# 绪　论

在工农业生产、科学研究、国防建设及国民经济各部门，都离不开各种测量。随着科学技术的发展，对测量提出的要求也越来越高。误差理论就是科学地、确切地对测量进行评价的理论。为了明确学习的目的，下面从几个方面介绍掌握它的意义。

(1)掌握误差理论的基本概念和有关知识，可以对所进行的各种测量做进一步的理解，并对测量结果作出科学的评价。若所进行的测量具有一定的精度，则要根据测量误差的需要来确定如何安排测量；需要进行几次测量；对测得值应如何进行处理；用什么形式给出测量结果的最佳表达式等。

(2)掌握误差理论还能指导我们对测量提出合理的要求。若对测量提出过高的不合理的精度要求，就会造成人力、物力的浪费，严重时甚至无法实现测量。若对测量忽略了精度要求或提出的测量精度过低就不能满足实际需要。从满足需要的测量精度来考虑，选用合适的测量仪器和仪表，使其具有合适的测量范围，并能充分利用测量仪表所具有的精度，这些都是误差理论研究的内容。

(3)随着国家计量法的贯彻，在国际和国内的各种经济交往中，如何使计量结果得到公认，在节约能源及对各种物质的生产量的计量与统计中，只有根据误差理论才能提出可靠的依据。在某些情况下，甚至可以作为法律的依据。

(4)在机电一体化系统的发展过程中，也面临着被测参数不断增加、对测量精度的要求不断提高的问题。为了满足机电一体化产品对测量提出的新要求，在工作中需要对测量仪表的精度进行标定。为了考核和核对各种测量装置的技术性能，在进行机电一体化产品设计时必须对产品内部各环节允许误差进行合理的分配。这些都需要用到误差理论的有关知识。

(5)误差理论也是各种学科的科技工作者需要掌握的基础技术知识。过去进行的不考虑精度指标的实验，在科学技术向高、精、尖发展，对实验要求不断提高和研究问题不断深化的情况下，已不能满足实际需要。目前，进行任何科学实验都应对实验装置进行精度的标定和考核，对实验的条件参数进行测定，并根据实际需要来选用能满足精度要求的测量仪表，这样才能对实验结果作出可信程度的评定。显然，从实验测得数据到得出结论，还需要具备有关数据处理的知识，这样才能保证实验结果符合客观实际，所以误差理论应该是科技工作者都应掌握的知识。

(6)误差理论是伴随着测量学不断丰富和发展而建立起来的一门学科。它既是一门古老的学科，又是一门新的学科。由经典的概率论应用到实践开始，就确立了误差理论的基础。随着概率论、数理统计学的发展，误差理论也得到不断的充实和完善。但是到目前仍有许多误差理论问题，还有待于做进一步的研究。

# 第一章　基本概念

在介绍有关误差理论之前，需要把研究测量误差应当明确的前提条件和必须掌握的基本概念加以说明。

## §1.1　误差研究的意义

人类为了认识自然与改造自然,需要不断地对自然界的各种现象进行测量和研究,由于实验方法和实验设备的不完善、周围环境的影响，以及受人们认识能力所限等，测量和实验所得数据与被测量的真值之间，不可避免地存在着差异，这在数值上表现为误差。

随着科学技术的日益发展和人们认识水平的不断提高，虽可将误差控制得越来越小，但终究不能完全消除它。误差存在的必然性和普遍性，已为大量实践所证明，为了充分认识并进而减小或消除误差，必须对测量过程和科学实验中始终存在着的误差进行研究。

研究误差的意义为：

(1)正确认识误差的性质,分析误差产生的原因,以消除或减小误差。

(2)正确处理测量和实验数据，合理计算所得结果，以便在一定条件下得到更接近于真值的数据。

(3)正确组织实验过程，合理设计仪器或选用仪器和测量方法，以便在最经济的条件下,得到理想的结果。

## §1.2　测量的定义及分类

测量是研究误差的前提。研究测量误差的目的就是设法评价测量结果的可信程度。可信程度的高低是与测量误差的大小直接相关的,测量误差越小,结果越可信 反之,可信程度就低。下面介绍与误差有关的测量问题。

### 一、测量的定义

测量就是人们借助专门设备，通过实验的方法，对客观事物取得测量结果的认识过程。它是通过物理实验把一个量(被测量)和作为比较单位的另一个量(标准)相比较的过程。

根据实际需要，测量结果不外乎有下面三种形式：

(1)带有单位的数值；

(2)在固定坐标系中给出的曲线；

(3)按一定比例给出的图形。

以上任一形式的测量结果都可用下式表示：

$$测量结果＝数值（被测量与标准的比值）\times 单位（量纲）$$

从这个测量的基本公式可以看出，测量结果应包括两部分：

数值　是被测量的测得值，它可以是具体的数值，也可以用线段的长度或图形的大小来表示。实质上它就是被测量与其计量标准（单位）的比值。在测量中有时还应包括表示测量误差大小的精度参数。

单位　是得到公认的，根据定义能得到数值为 1 的被测量的基本量。目前多数国家都采用国际单位制。它是由国际计量大会批准，由各国计量权力机关执行。我国已颁布计量法，确定了法定计量单位。同一被测量可用不同的测量单位来表示，但应注意根据单位间的换算关系，相应地改变测得值。

测量单位都有名称，作为测量结果一般都是有名数。所以给出的测量结果，绝对不能忽略测量单位。

虽然在一些特殊情况下给出的测量结果，直观看可不带测量单位，例如分贝数、光的折射率等，但是这些物理量本身的定义，仍包含与标准量相比的内容，故一般不带单位的数值，不能明确地表示测量结果。

## 二、测量方法的分类

为了对各种要求的测量有个系统的了解，特别是由于对测量的不同要求，处理测量误差也有不同的考虑，故将与处理误差有关的各种测量方法介绍如下。

1. 按对测量结果精确度要求不同，可把测量分为：

(1)工程测量

工程测量是一般工作中所进行的测量，对测量结果只要求取得测量值就能满足对测量的要求，不需要考虑测量误差的大小或估计测得值的可信程度。用于这种测量的设备或仪器，其灵敏度及精确度都比较低，对进行测量环境几乎没有什么特殊要求，给出的测得值也比较稳定。它经单次测量或多次测量给出的测量结果完全是一样的，所以这种测量不需要考虑测量误差问题。

另一种工程测量是对测量结果只需要考虑误差的上限值（误差存在的最大变化范围）的测量。对取得的测量结果，不需要对测量误差做精细的分析和考虑，只需给出测量误差的极限值就能满足要求。用于这种测量的仪器和设备，在出厂前或长期使用后经过标定或校对而得到测量误差极限值，并在铭牌或说明书中标注出来。

所以，用这种仪器或设备经过单次测量所得值即为测量结果，把标注出的测量误差极限值作为测量结果的误差。

在一般生产现场或一般科学实验中所进行的测量，多为工程测量。

(2)精密测量

凡是经过测量取得测量结果后，还要求估计出测量结果的误差确切值的测量，则为精密测量。

这种测量是在误差理论指导下，需要经过反复多次的测量过程，所用的测量仪器和设备应具有一定的精度和灵敏度，在每次测量中能够反映出测量误差的变化和存在。

在测量完成后把所得数据根据误差理论进行处理，计算出最佳测量结果，并估计出表示测量误差的确切值。

进行精密测量的条件（环境）要求比工程测量要严格，多是根据测量仪器的使用条件，在实验室内进行，所以也叫实验室测量。

因此，在测量之前，首先应当明确对测量结果的精度要求，确定属于哪种测量。这对于考虑测量方案，选用测量仪表和设备，对测得值进行处理，都是很重要的。

精密测量　得到的测量结果精度较高，但它所用的测量设备精度也高，测量设备对其工作环境的要求也比较严格，因此所付出的代价也大。

工程测量　得到的测量结果精度较低，所用的测量设备简单，价格便宜，操作也比较简便，故所付出的代价也比较小。

在实际工作中，不仅要考虑所付代价大小问题，而且要选择合适的测量仪表和测量方法，否则会得到事与愿违的结果。

例如，工程测量所用的测量设备（如日常用的各种量具）得不到精确的测量结果，根据测得值也无法估计测量误差的确切值。反之，采用精密测量的测量设备，在进行工程测量的环境下也不能正常地进行工作，甚至会造成测量设备的损坏。所以采用精密的测量设备进行测量，若不能保证测量设备对环境提出的要求，也不会得到精确的测量结果，因而根据实际的要求和可能，合理地确定采用哪种测量是极为重要的。

2. 根据取得测量结果的方法不同，可把测量分为：

(1)直接测量

把被测量与作为测量标准的量直接进行比较，或用预先按标准校对好的测量仪器对被测量进行测量，通过测量能直接得到被测量数量大小的测量结果，称此种测量为直接测量 。

直接测量可用下面一般公式表示为

$$y = x \tag{1.1}$$

式中　$y$——被测量；

$x$——测得值。

在工程测量中,如对时间、长度、质量进行的测量和用专用仪表对压力、温度、湿度进行的测量都是直接测量。

(2)间接测量

被测量不能用直接测量的方法得到，而必须通过一个或多个直接测量值，利用一定的函数关系运算才能得到，此种测量称为间接测量。

间接测量可以用下面的一般公式来表示，即

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{1.2}$$

式中　$y$——被测量；

$x_1, x_2, \cdots, x_m$——各直接测量值。

间接测量在科学研究中用得最多，因为在许多情况下，用直接测量的方法不能得到被测量,或是能够测得但测量过程比较复杂,不如采用间接测量方便、精确,例如,天文学方面各种参数的测量，核子物理研究中对原子内部结构参数的测量等。在工业自动化仪表中，对流量计的核定也是通过测量质量或容积与测定时间相比而得到流量值的。

(3) 组合测量

被测量不能通过直接测量或间接测量得到，而必须通过直接测量的测得值或间接测

量的测得值建立联立方程组，通过求解联立方程的办法，才能得到最后的测量结果。这样的测量称为组合测量。它可以用下面的一般公式来表示,即

$$
\begin{cases}
F_1(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m, x_{11}, x_{21}, x_{31}, \cdots, x_{i1}, \cdots, x_{n1}) = 0 \\
\vdots \\
F_j(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m, x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, \cdots, x_{ij}, \cdots, x_{nj}) = 0 \\
\vdots \\
F_m(y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m, x_{1m}, x_{2m}, x_{3m}, \cdots, x_{im}, \cdots, x_{nm}) = 0
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

式中 $F_1, F_2, \cdots, F_m$—— 组合测量中 $y$ 与 $x$ 构成的已知函数关系；

$y_1, y_2, \cdots, y_m$—— 组合测量中的 $m$ 个被测量；

$x_{ij}$—— 组合测量中第 $j$ 个直接(或间接)被测量的第 $i$ 次测得值,其中 $i = 1,2,3, \cdots, n; j = 1,2,3, \cdots, m$。

上述联立方程可通过改变测量条件列出，也可以把被测量 $y$ 用不同的组合参加测量过程而列出,使方程的数目 $m$ 与被测量 $y$ 的个数相等，这样就可以解此联立方程而求得各被测量。

组合测量只用于实验室里和其他特殊场合作为一种特殊的和精密的测量方法，一般用到这种测量方法的机会不多（在大地测量或标准砝码的校对中会用到这种测量方法）。为了熟悉组合测量，现举一例来说明这种测量方法的应用。

一个标准线圈的电阻值，与温度变化呈非线性关系，它们的关系可表示为

$$R_t = R_{20} + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2 \tag{1.4}$$

式中 $R_t$—— 在温度为 $t$ 时的电阻值；

$R_{20}$——温度为 20℃ 时的电阻值；

$\alpha$ 和 $\beta$—— 线圈的电阻温度系数；

$t$—— 温度值。

把 $\alpha$、$\beta$ 和 $R_{20}$ 作为被测量，改变测量条件，取三个不同的温度 $t_1$、$t_2$ 和 $t_3$,相应测得 $R_{t1}$、$R_{t2}$ 和 $R_{t3}$,则 $t$ 及对应的 $R_t$ 即为直接测量值。这样列出三元联立方程式,就可求解得到 $\alpha$、$\beta$ 和 $R_{20}$ 的数值，同时又可避免测量 20℃ 时的准确 $R_{20}$ 值。

在 $\alpha$、$\beta$ 和 $R_{20}$ 已知的情况下，即可用间接测量法测量不用温度 $t$ 时的电阻 $R_t$ 值。而在 $\alpha$、$\beta$ 和 $R_{20}$ 为未知时，则要用组合测量法求取它们的具体值。

总之，对被测量进行测量不外乎上述三类测量方法。

对某些被测量用一种测量方法就能得出测量结果；但也有些被测量要用上述两种，甚至三种测量方法才能得出测量结果。究竟采用哪种测量方法，需从对测量结果要求的差别，所用测量设备造价是否昂贵，进行测量的操作是否简便，对测量条件的要求是否苛刻及所付代价的大小等因素来考虑决定。

3. 根据测量条件不同,可把测量分为：

(1) 等精度测量

对某一固定被测量进行重复测量，所取得的测量数据可以认为是在相同的测量精度条件下得到的，这种测量称为等精度测量。

对一固定被测量作等精度测量，所得测量数据允许有一定范围的大小变化。但对偏大或偏小的数值，不能判定哪种数值更加接近被测量的真实值，只能取一视同仁的态度，同

等对待，即对取得数据的信赖程度是相同的。这是判定是否为等精度测量的重要依据。

(2)不等精度测量

对一被测量进行测量得到的数据，其精确度可判定是不等的，这种测量称为不等精度测量。

不等精度测量造成精度不等，可能是由于条件的改变、所用测量设备的不同或更换，也可能是数据从不同的来源得到的。

对不等精度的数据应当有特殊的处理方法。

4. 根据被测对象在测量过程中所处的状态，可把测量分为：

(1) 静态测量

被测量在测量过程中可以认为是固定不变的，对这种被测量进行的测量称为静态测量。

实际上，静态测量就是不需要考虑时间因素对测量的影响，把被测量或是测量误差作为随机变量来研究。

(2) 动态测量

被测量是处在随时间不断变化的状态，对这种被测量进行的测量称为动态测量。

进行这种测量和处理这种测量得到的数据，就要考虑时间因素对测量的影响，即把测得值或测量误差作为随机过程来进行研究。

上面介绍的四种测量分类方法，只是涉及到以后研究测量误差问题首先要弄清楚的基本概念，对各种专业所进行的测量具有特性的问题，有关各种专业的测量学的详细内容，还应当查阅有关的专门著作，根据研究问题的需要会有不同的分类方法，这一点是应当明确的。

## §1.3　误差的基本概念

人类对客观事物的认识，总是要经历由浅到深，由低级向高级的发展过程。测量实践也完全符合这样一个认识过程。

从严格的意义上讲，很难说测量能够完全准确地反映客观的存在。所以说任何测量都带有一定的测量误差，这就是测量误差的普遍存在性。因此，误差理论所研究的只能是测量误差的大小，而绝不是测量误差的有无问题。从理论上讲，提高测量精度（减小测量误差)的极限,应该是达到被测量的量丧失本身的定义为止。例如,测量一个物体的长度,当所考虑的测量误差比该物体的分子尺寸还小时，则划定物体长度界限的两个端面就无法确定，从而也就丧失了该物体长度的概念。但是在实际测量中，这种理论上的测量精度极限是难于达到的，因为测量总要受到当时的技术水平和理论水平的限制。对测量误差进行研究，其目的就是能够确切地了解测量误差的大小范围，能把测量误差控制在能够满足需要的程度，并能以误差理论为依据对测量结果作出科学的、合理的评定。

### 一、误差的定义及表示法

所谓误差就是测得值与被测量的真值之间的差，可表示为

$$误差 = 测得值 - 真值$$

例如,在长度计量测试中,测量某一尺寸的误差公式具体形式为

误差 = 测得尺寸 - 真实尺寸

测量误差可用绝对误差表示，也可用相对误差表示。

1. 绝对误差

某量值的误差定义为该量的给出值(包括测得值、实验值、标称值、示值、计算近似值等要研究和给出的非真值）与其客观真值之差。

什么是真值？自然界中的一切物体或物质都是处于永恒的运动中，而被测量的真值的确定是 真值,假设在一定的时间内,实际上不变的被测量的真正大小。

此外,还有一些人为的规定。例如,量块两平行端面的几何长度表征量块的长度,但在精密测量中发现，无论量块的端面研磨得如何精细，也不能保证端面没有起伏或两端面绝对平行。因此,量块两端面间的距离各处就不相等,这时,人们又规定量块两端面对角线中心的垂直连线（或其他规定）之长度表征量块的长度，在某一极短的时间间隔内，量块具有稳定的实际的长度,就是该瞬间量块的真值。所以,真值具有时间和空间的含义。因此，可以定义如下：

真值　　在某一时刻和某一位置或状态下，某量本身体现出的客观值或实际值。

对应于某个测得值的真值，则是指这个量在被观测时，该量本身所具有的真实大小。因此,真值是理想的概念,故有

误差 = 给出值 - 真值

这就得到了一个误差定义。

由于误差与给出值具有同量纲(即同单位),故该误差又称之为绝对误差。

如果用语言描述上面的公式，则可以说：一个量值的给出值的绝对误差是等于该量值的给出值与其真值之差。误差是正或者是负，就决定了给出值是正或负偏离真值的方向。

如果定义中的给出值是用测量方式获得的被测量的测量结果，则得到测量误差的定义为

测量误差 = 测量结果 - 真值

如果给出值是指计量仪器的示值，则得到计量仪器的示值误差的定义为

示值误差 = 示值 - 真值

由此类推,可见,上面的公式具有广义的意义,其中给出值包括了测得值、实验值、示值、标准值、预置值、计算近似值等,这些值都是我们要研究的对象。

我们要谈的误差不是被测量的误差,因为被测量是一个客观存在,而是谈及它的给出值的误差，有时给出值也可能是猜测的值。如果一个客观量没有给出值，也就无法谈及它的误差的大小。

例如,真值为 100.024 mm 的量块,测得为 100.030 mm ,则测得值的误差为 + 0.006 mm; $\pi$ 的近似值取 3.14 时,其误差约为 - 0.0016 等等。

一般说来,真值是未知的,因此误差也就未知,但绝不意味真值一定不知道,有些情况下真值是可以知道的，又有些情况下从相对的意义上来说也是知道的。真值可知的情况有如下几种：

(1) 理论真值

例如,平面三角形三内角之和恒为 180°,同一量值自身之差为零,而自身之比为 1,理

想电容和电感上，其电压与电流的相位差为 90°此外,还有理论设计值和理论公式表达值等等。

(2) 计量学约定真值

国际计量大会决议,例如:(A) 长度单位 —— 米是光在真空中,在 1/299 792 458 s 的时间间隔内行程的长度。(B) 质量单位 —— 保存在法国巴黎国际计量局的铂 - 铱合金圆柱体的质量是 1kg。(C) 时间单位 ——铯 - 133 原子处于特定的状态（原子基态的两个超精细能级之间的跃迁)时,辐射出 9 192 631 770 个周期的电磁波。它所持续的时间为 1s。凡满足以上条件复现出的量值都是真值。

(3) 标准器相对真值

高一级标准器的误差与低一级标准器或普通计量仪器的误差相比，为其 1/5(或 1/3 ~ 1/20)时,则可以认为前者是后者的相对真值。例如,一个高稳定度晶体振荡器输出的频率，相对于普通频率计的频率而言是真值。由此引出一个实际值的概念。

实际值　满足规定准确度的用来代替真值使用的量值。由此可见，实际值是一个现实中可以知道并且可以应用的一个近似或相对的真值。

【例 1.1】 测得某平面三角块的三内角之和为 180°00′03″，则该内角之和的误差为＋ 3″.

【例 1.2】今用一普通压力计测量某压力，得其值为 97.968 MPa。用更准确的方法测得值为 98.168 MPa ,则普通压力计测得值的误差为 - 0.20 MPa ,所以,误差这个量值已成为评定测量过程或计量仪器的准确度不可缺少的尺度。

如果引进一个新的定义

修正值＝ - 误差 = 真值 - 给出值

则可得

真值 = 给出值＋修正值＝给出值 - 误差

这说明，含有误差的给出值加上修正值后就可消除误差的影响，而加上修正值的作用如同扣除误差的作用一样，这非常符合人们的逻辑思维过程。

值得注意的是 由于修正值的不准或‘ 桥梁 ’仪器不稳,测得值虽经修正,仍然不是真值,而只是可能得到比直接给出值更准一些的给出值罢了。错误的修正(符号或大小弄错)反而会得到更坏的结果,因此,修正量值时需要谨慎。

【例 1.3】我们需要加工出一个准确值为 1 Ω 的标准电阻,由于种种原因,加工后电阻的实际值为 1.001 Ω ,而电阻的标准值是 1 Ω。如果按标准值 1 Ω 来用,那么它的误差是 - 0.001 Ω ,如果按照 1.001 Ω 来用，那么，就和客观的情况完全相符了。

上例中，对于加工实际值来说，偏离了标准值。为了对这个量的差异有所描述而引入下列定义

偏差＝实际值 - 标准值

所谓偏差是指实际值而言的。虽然该偏差与修正值相符，但修正值或误差都是对给出值而言的,这是不可忽视的概念。

2. 相对误差

先举例说明。

【例 1.4】 用尺子测量 100 m 的准确距离 ,得值 101 m,则误差为 1 m。又用钢尺测量准

确距离为 1 000 m 的长度,得值 1 001 m ,则误差亦为 1 m。从误差的绝对值来说,它们都一样，但是由于所测距离的不同，故而它们的准确程度是不一样的，前者测量 100 m 差了 1 m,后者是测量了 1 000 m 差了 1 m。为了描述测量的准确程度而引出相对误差的定义为

相对误差 = 误差 ÷ 真值

当误差较小时,有

相对误差＝误差 ÷给出值

例 1.4 的相对误差分别为 1% 和 0.1%。

相对误差在有些场合下应用是很方便的。

【例 1.5】 已知阀门控制的水流量每分钟为 $x$ ,相对误差为 $\delta_x/x$,那么,经 $k$ 分钟控制的水流量为 $kx$ ,而相对误差 $k\delta_x/(kx) = \delta_x/x, k$ 任意，而相对误差不变。

3. 引用误差

引用误差是一种简化的和实用方便的相对误差，常常在多挡和连续分度的仪器中应用，这类仪器可测范围不是一个点而是一个量程，各分度点的示值和其对应的真值都不一样，这时若按前面公式计算相对误差时所用的分母也不一样，故计算很烦。为了便于计算和划分准确度等级，一律取该仪器的量程或测量范围上限值为分母，而量程则指测量范围上限值与下限值之差。由此引出定义：

引用误差　仪器示值的绝对误差与测量范围上限值或量程之比值，以百分数表示。

【例 1.6】 测量上限为 19 613.3 N的工作测力计(拉力表),在标定值(示值)为 14 710 N的实际作用力为 14 788 N，则此测力计在这一点的引用误差为（14 710 – 14 788)/19 613.3 = – 0.4%.

【例 1.7】某待测的电压约为 100 V ,现有 0.5 级 0 ~ 300 V 和 1.0 级 0 ~ 100 V 两个电压表，问用哪一个电压表测量较好？

解　用 0.5 级电压表测时，最大相对误差为

$$r_1 = \frac{x_n(\text{量程})}{x(\text{测量点})} \times S\%(\text{仪表等级}) = \frac{300}{100} \times 0.5\% = 1.5\%$$

用 1.0级电压表测时,最大相对误差为

$$r_2 = \frac{x_n}{x} = \frac{100}{100} \times 1.0\% = 1.0\%$$

此例说明,如果量程选择恰当,用 1.0 级仪表进行测量也会比用 0.5 级仪表测量时的最大相对误差还要小。

因此,在选用仪表时,要纠正单纯追求准确度等级‘越高越好’的倾向,而应根据被测量的大小，兼顾仪表的等级和测量上限或量程来合理地选择仪表。

## 二、误差的来源

在测量过程中，误差可以由以下几方面来产生。

1. 测量装置误差

测量装置是指为确定被测量值所必需的计量器具和辅助设备的总体，其误差来源于：

(1) 标准量具误差

标准量具是提供标准量值的器具。如标准量块、标准电池、标准电阻、标准砝码等,使

用它们的量值和它们自身体现出来的客观量量值之间有差异。

(2) 仪器误差

凡是用来直接或间接将被测量和已知量进行比较的器具设备，称为仪器或仪表。如阿贝比较仪、天平等比较仪器、压力表、温度计、流量计等指示仪表,它们本身都具有误差。

(3)附件误差

为测量创造一些必要条件，或使测量方便地进行的各种辅助附件，均属测量附件。如电测中的转换开关及移动接触点、电源、热源和连接导线等都会引起误差。装置误差的具体表现形式如下：等臂天平不等臂，光学计量装置的杂散光，量块的不平行性及不平面度，螺纹测微仪有空行程，由于零件联结间隙产生的隙动等等。这些误差大部分是由于制造工艺和长期使用磨损引起的，属于结构性的误差。

仪器在使用时没有调整到水平、垂直、平行等理想状态,应当对中的未能对中,方向不准等，这些属于使用中调整性的误差。

此外，还有变化性的误差。如提供标准量值本身的准确性及其随时间的不稳定性和随空间位置变化的不均匀性,如硬度块、电阻、电池老化等。

2. 环境误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起的测量装置和被测量本身的变化、机构失灵、相互位置改变等产生的误差。这些因素和温度、湿度、气压(引起空气各部分的扰动)、震动(外界条件及测量人员引起的振动)、照明(引起视差)、重力加速度、电磁场、野外工作时的风效应、阳光照射、透明度、空气含尘量有关。

仪器仪表在出厂规定的正常工作条件下使用时产生的示值误差称为基本误差。所谓正常工作条件是指检定规程中对检定所规定的工作条件，例如 20 ± 2℃ 等。超出此正常工作条件使用时所增加的误差称之为附加误差。

计量仪器仪表使用与检定时，环境因素的差异引起的误差，常常成为新的重要的误差源。科学实验中，静态分析和检定与动态使用时的差异，是值得特别注意的误差源。例如，地面上检定的仪器在空中的飞行器上使用等。

3. 方法误差

由于测量方法或计算方法不完善所引起的误差。需要瞬时取样测量，而实际上取样间隔不为零。例如用钢卷尺测量大轴的圆周长 $S$,再通过计算求出大轴的直径 $d = S/\pi$,因近似数 $\pi$取值的不同,将会引起误差。

4. 人员误差

人员误差指测量者受分辨能力的限制，感觉器官的生理变化，反应速度和固有习惯等影响而引起的误差。如记录某一信号时,测量者滞后和导前的趋向,在标准态读数时,始终偏左或偏右,偏上或偏下,常表现为视差、观测误差、估读误差和读数误差等等。这类误差常简称为人员误差。

## 三、误差的表现及其分类

一般说来测得值的误差随着不同的测量次数或测量的时刻而不同，或者改变某一条件因素后误差也不一样,如图 1.1所示。

所有左边的误差(垂直方向)表现出明显的确定的规律性,而后边的误差则在离散之

中呈现出某些规律,实际上,可以把它们看作为在左边规律误差的基础之上又叠加了起伏波动的误差后形成的结果。图中有“×”号表示的个别误差还出现了离群的现象，看起来这个别的误差不是属于那些相对应的误差集团的。根据误差的这些不同特性,也是便于今后研究和处理误差,人们将误差划分为系统误差、随机误差和粗大误差三类。

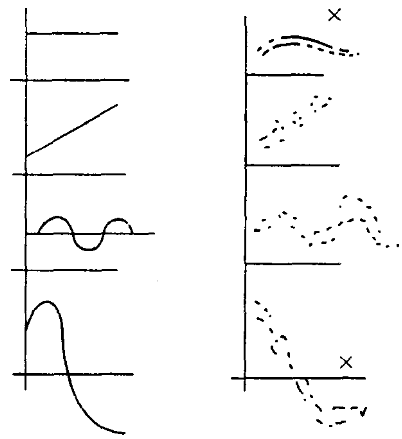

图 1.1

1. 系统误差

定义　　在同一条件下,多次测量同一量值时,绝对值和符号保持不变,或在条件改变时,按一定规律变化的误差称为系统误差。

所谓一定的规律意思是：这种误差可以归结为某一个因素或某几个因素的函数，这种函数一般可用解析公式、曲线或数表来表达。

实验或测量条件一经确定,系统误差就获得一个客观上的恒定值,多次测量的平均值也不能减弱它的影响。改变实验条件，例如依次改变温度，就能够发现系统误差随温度而变化的规律，这是用物理的方法发现系统误差的措施。实质上，在多种实验条件中系统误差就是这些实验条件因素的函数，是随着实验条件的改变而变化的误差，但变化具有确定的规律性。

由于各项研究工作都具有阶段性,我们对误差的研究也不例外。因此,对于较主要的系统误差研究得比较深透、规律性掌握得比较好；而对于次要的系统误差，或者需要花费更高代价和时间研究的暂时为次要矛盾的系统误差，可能掌握得不好或者未掌握其规律性，于是从对系统误差掌握的程度又可分为：已定系统误差和未定系统误差两种。

(1) 已定系统误差　　误差的方向已知,绝对值已知,若其数值为 $\varepsilon$,则 $\varepsilon$ 本身带有符号。

(2) 未定系统误差　　误差的方向未知,绝对值未知,通常可以估计其界限为 $e$。

按误差出现规律可分为不变系统误差和变化系统误差。

(1) 不变系统误差　　误差绝对值和符号为固定的。

(2)变化系统误差　　误差绝对值和符号为变化的,如线性,周期性,复杂规律性。

2. 随机误差

定义　　在同一测量条件下,多次测量同一量值时,绝对值和符号以不可预定方式变化着的误差称为随机误差。

例如，仪器仪表中传动部件的间隙和摩擦，连接件的弹性变形等引起的示值不稳定。

由于随机误差在各项测量中的单个无规性，导致了众多随机误差之和有正负相消的机会，随着测量次数的增加，则随机误差的个数也增加，而随机误差平均值越来越小并以零为极限，因此，多次测量的平均值的随机误差比单个测量值的随机误差小，这种性质通常称之为抵偿性，抵偿性只发生在本次实验过程中产生的许多随机误差中，也称为本次随机误差。

由于随机误差的变化不能预先确定,因此,这类误差也不能修正,而仅仅只能估计而

已。以后将会看到,随机误差是具有统计(或概率)规律的误差。

3. 粗大误差

定义　　超出在规定条件下预期的误差,或称"寄生误差"。

如测量时对错了标记而测错,如将 3 读为 4,将 7 记为 1 等等。

又如，实验状况未达到预想的指标（如真空度未达到要求）而匆忙实验等都会带来粗大误差。

含有粗大误差的测得值会明显地歪曲了客观现象，故含有粗大误差的测得值称之为坏值或异常值。

要采用的测量结果不应该包含粗大误差，即所有的异常值都应当剔除不要。所以，在作误差分析时，要估计的误差通常只有系统误差和随机误差两类。

4. 误差的相互转化

值得注意的是，误差的性质是可以在一定的条件下相互转化的。

对某项具体误差，在此条件下为系统误差，而在另一条件下可为随机误差，反之亦然。如按一定基本尺寸制造的量块，存在着制造误差，对某一块量块的制造误差是确定数值，可认为是系统误差，但对一批量块而言，制造误差是变化的，又成为随机误差。

在使用某一量块时，没有检定出该量块的尺寸偏差，而按基本尺寸使用，则制造误差属随机误差。若检定出量块的尺寸偏差，按实际尺寸使用，则制造误差属系统误差。

掌握误差转化的特点，可将系统误差转化为随机误差，用数据统计处理方法减小误差的影响，或将随机误差转化为系统误差，用修正方法减小其影响。

又如，度盘某一分度线只有一个恒定系统误差，但所有各分度线的误差却有大有小，有正有负，对整个度盘的分度线的误差来说具有随机性质。如果用度盘的固定位置测量定角,则误差恒定 如果用度盘的各个不同位置测量该角,则误差时大时小,时正时负,就随机化了。因而，测量平均值的误差能够得到减小，这种办法常称之为随机化技术。

在实际的科学实验与测量中,人们常利用这些特点,以减小实验结果的误差。譬如,当实验条件稳定且系统误差可掌握时，就尽量保持在相同条件下做实验，以便修正掉系统误差 当系统误差未能掌握时,就可以采用随机化技术,例如,均匀改变测量条件(如度盘位置）使系统误差随机化，以便得到抵偿部分系统误差后的结果。

总之，随着对误差性质认识的深化和测试技术的发展，有可能把过去作为随机误差的某些误差分离出来作为系统误差处理，或把某些系统误差当作随机误差来处理。

## §1.4　准确度、精密度和精确度

习惯上所说的精度,通常是指误差而言的。例如,实验相对误差为 0.01% ,则说其精度为 0.01% 或 $1 \times 10^{-4}$,但是这个误差值是随机误差部分,还是系统误差部分?或者是系统误差与随机误差的叠加?从含义笼统的"精度"一词上得不到明确的反映。

为了明确回答误差具有的性质,则上述误差如果纯属随机误差引起,则说其精密度为 $10^{-4}$ 如果由系统误差引起,则说其准确度为 $10^{-4}$；如果由系统误差和随机误差共同引起的,则可说其精确度为 $10^{-4}$,由此,该精度一词可以明确叙述为：

(1)准确度　　表示测量结果中系统误差的影响程度。

(2) 精密度　表示测量结果中随机误差的影响程度。

(3) 精确度　表示测量结果中系统误差和随机误差综合的影响程度。其定量特征可用测量的不确定度(或极限误差)来表示。

既然几个“度”是与误差相联系的,那么称之为不准确度是否更好些呢？

从本质上来说，这些称呼都是一样的。只不过准确度是反映测量结果与真值的一致程度，即测量结果向真值靠近的程度；而不准确度则是描述了测量结果离开真值的程度。在数值上都可以用误差这个较小的数值表示，因为用较小的值表达比较方便。

对实验或测量来说，精密度高的准确度不一定高，准确度高的精密度不一定高，但精确度高的，精密度与准确度都高。

## §1.5　误差与数据的表达

在测量结果和数据运算中，确定用几位数字来表示测量或数据运算的结果，是一个十分重要的问题。测量结果既然包含有误差,说明它是一个近似数,其精度有一定限度,在记录测量结果的数据位数或进行数据运算时的取值多少，皆应以测量所能达到的精度为依据。如果认为,不论测量结果的精度如何,在一个数值中小数点后面的位数越多,这个数值就越精确或者在数据运算中,保留的位数越多,精度就越高,这种认识都是片面的,若将不必要的数字写出来，既费时间，又无意义。

原因：一方面是因为小数点的位置决定不了精度，它仅与所采用的单位有关，如 35.6 mm和 0.0356 m 的精度完全相同，而小数点位置则不同。另一方面，测量结果的精度与所用测量方法及仪器有关，在记录或数据运算时，所取的数据位数，其精度不能超过测量所能达到的精度;反之,若低于测量精度,也是不正确的,因为它将损失精度。

此外，在求解方程组时，若系数为近似值，其取值多少对方程组的解有很大影响。

【例 1.8】　下面的方程组(a)和(b)及其对应解为

(a) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1.0001y = 0 \end{cases}$　对应解为　$\begin{cases} x = 10\,001 \\ y = 10\,000 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0.9999y = 0 \end{cases}$　对应解为　$\begin{cases} x = -9\,999 \\ y = -10\,000 \end{cases}$

两个方程组仅有一个系数相差万分之二,但所得结果差异极大,由此也可看出研究有效数字和数据运算规则的重要性。

### 一、有效数字

含有误差的任何近似数，如果其绝对误差是最末位数的半个单位，那么从这个近似数左方起的第一个非零的数字，称为第一位有效数字。从第一位有效数字起到最末一位数字上的所有数字,不论是零或非零的数字,都叫有效数字。若具有几个有效数字,就说是几位有效位数。

例如,取 $\pi = 3.14$ ,第一位有效数字为 3,共有三位有效位数；

又如,0.002 7,第一位有效数字为 2,共有二位有效位数；

而 0.002 70 则为三位有效位数。

若近似数的右边带有若干个零的数字，通常把这个近似数写成 $a \times 10^n$ 形式，而 $1 \leqslant a < 10$。利用这种写法，可以从 $a$ 含有几个有效数字来确定近似数的有效位数。

如 $2.400 \times 10^3$ 表示四位有效位数；$2.40 \times 10^3$ 和 $2.4 \times 10^3$ 分别表示三位和两位有效位数。在测量结果中，最末一位有效数字取到哪一位，是由测量精度来决定的，即最末一位有效数字应与测量精度是同一量级的。

例如，用千分尺测量时，其测量精度只能达到 0.01 mm，若测出长度 $l = 20.531$ mm，显然小数点后第二位数已不可靠，而第三位数字更不可靠，此时只应保留小数点后第二位数字，即写成 $l = 20.53$ mm，为四位有效数字。由此可知，测量结果应保留的位数原则是 其最末一位数字是不可靠的，而倒数第二位数字应是可靠的。

测量误差一般取 1 ~ 2 位有效数字，因此，上述用千分尺测量的结果可表示为 $l = 20.53 \pm 0.01$ mm 。在进行比较重要的测量时，测量结果和测量误差可比上述原则再多取一位数字作为参考，如测量结果可表示为 $15.214 \pm 0.042$。

因此，凡遇有这种形式表示的测量结果，其可靠数字为倒数第三位数字，不可靠数字为倒数第二位数字，而最后一位数字则为参考数字。

## 二、数字舍入规则

对于位数很多的近似数，当有效位数确定后，其后面多余的数字应予舍去，而保留的有效数字最末一位数字应按下面的舍入规则进行凑整：

(1) 若舍去部分的数值大于保留部分的末位的半个单位，则末位加 1。

(2) 若舍去部分的数值小于保留部分的末位的半个单位，则末位不变。

(3) 若舍去部分的数值等于保留部分的末位的半个单位，则末位凑成偶，即当末位为偶数时则末位不变，当末位为奇数时则末位加 1。

【例 1.9】 按上述舍入规则，将下面各个数据保留四位有效数字进行凑整。

| 原有数据 | 舍入后数据 |
|---|---|
| 3.141 59 | 3.142 |
| 2.717 29 | 2.717 |
| 4.510 50 | 4.510 |
| 3.215 50 | 3.216 |
| 6.378 501 | 6.378 |
| 7.691 499 | 7.691 |
| 5.434 60 | 5.435 |

由于数字舍入而引起的误差称为舍入误差，按上述规则进行数字舍入，其舍入误差一般不超过保留数字最末位的半个单位。

必须指出，这种舍入规则的第 3 条明确规定，能舍去的数字不是见 5 就入，从而使舍入误差成为随机误差，在大量运算时，其舍入误差的均值趋于零。这就避免了过去所采用的四舍五入的规则，由于舍入误差的累积而产生系统误差。

### 三、数据运算规则

在近似数运算中，为了保证最后结果有尽可能高的精度，所有参与运算的数据在有效数字后可多保留一位数字作为参考数字，或称为安全数字。

(1) 在近似数加减运算时，各运算数据以小数位数最少的数据位数为准，其余各数据可多取一位小数，但最后结果应与小数位数最少的数据小数位相同。

【例 1.10】 求 $2\,643.0+987.7+4.187+0.2354=?$

解 原式 $\approx 2\,643.0+987.7+4.19+0.24=3\,635.13\approx 3\,635.1$

(2) 在近似数乘除运算时，各运算数据以有效位数最少的数据位数为准，其余各数据要比有效位数最少的数据位数多取一位数字，而最后结果应与有效位数最少的数据位数相同。

【例 1.11】 求 $15.13\times 4.12=?$

解 $15.13\times 4.12=62.335\,6\approx 62.3$

(3)在近似数平方或开方运算时，平方相当于乘法运算，开方是平方的逆运算，故可按乘除运算处理。

(4) 在对数运算时，$n$位有效数字的数据应该用$n$位对数表，或用($n+1$)位对数表，以免损失精度。

(5) 三角函数运算中，所取函数值的位数应随角度误差的减小而增多，其对应关系如表 1.1 所示。

表1.1

| 角度误差 | 10″ | 1″ | 0.1″ | 0.01″ |
|---|---|---|---|---|
| 函数值位数 | 5 | 6 | 7 | 8 |

以上所述的运算规则，都是一些常见的最简单情况，但实际问题的数据运算皆较复杂，往往一个问题要包括几种不同的简单运算，对中间的运算结果所保留的数据位数可比简单运算结果多一位数字。

## 习　　题

1. 误差的绝对值与绝对误差是否相同？未定系统误差与系统不确定度是否相同？

2. 什么叫误差？什么叫修正值？含有误差的某一量值经过修正后，能否得到真值？

3. 用一可调辅助信号源同时送入被检仪表和标准仪表，其示值分别为 $f_0$ 和 $f_a$，问被检仪表的示值误差是多少？若调整信号源使得标准仪表上的示值为 $f_0$，则此时被检仪表的示值为 $f_x$，求被检仪表的示值误差。在理论上，这两种方法所得示值误差是否一样？

4. 0.1级 10 A 电流表经过检定后，最大示值误差在 3 A 处为＋ 8 mA，问此表是否合格？

5. 具有相同相对误差的两个同标称值电阻，则其串联与并联的相对误差与该电阻的相对误差相同，试证明之。

6. 一块仪表的准确度等级为 $S$，在 $x$ 处测量时的准确度不高于$(x_n/x)\cdot S\%$，这里 $x_n$ 为仪表的最大刻度值，$x$ 为测得值。当 $x$ 很小时，即在零刻度点附近测量时，如何提高其准确度？

7. 如何根据系统误差与随机误差的转化特性来减少实验结果的误差？

8. 测得某三角块的三个角度之和为 $180°00'02''$，试求测量的绝对误差和相对误差。

9. 用两种方法分别测量 $l_1 = 50$ mm，$l_2 = 80$ mm。分别测得结果为 50.004 mm，80.006 mm，试评定两种方法测量精度的高低。

10. 若用两种测量方法测量某零件的长度 $l_1 = 110$ mm，其测量误差分别为 $\pm 11$ μm 和 $\pm 9$μm，而用第三种测量方法测量另一零件的长度 $l_2 = 150$ mm，其测量误差为 $\pm 12$ μm，试比较三种测量方法精度的高低。

# 第二章　误差的性质

任何测量总是不可避免地存在误差，为了提高测量精度，必须尽可能消除或减小误差,因此有必要对各种误差的性质、出现规律、产生原因、发现与消除或减小它们的主要方法,以及测量结果的评定等,作进一步分析和研究。

## §2.1　随机误差

### 一、随机误差产生的原因

多次等精度的重复测量同一量值，或对某个观测对象进行多次观测，即使采取了措施消除系统性误差，然而测量所得的结果数据仍各个互异，可以肯定，测得值与其真值之间存在误差，这些误差的出现又没有确定的规律，具有随机性，因而称为随机误差。

随机误差是由为数众多而影响微小的因素造成，这些因素对于测量结果的影响关系，人们还没有认识，或没有完全认识。因此对这些因素的影响还无能力加以控制。有时，可以在一定程度内控制，但经济上并不合算。

这些因素表现在：

(1) 实验或测量环境的微小波动 如温度、湿度、气压、气流、电场、磁场、光照以及大气中尘埃降落等因素。

(2) 实验或测量手段、工作状态微小的波动：设备或量仪内部机械结构中运动副间的摩擦、润滑、作用力、弹性变形等波动,电、液系统工作不稳定等。

(3) 测量者生理状况变化引起的感觉判别能力的波动等。

这些因素的影响出现与否、大小和正负本身就带有随机性，因而它们的影响综合所造成的误差也必然带有随机性。

### 二、随机误差的性质

随机误差主要有以下几方面的性质：

(1) 在一定测量条件下的有限测得值中，其随机误差的绝对值不会超过一定的界限，误差所具有的这个特征，我们称之为有界性。

(2)绝对值相等的正误差与负误差出现的次数大致相等,这一特性称之为对称性。

(3)绝对值小的误差出现的次数比绝对值大的误差出现的次数多,这一特性称之为单峰性。

(4) 对同一量进行多次测量，其误差的算术平均值随着测量次数 $n$ 的无限增加而趋于零,即误差平均值的极限为零,这称为误差的抵偿性。

抵偿性是随机误差的最本质的统计特性,也可以说,凡具有抵偿性的误差,原则上都