，美国和苏联分别代表西方和东方国家集团，进入了长达几十年的冷战时期。自20世纪80年代苏联进入戈尔巴乔夫时期后，冷战渐渐淡化，形成世界多极的态势。从数学上看，战后的几十年，也是美苏争雄的局面。普林斯顿高等研究院和莫斯科大学始终是世界两大数学中心。

五六十年代，是战后的恢复发展期。义务教育的普及，高等教育的大发展，为数学家们造就了极好的就业局面。数学家的人数大量增加，数学论文的数目呈爆炸之势，新的数学学科层出不穷。人们感叹，在冯·诺伊曼和外尔于20世纪50年代先后去世之后，能够总揽数学全局的数学家，似乎已经不会再有了。只有1987年去世的柯尔莫哥洛夫也许是一个例外。

尽管文献浩如烟海，重要的数学工作仍然十分令人注目。^[7]这里

选取 9 项，当然是一些不完整的罗列：

- 连续群的解析性。即每一个局部欧氏群一定是李群。这一希尔伯特第五问题于 1952 年获得完全解决。
- 丢番图方程是可解的。在美国女数学家 J·罗宾逊工作的基础上 1970 年由苏联的马蒂塞维奇 (Matiasевич) 解决了这一希尔伯特第十问题。
- 阿蒂亚 (Atiyah)-辛格 (Singer) 指标定理。这是将一般流形的拓扑结构和其上微分算子的核空间维数联系起来的深刻结果。(1963 年)
- 动力系统的 KAM 定理。由柯尔莫哥洛夫、阿诺尔德 (Arnold) 莫瑟尔 (Moser) 三人的工作所构成。现已成为三体问题，哈密顿系统研究的经典成果。(1954 年 ,1963 年)
- 大范围微分几何成为表述规范场论的数学工具。这是陈省身和杨振宁分别从数学和物理学上所得成果的统一。(1975 年)
- 有限单群分类的完全解决。(1980 年)
- 在八维空间中有一个流形，和七维空间中的单位球面同胚但不微分同胚，即所谓米尔诺 (Milnor) 怪球。(1956 年)
- 四色问题的电子计算机证明。 1978 年由美国 W·黑肯 (Haken) 等在伊利诺伊大学完成。
- 选择公理和 ZF 公理体系独立。1963 年由 P·柯亨 (Cohe) 得到。

战后数学上最大的变化是电子计算机的使用。数学由此变成了一种技术——数学技术。科学计算成为继理论构建，实验考察之后的第三种科学研究方法。军事指挥，飞机设计，原子弹爆炸实验，化学反应，人口计划，气象预测，卫星定位，石油勘探，企业管理，一切都可以运用数学模型在计算机上进行。数学为人类创造了巨大的财富，节约了无数的资源，这一切很少被公众所充分了解。以数学工作获得诺贝尔经济学奖却已是十分常见的事情。

在这基础上，许多纯粹数学得到料想不到的应用。有限域和密

码学 数论和近似计算 纤维丛理论和规范场 拉东变换和 CT 扫描, 拓扑学用于 DNA 分子结构。同时, 由于计算机科学和人工智能的需要, 组合数学得到了迅猛的发展。计算复杂性形成了一门艰深的理论。寻求多项式算法成为数学家注意的焦点。1979 年苏联哈奇扬(Hachijan) 提出线性规划的椭球算法, 以及后来的卡玛卡 (Kamarka) 算法都是轰动一时的新闻。起源于实际, 却又大胆创新的学科相继涌现, 如模糊数学、非标准分析、突变理论。它们的创立者都认为自己的工作是一场革命, 但这需要时间的检验。

总之 第二次世界大战以后 数学向科学‘女王’和科学‘侍女’两极发展。一方面 纯粹数学继续向高、深、难的方向进军 范畴、流形、纤维丛、多复分析、代数簇、上同调、鞅、分枝等新领域不断开拓。数学研究的对象从低维空间发展到高维空间以至无限维空间, 函数和方程的研究从单变量发展到多变量, 已经大体完成了的线性数学走向非线性数学, 确定性数学和随机现象的数学彼此融合和渗透。纯粹数学仍然保持着至高无上, 完全正确的华贵形象。另一方面, 数学又极力为其他科学服务, 为人类的生活服务, 走近常人的生活, 使得应用数学广泛渗入到各门学科中去, 包括社会科学, 科学数量化的进程可以说无孔不入 数学确已成为人们忠实的科学‘侍女’。

5. 数学多极化时代来临 (1980 年至今)

进入 1980 年年代, 世界的政治经济出现多元化的格局。数学也不例外。一个大体的描述是: 美苏继续领先, 西欧紧随其后, 日本正在迎头追赶, 中国和其他地区正在迅速发展。1991 年苏联解体使其数学有所削弱, 但独联体特别是俄罗斯的数学基础和研究实力仍然十分强劲 不可低估。

经过第二次世界大战以后的发展, 数学家队伍有了空前的扩大, 数学工作市场有饱和的迹象。纯粹数学研究仍会保持前进的态势, 但要求有更高的研究水平, 产生更有意义的成果。一些“无病呻吟”、“滥竽充数”的数学论文将会受到冷落, 优胜劣汰的法则已经比过去

更加严厉地在数学界通行。这期间一个最激动人心的事件是费马大定理的证明。1983年，德国的法尔廷斯(Faltings)证明费马定理如果有解，至多为有限个。1995年英国的怀尔斯(Wiles)在前人工作的基础上最终证明费马大定理是正确的。这是人类智慧的伟大象征，也是20世纪末一项最高的数学成就。

数学家大批转向计算机科学和人工智能领域，乃是就业市场自然调整的结果。同时，数学家利用计算机的威力，扩大和延伸了数学家的脑和手。非线性数学的发展得益于此。80年代以来，混沌理论、分形几何、孤立子解、小波分析等数学热点，没有不和计算机发生联系的。

数学和物理学层面的交融，仍然是数学发展的重大源泉。1987年英国的唐纳森(Donaldson)在杨-米尔斯方程的求解过程中，发现四维空间中有一种流形，具有两种不同的微分结构，大出人们的意料之外。物理学家威顿(Witten)用物理学方法推演数学问题，虽然没有严格证明，却得到了正确的数学结果。希尔伯特的形式主义数学哲学，布尔巴基的结构主义数学观，在威顿的工作面前，显得无能为力。数学中经验主义是否正在复兴，只有猜想没有证明的“理论数学”是否允许存在的问题^[8]，正严肃地摆在数学界的面前。

6. 20 世纪的中国现代数学

中国的现代数学的开端可以追溯到徐光启(1562—1633)和利玛窦(R. Matteo, 1552—1610)于1607年翻译出版欧几里得的《几何原本》。清康熙帝玄烨曾经热心学过一些西方数学，此后少人问津。清末李善兰(1811—1882)曾和伟烈亚力(W. Alexander, 1815—1887)合译美国数学教材《代微积拾级》(1859年)。李善兰恒等式至今仍有价值。1898年京师大学堂成立，先后派遣一些学生到日本学习数学。其中有冯祖荀(1880—1943)，后来长期担任北京大学数学系主任。清末到美国学习数学的胡敦复(1886—1978)，郑桐荪(1887—1963)秦汾(1887—1971)起过一些先驱作用。1909—1911年的三

年中。因美国退回部分庚子赔款而选送三批中国留学生到美国留学。以学习数学而著称的有胡明复（1891—1927）他于1917年在哈佛大学获得博士学位——中国第一位数学博士。姜立夫（1890—1978）于1911年到美国，1918年也在哈佛大学获得博士学位。与此同时或稍后何鲁（1894—1973）与熊庆来（1893—1969）到欧洲研习数学。他们回国后推动了中国各大学数学系的创办，确立了中国现代数学的基础。

30年代的清华大学数学系实力雄厚。特别是陈省身（1911—）和华罗庚（1910—1985）两位青年学者的到来，使中国数学开始走向世界。江泽涵（1902—）致力于北京大学数学系的发展。从日本回来的陈建功（1893—1971）和苏步青（1902—）建设浙江大学数学系，使之成为中国数学发展的又一基地。到了抗日战争时期，西南联合大学已拥有陈省身、华罗庚、许宝騄（1910—1970）这样具有很高声誉的数学家，中国现代数学开始接近世界先进水平。

1949年之后，中国数学界的规模迅速扩大，数学门类逐渐齐全，并能够为国民经济和国防事业服务。华罗庚和吴文俊（1919—）等大批旅外数学家回国。陈景润（1933—1996）等年轻数学家成长很快，出现了一批在现代数学研究上卓有贡献的中国数学家，他们先后当选为中国科学院院士。1966年开始的“十年动乱”使中国数学前进的势头锐减，以至瘫痪。80年代以来经过恢复时期新一代的数学家成长起来。从1986年开始，中国数学家吴文俊、田刚、林芳华、张恭庆、马志明、励建书、李俊等先后应邀在国际数学家大会上作45分钟报告。后来被聘为中国科学院外籍院士的陈省身获沃尔夫奖，丘成桐（1949—）获菲尔兹奖，使中国数学界受到鼓舞。“21世纪数学大国”是中国数学界的共同愿望，经过几代人的不懈努力，这一理想正在逐步变为现实。

展望未来，我们需要总结过去百年世界数学走过的道路。纯粹数学研究中的原创性，开辟新学科新方向意识和能力，以及在各行各业中数学意识的增强，克服国内应用数学发展的不平衡，也许是中国数学面临的严峻挑战。

参考文献

- [1] D·希尔伯特. 数学史译文集. 上海科学技术出版社, 1981.
- [2] M·Klein. 古今数学思想, 上海科学技术出版社, 1981.
- [3] B. C. Berndt. Ramanujan's Note Books. I. II. III. Springer-Verlag, 1985—1991.
- [4] A. N. Kolmogorov. Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, 1932.
- [5] J. von Neumann. Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Springer, 1932.
H. Weyl. Gruppen Theorie and Quantenmechanik, S. Hirzel, Leipzig. 1928.
- [6] N. Bourbaki. Element de mathematique, Livre I. Actual, Scient, Etinbuser, 1939.
- [7] J·H·尤因等. 1940年以来的美国数学. 美国数学月刊, Vol. 83. No. 7. 1976.
(中译本. 世界科学译丛. 第一辑, 1979.)
- [8] A. Jaffe and F. Quinn, Theoretcal Mathematics: Toward a culture synthesis of mathematics theoretcal physics, Bull Amer Soc, 29(1993) 11—13.

第二节 展望数学的明天

常常听说的“第三次数学危机”，不过是哲学家在研究数学大厦基础时所作的“惊人之笔”。其实数学在一日千里地发展，甚至让你头晕目眩。大约从 20 世纪下半叶开始，数学进入新的高峰。数学观也随之发生改变。作为一名数学教师，如果不能对现代数学的发展有比较清醒的认识，其数学教学就会迷失方向。

2000 年 8 月，国际数学教育大会在东京召开。大会主席、日本著名数学家藤田宏在大会报告中指出，迄今为止的数学，经历了四个高峰：

- 以欧几里得《几何原本》为代表的古希腊公理化数学。
- 以牛顿发明微积分为开端的无穷小算法数学。
- 以希尔伯特为代表的形式主义数学。
- 以计算机技术为代表的信息时代数学。

信息时代的数学已经来临了，我们的教学思想是否跟得上时代呢？

当然，展望未来是一件危险的事情，往往十说九不准。我们还是从现在开始，先来认识数学，认识数学的今天。

数学是什么？好像很清楚，又觉得不大清楚。自古以来，人们受教育的最低要求就是“会写信 会算账 不做睁眼瞎”。这算账便是数学。进入 20 世纪以后，全世界的基础教育都以母语和数学为两门最重要的课程。数学的内容除算术之外，还有代数、几何和三角。我国规定的九年制义务教育中，数学课年年有，还要年年考。这样说来，人们应该很了解数学才是。但是，尽管数学课这样多，人们却总觉得数学离自己很远，很神秘，数学很难学，数学没有用……。这有两方

面的原因，首先是数学本身的特点，它所具有的形式化抽象特征，使学生难以从现实生活中找到它的原型；另一方面，我国数学教育观上的偏颇，加重了数学远离现实的印象，造成了更多的误解。

因此我们在探讨数学的明天时先要从“什么是数学”这样的基本问题开始。

1. 数学在公众中的形象

数学是人类活动的结果，具有明显的社会性。从科学史家的眼光来看，人类社会的每一次重大进步，都伴随着思想革命，而数学的变革是其中主要的标志之一。奴隶社会阶段，古希腊文明是集中代表以逻辑演绎为特征的希腊数学灿烂辉煌集大成的《几何原本》对人类的影响至今不衰。近代的资本主义文明，以牛顿的万有引力学说为标志由此产生的微积分勇敢地跨过了“无限”的门槛可说是人类思辨能力的高峰。法国大革命带来了伟大的法国数学学派。20世纪最伟大的科学革命——爱因斯坦的相对论，是在黎曼几何的基础上建立起来的。伟大的数学家冯·诺伊曼成为计算机科学的奠基人，它的影响已经超越了数学学科本身，也超越了电子计算机本身，成为人类进入信息时代的象征。

数学的价值也逐渐为政府所了解。1998年美国用于数学的预算达到1亿8千万美元，其中美国自然科学基金会的资助为9700万美元，约占每年全部自然科学基金总额的4%。据新财政年度的预算，数学方面的基金总额将增至1亿9千5百万美元。我国每年用于数学的资助额度缺乏资料，可以统计的是中国自然科学基金会对数学的支持从1986年的100万增加到1998年的2千4百万，12年间增长了24倍。

但是数学科学的价值并不能直接从日常生活，生产技术，经济发展中立刻体现出来，而要经过一个漫长的过程。所以，数学和公众之间存在着一层隔膜。著名的例子是诺贝尔科学奖中没有设立数学奖。在诺贝尔奖桂冠日益受传媒重视的时候，数学失去了宝贵的一