现代控制理论

李　斌　何济民　主　编

重庆大学出版社

内 容 简 介

本书从多变量系统建模、性能分析和系统综合角度阐述了现代控制理论的基础知识和方法。

全书共分5章和一个附录,分别介绍了状态空间法的基本概念、多变量系统的时域频域建模方法、系统状态转移矩阵的概念和系统方程求解的方法、系统能控能观性的概念、判据以及系统结构分解定理、系统的稳定性概念及相关判定定理,最后介绍了多变量系统综合的基本方法。各章还介绍了用MATLAB实现本章理论、算法的方法和函数。

本书可供大专院校自动控制及相关专业师生选用,也可供有关科研及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论/李斌,何济民主编. —重庆:重庆大学出版社,2003.8
(自动化专业本科系列教材)
ISBN 7-5624-2834-4

Ⅰ.现… Ⅱ.①李…②何… Ⅲ.现代控制理论—高等学校—教材 Ⅳ.0231

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第054910号

现代控制理论

李 斌 何济民 主 编

责任编辑:姚正坤 版式设计:彭 宁
责任校对:蓝安梅 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行
出版人:张鸽盛
社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内
邮编:400030
电话:(023) 65102378 65105781
传真:(023) 65103686 65105565
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)
全国新华书店经销
自贡新华印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:16.75 字数:418千
2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷
印数:1—4 000
ISBN 7-5624-2834-4/TP·389 定价:22.00元

本书如有印刷、装订等质量问题,本社负责调换

版权所有 翻印必究

前言

本书介绍的现代控制理论属现代控制理论的基础部分。它是自动控制原理向多变量控制系统理论的提升，是进一步学习现代控制理论和先进控制理论的必备基础。

在 20 世纪 70—80 年代，国内外出版过许多介绍现代控制理论的优秀书籍和教材，对现代控制理论知识的传播和普及产生了巨大的影响。随着科学技术的进步，特别是计算机科学技术的发展，系统的计算机辅助分析与设计软件已趋成熟，它正改变着系统分析与设计的实现手段。同时，它也改变着人们的思想观念。这些变化顺应时代潮流，符合改革发展要求。在此背景下，由重庆大学出版社组织，多所高校教师联合编写了这本《现代控制理论》课程本科教材。

在本书的编写过程中，我们试图做到：

1．强调基本概念，引导学生深刻理解相关内容的实质。为此，在正文中，我们力求使概念的叙述清晰、完整；在附录中，还列出一些重要概念及结论，加深学生对正文相关内容的理解。

2．增补 Matlab 软件相关内容。目的，一是为使学生尽快了解当今自动化领域系统分析和设计先进工具，熟悉使用方法。同时，使学生在已掌握基本运算技能的基础上，摆脱繁重计算，集中精力于对基本概念、内容的理解和掌握上。

3．在预备知识方面，本教材重点放在基本概念及其几何意义的理解上。培养学生运用几何与代数的思想去观察事物和分析问题的能力。

全书共分 5 章及一个附录，绪论由重庆大学自动化学院李斌副教授编写；第 1 章由陕西工学院电气工程与自动化系何济民副教授、重庆大学自动化学院李斌副教授联合编写；第 2 章由重庆大学自动化学院盛朝强副教授编写；第 3 章由桂林电子工业学院机电与交通工程系王红副教授编写；第 4 章由长安大学信息工程学院自动化系巨永峰教授编写；第 5 章由陕西工学院电气工程与自动化系何济民副教授编写；附录由重庆大学自动化学院李斌副教授编写。

在本书大纲拟订及编写过程中，许多方面得益于郑大中教授、刘豹教授，以及重庆大学自动化学院吴志清副教授等人的著作。另外，重庆大学出版社对本书的编写给予了大力的支持。同时，也得到各编者所在学院领导的关心和支持。在此编者一并表示感谢！

由于编者水平有限，书中错误和不当之处在所难免。在此，编者真诚地欢迎读者和同行批评指正。

编者

2002 年 12 月

目录

绪 论 …… (1)
第 1 章 动力学系统的状态空间描述 …… (6)
1.1 动力学系统中状态的基本概念 …… (6)
1.2 根据系统的物理机理建立状态空间描述…… (18)
1.3 根据系统的输入输出关系建立状态空间描述 …… (24)
1.4 离散系统的状态空间描述…… (30)
1.5 等价变换及特征值标准形…… (31)
1.6 组合系统的状态空间表达式…… (49)
1.7 从状态空间描述求传递函数阵…… (53)
1.8 多变量系统的其他描述…… (59)
1.9 系统模型的计算机表示及其转换方法…… (70)
习题 …… (82)
第 2 章 线性系统的运动 …… (86)
2.1 线性系统的自由运动…… (86)
2.2 线性系统的一般运动…… (94)
2.3 连续系统的状态空间描述的离散化…… (96)
2.4 线性离散时间系统的一般运动…… (97)
2.5 用 MATLAB 求取线性系统响应的方法 …… (101)
习题 …… (105)
第 3 章 线性控制系统的能控性和能观测性 …… (108)
3.1 能控性和能观测性的概念 …… (108)
3.2 线性连续时不变系统的能控性 …… (110)
3.3 线性连续时不变系统的能观测性 …… (118)
3.4 线性时不变离散系统的能控性和能观测性 … (123)
3.5 线性时变系统的能控性与能观测性 …… (130)
3.6 线性系统能控性与能观测性的对偶关系 …… (133)
3.7 能控规范型和能观测规范型 …… (135)
3.8 传递函数中零极点对消与状态能控性和能观测性之间的关系 …… (140)
3.9 线性系统结构按能控性、能观测性的分解…… (145)

3.10 用 MATLAB 分析系统能控性、能观测性的方法 …… (156)
习题 …… (161)
第 4 章 系统的运动稳定性 …… (165)
4.1 BIBO 稳定性 …… (166)
4.2 李雅普诺夫稳定性定义 …… (168)
4.3 李雅普诺夫第一法 …… (171)
4.4 李雅普诺夫第二法 …… (174)
4.5 线性系统稳定性分析 …… (181)
4.6 非线性系统稳定性分析 …… (186)
4.7 线性定常离散系统稳定性分析 …… (192)
4.8 MATLAB 在系统稳定性分析中的应用 …… (194)
习题 …… (196)
第 5 章 线性定常系统的综合 …… (198)
5.1 线性反馈控制系统的基本结构 …… (198)
5.2 带输出反馈系统的综合 …… (200)
5.3 带状态反馈系统的综合 …… (204)
5.4 状态重构与状态观测器的设计 …… (210)
5.5 带观测器状态反馈系统的综合 …… (218)
5.6 状态反馈下闭环系统的稳态特性 …… (221)
5.7 解耦控制系统的综合 …… (225)
5.8 MATLAB 在线性系统综合中的应用 …… (234)
习题 …… (240)
附 录 …… (242)
Ⅰ 线性空间与线性变换 …… (242)
Ⅱ 线性代数方程组及系统状态空间的相关结论 …… (246)
Ⅲ 多项式矩阵理论的基本知识 …… (248)
Ⅳ 二次型 …… (255)
附录习题 …… (257)
参考文献 …… (260)

绪　论

(1) 自动控制理论的发展简史

自动控制理论是关于自动控制系统构成、分析和综合的理论。任务是研究自动控制系统的运动规律及改变这种运动规律的可能性和途径,为设计高性能的自动控制系统提供必要的理论手段。它是在人类对自动控制技术长期探索和大量实践基础上产生的。其发展受到数学、物理(力学)等学科的推动;计算机科学和技术的发展,极大地提高了自动控制理论的实现水平,加速了自动控制理论的发展和应用。

自动控制理论分为经典控制理论和现代控制理论。

经典控制理论(20 世纪 30 年代—50 年代)的研究对象是单输入、单输出(SISO)控制系统,特别是线性定常系统。它以系统的输入、输出特性——传递函数作为描述系统的数学模型,数学基础是拉普拉斯变换;采用频域法、根轨迹法分析系统性能,设计控制装置,主导方法是频域法。研究的主要问题是系统运动的稳定性,时域/频域中系统运动的特性,以及控制系统设计原理和校正方法。内容包括:线性控制理论、采样控制理论、非线性控制理论。在应用中很有成效,满足了这一时期工业生产和军事技术发展的需要。

由于第一次工业革命的推动,18 世纪,英国工程师 J. 瓦特发明的离心式调速器在蒸汽机转速控制上得到普遍应用,开始出现研究控制理论的需要。英国数学家 E. J. 劳思、德国数学家 A. 胡尔维茨在 1875 年和 1895 年分别提出了直接由代数方程系数判断稳定性的准则。直到 20 世纪 20 年代,各种调节装置、控制装置才广泛用于解决局部控制问题,由于控制理论的发展缓慢,主要分析与设计工具仍然是微分方程和稳定代数判据。随着通讯技术的发展,1932 年,美国物理学家 H. 奈奎斯特运用复变函数理论的方法建立根据频率响应判断反馈的系统稳定性准则,奠定了频域法的基础。随后,H. W. 波德和 N. B. 尼科尔斯在 20 世纪 30 年代—40 年代加速了频域法的发展,经典控制理论开始形成。

由于第二次世界大战期间军事技术的发展,以及战后把这些技术向机械、航空、航海、化工等领域推广,使反馈控制系统的设计与研制有了很大进展。1948 年,美国科学家 W. R. 埃文斯研究了系统参数对反馈系统稳定性及运动特性的影响,并提出根轨迹法。20 世纪 40 年代末—50 年代初,频域法、根轨迹法被推广用于采样控制系统和简单的非线性系统,标志着经典控制理论已经成熟,并得到广泛应用。

现代控制理论是为研究多输入、多输出(MIMO)时变式非线性系统的控制问题而逐步发

展起来的。它对控制系统的分析和设计主要是通过对系统状态变量的描述来进行，基本方法是状态空间法，两个核心是最优控制理论和最优估计理论，数学基础几乎包括数学的各个分支。生成的算法更适合于在计算机上进行，从而为设计和构造具有指定性能指标的最优控制系统提供了可能性，它适应了综合自动化的发展需要。

20 世纪 50 年代中期空间技术兴起，美国和前苏联拟订实施包括航天运载器，人造卫星、空间探测器、宇宙飞船在内的一系列航天计划，急需解决航天器的发射、轨道、导航制导，测量跟踪与控制问题。这些系统表现出多变量、时变、非线性的特征。控制精度要求高，控制问题复杂，采用经典控制理论难以解决，迫切需要建立新的控制理论和方法。

对于这类系统的描述和求解问题，数学、物理、力学等学科的发展成果已经为此奠定了坚实的基础；20 世纪 50 年代后期，迅速发展的计算机技术，使人们摆脱了计算量大、计算复杂的束缚，有可能对复杂控制系统作深入研究。20 世纪 70 年代微型计算机的发展，实现了计算机直接参与控制，从根本上改变了控制系统的面貌，极大地促进了控制技术和理论的发展。

1958 年，前苏联科学院院士，数学家 Пи C. 庞特里亚金提出了称之为“ 极大值原理 ”的综合控制系统的新方法；1954 年，美国科学院院士、数学家 R. 贝尔曼创立了动态规划。这些方法改变经典控制理论中以稳定性和动态品质为中心的设计模式，而以系统在整个工作期间的性能作为整体考虑，寻求最优控制规律，从而可以大大改善系统性能。这些研究成果解决了空间技术中出现的复杂控制问题，开拓出控制理论中最优控制这一新领域。1960 年—1961 年，美国数学家、电气工程师 R. E. 卡尔曼和数学家 R. S. 布西考虑到控制问题中所存在的随机噪声影响，建立了卡尔曼-布西滤波器理论，进一步丰富了控制理论的研究内容，扩大了所能处理的控制问题的范围。同时，卡尔曼等人把状态空间法系统地引入控制理论中，为揭示和认识控制系统的特性起了关键作用。其中关于系统结构的能控性、能观性，已成为控制理论中两个基本的概念。1960 年，在美国自动控制联合会第一届年会上，以状态空间法为基础，极大值原理，动态规划，卡尔曼滤波器为核心的分析、设计控制系统的一套新原理和方法被定名为现代控制理论，标志着控制理论进入了一个新的发展阶段。

然而，将这套时域法推广用于复杂工业过程控制时，却遇到诸如建立精确数字模型困难；难以用明显形式规定被控对象行为的性能指标；直接采用最优控制和最优估计理论综合得到的控制器过于复杂、技术上很难实现等障碍。于是，人们将在单变量系统分析、设计中行之有效的频域法向多变量系统推广。20 世纪 70 年代中期，英国自动控制专家 H. H. 罗森布罗克等人创立了多变量频域方法。随着问题范围的扩大和研究的深入，多种学派，多种方法，相互交融，极大地丰富了现代控制理论的内涵，使其不断地向前发展。

随着生产的发展和科学技术的进步，出现了诸如电力系统、交通网络、通讯系统、柔性制造系统、计算机集成制造系统、生态系统、社会经济系统、水资源系统等这样一些规模庞大、结构复杂、地理位置分散的系统，为解决这类信息量大、分散系统的控制问题，人们提出了大系统理论。另一方面，对于一些复杂系统，因缺乏对其内部机制的本质的认识，难于建立数学模型，难于用常规控制理论定量计算、分析，必须采用定量、定性相结合的控制方式。于是，融合了自动控制、人工智能、计算机技术和系统科学等多学科技术成果并适用于这类复杂系统的控制理论、技术——智能控制理论应运而生，从而将自动控制技术推向了崭新的发展阶段。

综上所述，自动控制理论的建立和发展是社会生产发展的需要，是多学科交叉、融合的产物；不仅促进了自动控制技术向广度和深度发展，也对其他科学技术的发展产生着深刻影响。

(2) 现代控制理论的主要内容

现代控制理论研究内容十分广泛, 主要包括以下一些内容:

1) 系统辨识

根据实验得到的系统输入输出时间函数来确定描述系统行为的数字模型, 是现代控制理论的一个分支, 称为系统辨识。它包括两个方面: 系统结构辨识和系统参数辨识。它是解决控制问题的首要工作, 直接决定着控制的成败。因此, 一直是非常活跃的研究领域, 受到高度重视。

2) 线性系统理论

线性系统理论是现代控制理论中最基本和比较成熟的一个分支。主要研究线性系统中状态的控制和观测问题, 基本分析方法是状态空间法。线性系统是人们在一定假设条件下, 从真实系统中抽象出的一种理想模型, 它反映了一大类真实系统内部机制的主要方面。由于其响应具有可叠加性、均匀性, 使研究问题大为简化, 其研究方法和成果, 对复杂系统的研究具有借鉴和指导作用。在线性系统理论的发展过程中, 形成了以加拿大学者 W. M. 旺纳姆为代表的基于几何概念与方法的几何理论学派; 以美国学者 R. E. 卡尔曼为代表的基于抽象代数方法的代数理论学派和以英国学者 H. H. 罗森布罗克为代表的基于复变量方法的频域理论学派。

3) 最优控制理论

它是设计最优控制系统的理论基础, 也是现代控制理论的核心内容之一。主要研究被控系统在给定性能指标实现最优时的控制规律和综合方法。用于综合最优控制系统的主要方法是极大值原理和动态规划。目前, 集中参数最优控制理论和方法已趋成熟; 而分布参数最优控制、随机最优控制、大系统的最优控制仍在研究和发展中。

4) 最优估计理论

构造最优控制系统的一个关键是要获取真实系统的状态信息。研究对受到随机噪声污染的状态测量信号的处理, 做出真实状态的最好估计的理论, 称为最优估计理论。它的数学基础是概率论、数理统计与随机过程, 最有影响的研究成果是卡尔曼-布西滤波器理论。最优估计理论是现代控制理论的另一个核心内容, 改进和完善现有理论和算法, 研究非线性滤波器的设计方法, 是最优估计理论的研究热点。

5) 自适应控制理论

随着受控对象动态特性变化(不确定性) 而改变其控制器自身特性的控制系统, 称为自适应控制系统; 而关于自适应控制系统分析与设计的理论, 则称为自适应控制理论。它主要研究的基本问题是:

①认识受控对象的动态特性(辨识) ;

②构造适应这种特性的控制器;

③用算法实现这种控制器。

自适应控制是控制理论应用于实际的关键问题, 它正朝着自学习、自组织及智能控制等方向发展。

(3) 本书的主要内容

本书主要介绍线性多变量控制系统分析与综合所需的一些基本概念、基本理论和基本方法。内容包括: 状态空间法、多变量频域法基础; 关于系统结构的能控性、能观性、稳定性、最小性等问题; 关于反馈原理、分离原理等基本控制原理; 以及关于极点配置、跟踪、干扰阻塞、解耦

等基本控制问题。作为第 3 章概念的补充,附录中给出了线性系统状态空间结构的若干重要结论。为适应时代发展要求,在本书各章均介绍了 MATLAB 软件实现相关理论、方法的主要函数及指令用法。这些内容是进一步学习现代控制理论所必备的基础。

本书共分为 5 章,加一个附录。

第 1 章　主要介绍系统状态,状态空间和状态空间描述等基本概念;建立线性系统状态空间描述的方法;状态空间描述的非齐异变换。还将介绍线性系统的传递函数矩阵描述、矩阵分式描述的基本概念及获取方法。

第 2 章　介绍线性系统状态空间描述的求解及引入的相关概念。重点是系统状态转移矩阵的概念、性质与计算方法;线性系统运动的一般表达式及意义;以及用 MATLAB 求取系统响应的方法和相关函数。这些内容是对线性系统进行定量分析所用的方法和主要结论。

第 3 章　主要介绍系统的能控性、能观性的基本概念及判别方法;在此基础上介绍系统结构分解定理和意义,以及分解方法,求取最小实现的途径。还将介绍 MATLAB 软件在系统能控性、能观性的判别及结构分解中的应用。

第 4 章　主要介绍分析系统稳定性的李雅普诺夫方法及相关概念,重点是李雅普诺夫稳定性的概念及判稳定理的应用。同时,也介绍了 MATLAB 软件在系统稳定性分析中的应用实例。

第 3、4 两章都是对系统所作的定性分析及相关结论。

第 5 章　主要介绍线性定常系统的综合技术。重点是状态反馈、状态观测器,系统解耦的概念及极点配置的条件和方法;分离原理。并用实例说明了 MATLAB 在系统综合设计中的应用方法。

通过本课程的学习,学生应具备根据给定的被控系统,对常见的控制问题,综合出一个线性多变量控制系统的基本知识和能力。初步学会 MATLAB 中控制工具箱中常见函数的使用,掌握进一步学习现代控制理论中的其他相关课程的基础知识。

(4) MATLAB 软件简介

随着控制理论的迅速发展,理论体系的规模越来庞大;控制精度要求越来越高,控制算法越来越复杂,使得控制器的设计越来越困难,仅靠简单工具绘图、计算已很难完成分析和设计任务。于是出现了控制系统的计算机辅助设计(CACSD——Computer-Aided Control Design)方法,并受到控制界的普遍重视。各类软件包、人机交互式系统、仿真语言等 CACSD 软件相继问世,目前国际控制界广泛使用的这类软件就有几十种之多。1980 年,美国学者 Clever Moler 博士等人推出的交互式 MATLAB(Matrix Laboratory 矩阵实验室)语言,经十多年的发展,以其使用方便、直观和强大的功能成为目前世界控制界最流行的语言。

MATLAB 是一种用于科学与工程计算的高性能语言。它集科学计算、可视化、程序设计于一体,对问题的描述与求解采用与常见的数学表达式类似的表示,使用简便。典型应用包括:

1) 数学符号运算与数值计算;

2) 算法开发;

3) 建模、仿真与原型创建;

4) 数据分析、发掘与可视化;

5) 科学与工程制图;

6) 应用开发及图形用户界面创建。

最初, MATLAB 是作为使用特征值分析软件包 EISPACK 和线性代数软件包 LINPACK 的接口。基本的数据单元是矩阵, 特别适合处理带有矩阵、向量公式的工程计算问题, 编程方便、快捷。如今, MATLAB 使用由矩阵软件包 LAPACK 和数值计算软件包 ARPACK 开发的软件为核心, 成为矩阵计算软件的典范。并在多年的发展中积聚了许多用户开发的程序。在国外高校中, MATLAB 已成为数学、工程与科学类初、高级课程的教学工具; 在工业中, 它又是高生产力分析、开发与研究的首选工具。

现在, MATLAB 已成为一个系列。它包括 MATLAB 主程序和由多个领域专家开发的专业工具箱, 应用范围扩展了。给广大的用户学习和使用专业技术知识带来极大的帮助和方便。这些领域包括: 自动控制、信号处理、神经网络、模糊逻辑、小波分析、系统仿真等。

为适应时代发展要求, 根据现代控制理论课程和 MATLAB 的特点, 本书将结合各章内容适当介绍 MATLAB 控制工具箱中一些常用函数的使用方法, 作为理论教学的补充。希望读者抓住学习重点(概念、方法、结论) , 学以致用, 开拓眼界。

第 1 章
动力学系统的状态空间描述

在现代控制理论中状态空间分析是研究最优控制、滤波问题和系统辨识的基础,而有关状态、状态空间的概念以及建立系统的状态空间表达式等问题又是状态空间分析的基本内容。因此,本章内容可以认为是学习现代控制理论所必需的基础知识。

运用状态空间分析系统,首当其冲的任务是选取状态变量和建立系统的数学模型——状态空间描述对于同一个系统,其状态变量的选取是不惟一的,从而系统的状态空间描述也是非惟一的。状态变量的不同选取在一定程度上可以看作是状态空间的坐标变换。因此,借助等价变换可以获得状态空间表达式的各种标准形。本章将详细介绍对角线标准形和约当标准形。至于其他一些标准形,留在后面几章中介绍。

状态空间方法是一种时域分析方法。为了建立多输入多输出系统的频域描述,在本章将讨论如何从系统的状态空间表达式导出多输入多输出系统的传递函数阵。

1.1 动力学系统中状态的基本概念

1.1.1 动力学系统

从理论上说,凡行为能用一个或一组微分方程式差分方程描述的系统称为动力学系统。这类系统具有储存输入信息的能力。

自然界存在输入输出关系完全不同的两类系统。一类系统是只要知道了输入信息,便可立即获得输出信息,即输入输出关系是一个代数方程。图 1.1(a) 所示的电阻电路便属于这一类系统。只要输入电压 u(t) 一经确定,其输出电流 i(t) 便为

$$i(t) = \frac{u(t)}{R} \tag{1.1}$$

另一类系统则不然。给出了输入信息,还不能确定输出信息。为了获得确定的输出信息,除给定输入信息外,还必须知道该系统的一组初始信息。或者说,描述这类系统输入输出关系的数学表达式是一个微分方程。图 1.1(b) 所示的电感电路属于这类系统。

对于该电路其描述输入输出关系的微分方程是



（a）电阻电路　　（b）电感电路

图 1.1　两种不同的电路

$$L\frac{di(t)}{dt} = u(t) \tag{1.2}$$

故输出电流 i(t) 和输入电压 u(t) 的关系为

$$i(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{L}u(\tau)\,d\tau + I_0 \tag{1.3}$$

式中 I_0 是初始时刻 t_0 在电感 L 中流过的初始电流。

从物理上看，式(1.3) 中的初始电流 I_0 是由于电感元件具有储存信息的能力，它把初始时刻 t_0 以前的输入信息以磁能的形式储存在电感线圈中。按照这个看法，其初始电流 I_0 为

$$I_0 = \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{L}u(\tau)\,d\tau \tag{1.4}$$

把上式代入式(1.3)，有

$$i(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{L}u(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{L}u(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{L}u(\tau)\,d\tau \tag{1.5}$$

显然，对于诸如图 1.1(b) 电感元件的这类系统来说，在 t 时刻上的输出信息，不但依赖于[t_0, t] 时间区间内所施加的输入信息 u(t)，而且还依赖于初始时刻 t_0 以前的输入信息。这和力学中质点动力学模型相似。对于一个质量为 m 的质点，其动力学方程由牛顿第二定律所描述

$$ma(t) = F(t) \tag{1.6}$$

即

$$m\frac{dv(t)}{dt} = F(t)$$

这样

$$v(t) = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} f(\tau)\,d\tau + v_0 \tag{1.7}$$

式中　m—— 质点的质量；

a(t) —— 质点在 t 时刻的加速度；

v(t) —— 质点在 t 时刻的速度；

f(t) —— 在[t_0, t] 时间区间内作用在质点 m 上的作用力。

对比式(1.3) 和式(1.7)，两者完全类似。所以，把能够储存输入信息的系统称为动力学系统是十分恰当的。

为使叙述简单，今后把输入信息简称输入，用符号 u(t) 表示；输出信息简称输出，用符号 y(t) 表示。

1.1.2 动力学系统的状态

从“状态”这个词的字面意思上看，就是指系统过去、现在和将来的运动状况。例如上述质点的运动，其路程 $s(t)$ 为

$$s(t) = s(t_0) + v(t_0)t + \frac{1}{2}at^2 \tag{1.8}$$

从式(1.8)可以看出，若要确定某一时刻的 $s(t)$，除必须给出作用力 $f(t)$ 外，还必须知道初始位置 $s(t_0)$ 和初始速度 $v(t_0)$。或者说，该质点每一时刻的状况，必须用该时刻的位置和速度这两个物理量才能完全地加以描述。于是，位置 $s(t)$ 和速度 $v(t)$ 这两个变量便可用来完全地表征该质点的运动状态。下面给出状态、状态向量和状态空间的定义。

所谓动力学系统的状态，是指完全地描述系统时域行为的一个最小变量组。该变量组中的每个变量称为状态变量。

所谓完全地描述，是指如果给定了 $t = t_0$ 时刻这组变量的值以及 $t \geq t_0$ 时输入的时间函数，那么系统在 $t \geq t_0$ 的任何瞬时的行为就完全地确定了。所谓最小，是指这个变量组中的每个变量相互间是线性独立的。

若一个系统有 n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$，用这 n 个状态变量作为分量所构成的向量 $x(t)$，就称为该系统的状态向量，即

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

状态向量的所有可能值的集合称为状态空间。或者说，以状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为坐标轴所组成的 n 维空间称为状态空间。状态空间中的每一点代表了状态变量特定的一组值，即系统的某个特定的状态。如随着时间的推移，状态不断地变化，那么 $t \geq t_0$ 各瞬间的状态在状态空间构成一条轨迹，称为状态轨线。显然，这条轨线的形状完全由系统在 t_0 时刻的初始状态和 $t \geq t_0$ 时的输入以及系统的动力学特性所惟一确定。在经典控制理论中所讨论的相平面，就是一个特殊的二维状态空间。

由状态的定义可知，图 1.1(a) 所示电阻电路，其电流 $i(t)$ 不是状态变量；图 1.1(b) 所示电感电路，其电流 $i(t)$ 是状态变量。下面再以图 1.2 所示的 RLC 电路为例，对状态变量再作一点说明。

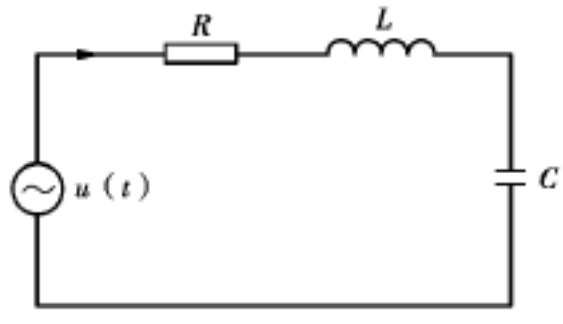


图 1.2 RLC 电路

根据基尔霍夫定律，该电路的电流 $i(t)$ 与输入电压 $u(t)$ 之间的微分方程

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = u(t) \tag{1.10}$$

由微分方程知识可知，要惟一地确定 t 时刻的输出电流 $i(t)$，除要知道输入电压 $u(t)$ 处，还必须给出电感 L 中的初始电流 $i(t_0)$ 和电容上的初始电压 $u_C(t_0)$。进一步说，$i(t)$ 和 $u_C(t)$ 这两个变量所构成的变量组能够完全地描述该电路的时域行为，且它们之间是独立的。故该变量组是 RLC 电路的状态，记为

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ u_C \end{bmatrix}$$

通过这个例子，我们还可以看到，倘若给定的初始条件不是 $i(t_0)$ 和 $u_C(t_0)$，而是 $i(t_0)$ 和电容器上的电量 $q(t_0)$，在输入电压 $u(t)$ 为已知时，也能惟一地确定其输出电流 $i(t)$。于是，$i(t)$ 和 $q(t)$ 所组成的变量组也可作为该系统的状态。由上可以看出，在同一系统中，究竟选取哪些变量作为状态变量不是惟一的，或者说状态变量具有非惟一性。这是一个重要的概念，读者在今后的学习中将会进一步体会到。

另外还有一点需要指出，系统的输出和系统的状态是不同的两个概念。输出是人们希望从系统中所要获得的某种信息；而状态是完全地描述系统动力学行为的一组信息。对于图 1.2 的 RLC 电路来说，电路中的回路电流 $i(t)$ 是人们所希望获得的信息，故为输出；$i(t)$ 和 $u_C(t)$（或者 $i(t)$ 和 $q(t)$）是完全地描述该电路动力学行为的信息，故为状态。通常，输出是状态的函数。在线性系统中，输出可以是状态变量组中的某一个变量或者某几个变量的线性组合。另外，在物理上输出总是可以测取的，而状态变量并不一定是可以测取的，而且也经常是不能完全测取到的。在第 5 章中，读者将会看到，为了便于构成以状态变量作为反馈信息的状态反馈，在选取状态变量时应尽量地选择在物理上易于测取的变量作为状态变量。

1.1.3　状态方程和输出方程

作为描述动力学系统的数学模型，既要有能描述动力学行为的状态方程，又要有表示指定输出变量与状态变量之间关系的输出方程。状态方程是一组一阶微分方程，输出方程是一组代数变换议程。

1）状态方程

所谓状态方程是每个状态变量对时间的一阶导数与状态变量和输入变量之间的关系式

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots u_r) \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.11}$$

式中　x_i —— 第 i 个状态变量；

u_j —— 第 j 个输入变量；

n —— 状态变量数；

r —— 输入变量数。

显然，一旦建立了这个方程，所有状态变量的时间响应便可通过求解这个一阶微分方程组而获得。

以图 1.2 所示 RLC 电路为例，其状态变量若取

$$x_1 = i \tag{1.12a}$$

$$x_2 = \int i\,dt \tag{1.12b}$$

为写出它们对时间的一阶导数的表达式，将上两式分别对时间 t 求导，有

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{di}{dt} \tag{1.13a}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = i \tag{1.13b}$$

由该电路的回路方程式(1.10),有

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{LC}\int i\,dt + \frac{1}{L}u \tag{1.14}$$

将式(1.13a)代入,上式写成

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{LC}x_2 + \frac{1}{L}u \tag{1.15a}$$

将式(1.12a)代入式(1.13b),有

$$\frac{dx_2}{dt} = x_1 \tag{1.15b}$$

式(1.15a)和(1.15b)便是该电路的状态方程,写成矩阵形式,有

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{LC} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{1.16}$$

2) 输出方程

所谓输出方程是在指定输出变量的情况下,该输出变量与状态变量以及输入变量之间的函数关系式为

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \cdots x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r) \qquad j = 1, 2, \cdots, m \tag{1.17}$$

式中 y_j 表示所指定的第 j 个输出变量; m 为输出变量数。

在上述 RLC 电路中,若指定回路电流 i 为输出,即

$$y = i$$

则输出方程为

$$y = x_i \tag{1.18}$$

写成矩阵形式,有

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

若所希望的输出是电容器 C 上的电压 u_C,则输出方程为

$$y = u_C$$

亦即

$$y = \frac{1}{C}x_2 \tag{1.20}$$

写成矩阵形式,有

$$y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

若所希望的输出是回路电流 i 和电容器 C 上的电压 u_C,则输出方程为

$$y_1 = x_1 \tag{1.22a}$$

$$y_2 = \frac{1}{C}x_2 \tag{1.22b}$$

写成矩阵形式,有

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

将状态方程式(1.11)和输出方程式(1.17)合写在一起,构成了一个对系统动力学行为的完整描述 —— 状态空间表达式

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{1.24}$$

$$y = g(x, u) \tag{1.25}$$

式中

$$x = [x_1 \quad x_2 \cdots x_n]^T \tag{1.26}$$

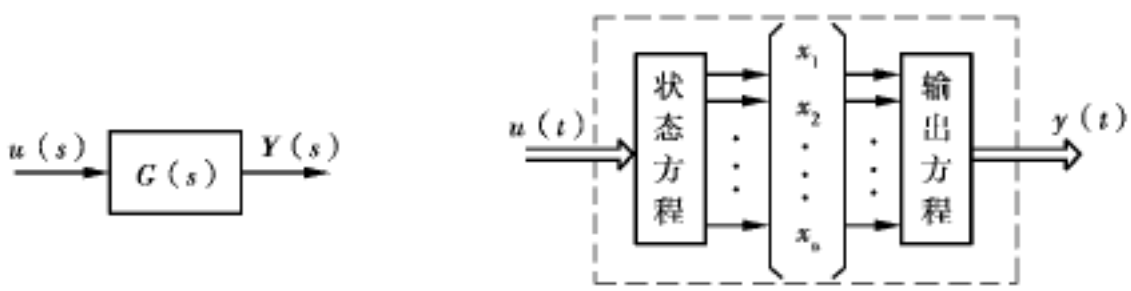
$$u = [u_1 \quad u_2 \cdots u_r]^T \tag{1.27}$$

$$y = [y_1 \quad y_2 \cdots y_m]^T \tag{1.28}$$

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r) \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r) \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

$$g(x, u) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r) \\ g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r) \\ \cdots \\ g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r) \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

可以看出,这种以状态为表示形式的描述系统动力学行为的方法和经典控制理论中的传递函数不同,它把输入到输出之间的信息传递分为两段来描述。第一段是输入引起系统内部状态发生变化,第二段是系统内部的状态变化引起系统输出的变化。前者用状态方程描述,后者用输出方程描述。由于这种描述可以深入到系统的内部,故称之为内部描述,而传递函数只能从外部描述系统输入到输出之间的传递关系,并不能反映内部状态变化,故称之为外部描述。图 1.3 是说明这两种描述方法特点的示意图。



(a) 传递函数描述法　　(b) 状态空间描述法

图 1.3　两种描述方法的示意图

对于线性系统,其状态方程组中的 $f_i(x_1, x_2, \cdots x_n, u_1, u_2, \cdots u_r)$ 以及输出方程组中的 $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_r)$ 都是关于 $x_1, x_2, \cdots x_n, u_1, u_2, \cdots u_r$ 的一次线性函数,即

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1r}u_r$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2r}u_r$$

$$\cdots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_2 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{nr}u_r$$

$$y_1 = c_{11}x_2 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \cdots + d_{1r}u_r$$
$$y_2 = c_{21}x_2 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \cdots + d_{2r}u_r$$
$$\cdots$$
$$y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + d_{m2}u_2 + \cdots + d_{mr}u_r$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad (1.31a)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad (1.31b)$$

或者简写成为

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.32a)$$
$$y = Cx + Du \quad (1.32b)$$

式中

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$ n× 1 **维状态向量**

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_r \end{bmatrix}$ r× 1 **维输入向量**

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix}$ m× 1 **维输出向量**

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ n× n **维系统矩阵**

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$ n× r **维输入矩阵**