1 测量误差及数据处理的基础知识

本章是自学材料，介绍测量误差估计、实验数据处理和实验结果的表示等内容。所介绍的都是初步知识，这些知识不仅在每一个物理实验中都要用到，而且是今后从事科学实验必须了解和掌握的。这部分内容牵涉面较广，不可能在一两次学习中掌握。我们要求同学首先阅读一遍，对提到的问题有一个初步的了解，然后结合每一个具体实验再细读有关的段落，通过运用加以掌握。应当说明的是：对这些内容的深入讨论是普通计量学以及数理统计学的任务，本书只能引用其中的某些结论和计算公式，更详细的探讨和证明留待数理统计课程中解决。

1.1 测量的误差

1.1.1 误差的分类

物理实验是以测量为基础的。研究物理现象、了解物质特性、验证物理原理都要进行测量。测量分直接测量和间接测量等。“直接测量”指无需对被测的量与其他实测的量进行函数关系的辅助计算而直接测出被测量的量。例如用米尺测物体的长度，用天平和砝码测物体的质量，用电流计测线路中的电流，都是直接测量。“间接测量”指利用直接测量的量与被测的量之间已知的函数关系，从而得到该被测量的量。例如测物体密度时，先测出该物体的体积和质量，再用公式算出物体的密度。在物理实验中进行的测量，有许多是间接测量。

实践证明，测量结果都存在有误差，误差自始至终存在于一切科学实验和测量的过程之中。因为任何测量仪器、测量方法、测量环境、测量者的观察力等等都不能做到绝对严密，这些就使测量不可避免地伴随有误差产生。因此分析测量中可能产生的各种误差，尽可能消除其影响，并对测量结果中未能消除的误差作出估计，就是物理实验和许多科学实验中必不可少的工作。为此我们必须了解误差的概念、特性、产生的原因和估计方法等有关知识。

测量误差就是测量结果与被测量的真值（或约定真值）之间的差值，测量误差的大小反映了测量结果的准确程度。测量误差可以用绝对误差表示，也可以用相对误差表示。

$$\text{绝对误差} = \text{测量结果} - \text{被测量的真值}$$

$$\text{相对误差 } E = \frac{\text{测量的绝对误差}}{\text{被测量的真值}} \qquad \text{（用百分数表示）}$$

被测量的真值是一个理想概念，一般说来实验者对真值是不知道的。在实际测量中常用被测量的实际值或已修正过的算术平均值来代替真值，称为约定真值。

测量中的误差主要分为两种类型，即系统误差和随机误差。它们的性质不同，需分别

需要全本请访问 www.ertongbook.com

处理。

1.1.2 系统误差

系统误差是指在多次测量同一被测量的过程中，保持恒定或以可预知方式变化的测量误差的分量。例如实验装置和实验方法没有（或不可能）完全满足理论上的要求，有的仪器没有达到应有的准确程度，环境因素（温度、湿度等）没有控制到预计的情况等。只要这些因素与正确的要求有所偏离，那么在测量结果中就会出现其绝对值和符号均为恒定的或以可预知方式变化的误差分量。因素不变，系统误差也就不变。

例如用停表测运动物体通过某段路程所需的时间，若停表走得较快，那么即使测量多次,测得的时间 t 总会偏大，而且总是偏大一个固定的量，这就是仪器不准确造成的。又如用落球法测重力加速度时，由于空气阻力的影响，得到的结果总是偏小，这就是测量方法不完善造成的。

对实验中的系统误差应如何处理呢？可以通过校准仪器，改进实验装置和实验方法，或对测量结果进行理论上的修正加以消除或尽可能减小。发现和减小实验中的系统误差通常是一个困难任务，需要对整个实验所依据的原理、方法、测量步骤及所用仪器等可能引起误差的各种因素一一进行分析。一个实验结果是否正确，往往就在于系统误差是否已被发现和尽可能消除，因此对系统误差不能轻易放过。

1.1.3 随机误差

随机误差是指在多次测量同一被测量的过程中，绝对值和符号以不可预知的方式变化着的测量误差的分量。这种误差是实验中各种因素的微小变动性引起的。例如实验装置和测量机构在各次调整操作上的变动性，测量仪器指示数值的变动性，以及观测者本人在判断和估计读数上的变动性等等，这些因素的共同影响就使测量值围绕着测量的平均值发生有涨落的变化，这变化量就是各次测量的随机误差。随机误差的出现，就某一测量值来说是没有规律的，其大小和方向都是不能预知的，但对一个量进行足够多次的测量，则会发现它们的随机误差是按一定的统计规律分布的。常见的一种情况是：正方向误差和负方向误差出现的次数大体相等，数值较小的误差出现的次数较多，数值很大的误差在没有错误的情况下通常不出现。这一规律在测量次数越多时表现得越明显，它就是一种最典型的分布规律——正态分布规律。

1.1.3.1 随机误差的正态分布规律

大量的测量误差服从正态分布（或称高斯分布）规律。标准化的正态分布的曲线如图 1.1.1 所示。图中 x 代表某一物理量的实验测量值，$p(x)$为测量值的概率密度，且

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

其中

$$\mu=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum x}{n},\quad \sigma=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\sum(x-\mu)^2}{n}}$$

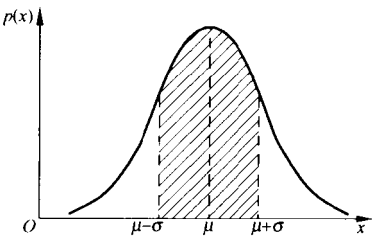

图 1.1.1　正态分布曲线

从曲线可以看出被测量值在 $x=\mu$ 处的概率密度最大，曲线峰值处的横坐标相应于测量次数 $n\to\infty$ 时被测量的平均值 μ。横坐标上任一点到 μ 值的距离$(x-\mu)$ 即为与测量值 x 相应的随机误差分量。随机误差小的概率大，随机误差大的概率小。 σ 为曲线上拐点处的横坐标与 μ 值之差，它是表征测量值分散性的重要参数，称为正态分布的标准偏差。这条曲线是概率密度分布曲线，当曲线和 x 轴之间的总面积定为 1 时，其中介于横坐标上任何两点间的某一部分面积可以用来表示随机误差在相应范围内的概率。如图中阴影部分 $-\sigma$ 到 $+\sigma$ 之间的面积就是随机误差在 $\pm\sigma$ 范围内的概率（又称置信概率），即测量值落在$(\mu-\sigma,\mu+\sigma)$的区间中的概率，由定积分计算得其值为 $P=68.3\%$。如将区间扩大到 -2σ 到 $+2\sigma$,则 x 落在 $(\mu-2\sigma,\mu+2\sigma)$ 区间中的概率就提高到 95.4%；x 落在$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$区间中的概率为 99.7%.

从分布曲线可以看出：① 在多次测量时，正负随机误差常可以大致相消，因而用多次测量的算术平均值表示测量结果可以减小随机误差的影响；② 测量值的分散程度直接体现随机误差的大小，测量值越分散，测量的随机误差就越大。因此，必须对测量的随机误差作出估计才能表示出测量的精密度。

1.1.3.2　随机误差的处理

1. 最小二乘法原理与测量平均值

对测量中的随机误差如何处理呢？对随机误差作估计的方法有多种，科学实验中常用标准偏差来估计测量的随机误差。实验中不可能作无限多次测量，测量次数只能是有限的，因此，应研究这种情况下的随机误差估计方法。

设对某一物理量在测量条件相同的情况下进行 n 次无明显系统误差的独立测量，测得 n 个测量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 。当无系统误差分量存在时，应该用有限次测量值的平均值作为真值的最佳估计值，这是由最小二乘法原理推导出来的。

根据最小二乘法原理，一列等精度测量的最佳估计值是能使各次测量值与该值之差的平方和为最小的那个值。设真值的最佳估计值为 x_0 ,则差值平方和可写为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)^2$$

若要使它最小，则它对 x_0 的导数应为 0,即

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)=0$$

由上式可得

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}, \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)说明当系统误差已被消除时，测量值的平均值可以作为被测量的真值。测量次数越多,两个值接近的程度越好(当 $n\to\infty$时，平均值趋近真值）。因此，可以用平均值表示测量结果。以后为了简洁，常略去求和号上的求和范围，例如上式中的分子可写为 $\sum x_i$.

2. 标准偏差

每一次测量值 x_i与平均值 $\bar{x}$ 之差称为残差，即

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}, \qquad i = 1,2,\cdots,n$$

显然，这些残差有正有负，有大有小。常用“方均根”法对它们进行统计，得到的结果就是单次测量的标准偏差，以 S_x表示为

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(\Delta x_i)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.1.2}$$

这个公式又称为贝塞尔公式。可以用这一标准偏差表示测量的随机误差，它可以表示这一列测量值的精密度。标准偏差小就表示测量值很密集，即测量的精密度高；标准偏差大就表示测量值很分散，即测量的精密度低。现在很多计算器上都有这种统计计算功能，实验者可直接用计算器求得 S_x等数值。

可以证明平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$是一列测量中单次测量的标准偏差 S_x的$\frac{1}{\sqrt{n}}$，即

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{1.1.3}$$

1.1.4 直接测量结果的表示和总不确定度的估计

1.1.4.1 总不确定度

完整的测量结果应给出被测量的量值 x_0，同时还要标出测量的总不确定度 Δ,写成 $x_0\pm\Delta$ 的形式，这表示被测量的真值在($x_0-\Delta, x_0+\Delta$）的范围之外的可能性（或概率）很小。不确定度是指由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度，是表征被测量的真值所处的量值范围的评定。

直接测量时被测量的量值 x_0一般取多次测量的平均值 $\bar{x}$；若实验中有时只能测一次或只需测一次，就取该次测量值 x。最后表示被测量的直接测量结果 x_0时，通常还必须将已定系统误差分量（即绝对值和符号都确定的已估算出的误差分量）从平均值 $\bar{x}$或一次测量值x 中减去,以求得 x_0，即就已定系统误差分量对测量值进行修正。如螺旋测微计的零点修正，伏安法测电阻中电表内阻影响的修正等。

根据国际标准化组织等 7个国际组织联合发表的《测量不确定度表示指南 ISO 1993 (E)》的精神，普通物理实验的测量结果表示中，总不确定度 Δ从估计方法上也可分为两

类分量：A 类指多次重复测量用统计方法计算出的分量 Δ_A，B 类指用其他方法估计出的分量 Δ_B，它们可用“方、和、根”法合成（下文中的不确定度及其分量一般都是指总不确定度及其分量），即有

$$\Delta = \sqrt{\Delta_A^2 + \Delta_B^2} \tag{1.1.4}$$

1.1.4.2 总不确定度的 A 类分量 Δ_A

在实际测量中，一般只能进行有限次测量，这时测量误差不完全服从正态分布规律，而是服从称之为 t 分布（又称学生分布）的规律。这种情况下，对测量误差的估计，就要在贝塞尔公式(1.1.2）的基础上再乘以一个因子。在相同条件下对同一被测量作 n 次测量，若只计算总不确定度 Δ 的 A 类分量 Δ_A，那么它等于测量值的标准偏差 S_x 乘以一因子 $t_p(n-1)/\sqrt{n}$，即

$$\Delta_A = \frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}} S_x \tag{1.1.5}$$

式中 $t_p(n-1)$ 是与测量次数 n、置信概率 p 有关的量。概率 p 及测量次数 n 确定后，$t_p(n-1)$ 也就确定了。因子 $t_p(n-1)$ 的值可以从专门的数据表中查得。当 $p=0.95$ 时，$t_p(n-1)/\sqrt{n}$ 的部分数据可以从下表中查得。

测量次数 n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_p(n-1)/\sqrt{n}$因子的值	8.98	2.48	1.59	1.24	1.05	0.93	0.84	0.77	0.72

普物实验中测量次数 n 一般不大于 10。从该表可以看出，当 $5<n\leqslant 10$ 时，因子 $t_p(n-1)/\sqrt{n}$近似取为 1，误差并不很大。这时式(1.1.5)可简化为

$$\Delta_A = S_x \tag{1.1.6}$$

有关的计算还表明，在 $5<n\leqslant 10$ 时，作 $\Delta_A = S_x$ 近似，置信概率近似为 0.95 或更大。即当 $5<n\leqslant 10$ 时，取 $\Delta_A = S_x$ 已可使被测量的真值落在 $\bar{x} \pm S_x$ 范围内的概率接近或大于 0.95。所以我们可以这样简化：直接把 S_x 的值当作测量结果的总不确定度的 A 类分量 Δ_A。当然，测量次数 n 不在上述范围或要求误差估计比较精确时，要从有关数据表中查出相应的因子 $t_p(n-1)/\sqrt{n}$ 的值。

1.1.4.3 总不确定度的 B 类分量 Δ_B

在普通物理实验中常遇到仪器的误差或误差限值，它是参照国家标准规定的计量仪表、器具的准确度等级或允许误差范围，由生产厂家给出或由实验室结合具体测量方法和条件简化的约定，用 $\Delta_{仪}$ 表示。仪器的误差 $\Delta_{仪}$ 在普通物理实验教学中是一种简化表示，通常取 $\Delta_{仪}$ 等于仪表、器具的示值误差限或基本误差限。许多计量仪表、器具的误差产生原因及具体误差分量的计算分析，大多超出了本课程的要求范围。用普通物理实验室中的多数仪表、器具对同一被测量在相同条件下作多次直接测量时，测量的随机误差分量一般比其基本误差限或示值误差限小不少；另一些仪表、器具在实际使用中很难保证在相同条件下或规定的正常条件下进行测量，其测量误差除基本误差或示值误差外还包含变差

需要全本请访问 www.ertongbook.com

等其他分量。因此我们约定，在普通物理实验中大多数情况下把 $\Delta_{仪}$ 简化地直接当作总不确定度中用非统计方法估计的 B 类分量 Δ_B，即 $\Delta_B=\Delta_{仪}$。

1.1.4.4 总不确定度的合成

由式(1.1.4)、式(1.1.5)和式(1.1.6)可得

$$\Delta=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_{仪}^2}=\sqrt{\left(\frac{t_p(n-1)}{\sqrt{n}}S_x\right)^2+\Delta_{仪}^2} \tag{1.1.7}$$

当测量次数 n 符合 $5<n\leqslant 10$ 条件时，上式可简化为

$$\Delta=\sqrt{S_x^2+\Delta_{仪}^2} \tag{1.1.8}$$

式(1.1.8)是今后实验中估算不确定度经常要用的公式，希望能够记住。

如果因为 $S_x<\frac{1}{3}\Delta_{仪}$，或因估计出的 Δ_A 对实验最后结果的影响甚小，或因条件受限制而只进行了一次测量，则 Δ 可简单地用仪器的误差 $\Delta_{仪}$ 来表示。这时式(1.1.4)中用统计方法计算的 A 类分量 Δ_A 虽然存在，但不能用式(1.1.2)算出。当实验中只要求测量一次时，Δ 取 $\Delta_{仪}$ 的值并不说明只测一次比测多次时 Δ 的值变小，只说明 $\Delta_{仪}$ 和用 $\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_{仪}^2}$ 估算出的结果相差不大，或者说明整个实验中对该被测量 Δ 的估算要求能够放宽或必须放宽。测量次数 n 增加时，用式(1.1.8)估算出的 Δ 虽然一般变化不大，但真值落在 $x_0\pm\Delta$ 范围内的概率却更接近 100%。这说明 n 增加时真值所处的量值范围实际上更小了，因而测量结果更准确了。

1.1.5 间接测量的结果和不确定度的合成

在很多实验中，我们进行的测量都是间接测量。间接测量的结果是由直接测量结果根据一定的数学式计算出来的。这样一来，直接测量结果的不确定度就必然影响到间接测量结果，这种影响的大小也可以由相应的数学式计算出来。

设间接测量所用的数学式（或称测量式）可以表为如下的函数形式：

$$\varphi=F(x,y,z,\cdots)$$

式中的 φ 是间接测量结果，$x,y,z,\cdots$ 是直接测量结果，它们是互相独立的量。设 $x,y,z,\cdots$ 的不确定度分别为 $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z,\cdots$，它们必然影响间接测量结果，使 φ 值也有相应的不确定度 Δ_φ。由于不确定度都是微小的量，相当于数学中的“增量”，因此间接测量的不确定度的计算公式与数学中的全微分公式基本相同。不同之处是：① 要用不确定度 Δ_x 等替代微分 $\mathrm{d}x$ 等；② 要考虑到不确定度合成的统计性质，一般是用‘方、和、根’的方式进行合成。于是，在普通物理实验中用以下两式来简化地计算不确定度

$$\Delta_\varphi=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2(\Delta_x)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2(\Delta_y)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2(\Delta_z)^2+\cdots} \tag{1.1.9}$$

$$\frac{\Delta_\varphi}{\varphi}=\sqrt{\left(\frac{\partial \ln F}{\partial x}\right)^2(\Delta_x)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial y}\right)^2(\Delta_y)^2+\left(\frac{\partial \ln F}{\partial z}\right)^2(\Delta_z)^2+\cdots} \tag{1.1.10}$$

式(1.1.9)适用于 φ 是和差形式的函数，式(1.1.10)适用于 φ 是积商形式的函数。

在科学实验中一般都采用“方、和、根”合成来估计间接测量结果的不确定度。

例　已知金属环的外径 $D_2=(3.600\pm0.004)\text{cm}$ **,内径** $D_1=(2.880\pm0.004)\text{cm}$ **,高度** $h=(2.575\pm0.004)\text{cm}$ **,求环的体积** V **及其不确定度** Δ_V.

解 环体积为

$$V=\frac{\pi}{4}(D_2^2-D_1^2)h=\frac{\pi}{4}\times(3.600^2-2.880^2)\times2.575\text{cm}^3$$

$$=9.436\text{cm}^3$$

环体积的对数及其偏导数为

$$\ln V=\ln\frac{\pi}{4}+\ln(D_2^2-D_1^2)+\ln h$$

$$\frac{\partial\ln V}{\partial D_2}=\frac{2D_2}{D_2^2-D_1^2},\quad \frac{\partial\ln V}{\partial D_1}=-\frac{2D_1}{D_2^2-D_1^2},\quad \frac{\partial\ln V}{\partial h}=\frac{1}{h}$$

代入“方、和、根”合成公式(1.1.10)**,则有**

$$\left(\frac{\Delta_V}{V}\right)^2=\left(\frac{2D_2\Delta_{D_2}}{D_2^2-D_1^2}\right)^2+\left(\frac{2D_1\Delta_{D_1}}{D_2^2-D_1^2}\right)^2+\left(\frac{\Delta_h}{h}\right)^2$$

$$=\left(\frac{2\times3.600\times0.004}{3.600^2-2.880^2}\right)^2+\left(\frac{2\times2.880\times0.004}{3.600^2-2.880^2}\right)^2+\left(\frac{0.004}{2.575}\right)^2$$

$$=(38.1+24.4+2.4)\times10^{-6}=64.9\times10^{-6}$$

$$\frac{\Delta_V}{V}=(64.9\times10^{-6})^{1/2}=0.0081=0.81\%$$

$$\Delta_V=V\frac{\Delta_V}{V}=9.436\times0.0081\text{cm}^3\approx0.08\text{cm}^3$$

因此环体积为

$$V=(9.44\pm0.08)\text{cm}$$

1.2 数 据 处 理

1.2.1 有效数字及其表示

在实验中所测得的被测量都是含有误差的数值，对这些数值的尾数不能任意取舍，应反映出测量值的准确度。所以在记录数据、计算以及书写测量结果时，究竟应写出几位数字，有严格的要求，要根据测量误差或实验结果的不确定度来定。例如用 300mm 长的毫米分度钢尺(2.5 节给出仪器误差为 0.5mm)测量某物体的长度，正确的读法是除了确切地读出钢尺上有刻线的位数之外，还应估计一位，即读到 0.1mm。比如，测出某物的长度是 15.2mm，这表明 15 是确切数字，而最后的 2 是估计数字。值得注意的是在读取整刻度值时初学者往往只读出了整数值，而忘记读估计的那位“0”比如，用钢尺测得的物体长度正好是 15mm 整，应该记录为 15.0mm，不应写成 15mm。又如根据长度和直径的测量值用计算器算出的圆柱体体积为 $V=6158.3201\text{mm}^3$，$\Delta_V=\pm 4\text{mm}^3$。由不确定度为 4mm^3 可以看出，第四位数字 8 已经是不精确的，它后面的四位数字 3201 没有意义。因而圆柱体体积的间接测量值应写作 $V=(6158\pm 4)\text{mm}^3$。6158 这四位数字前面的三位是准确数字，后面一位是存疑数字。准确数字和存疑数字的全体称为有效数字。前述的 15.2mm 为三位有效数字，6158mm^3 为四位有效数字。

有效数字位数的多少，直接反映实验测量的准确度。有效数字位数越多，测量的准确度就越高。例如，用不同精度的量具测量同一物体的厚度 d 时，相对误差也不同。

①用钢尺测量，$d=6.2\text{mm}$，仪器误差 0.5mm，相对误差 $E=\dfrac{0.5}{6.2}=8.1\%$。

② 用 50 分度游标卡尺测量，$d=6.36\text{mm}$，仪器误差 0.02mm，相对误差 $E=\dfrac{0.02}{6.36}=0.31\%$

③用螺旋测微计测量，$d=6.347\text{mm}$，仪器误差 0.004mm，相对误差 $E=\dfrac{0.004}{6.347}=0.063\%$。

由此可见，有效数字多一位，相对误差 E 差不多要小一个数量级。因此取几位有效数字是件严肃的事，不能任意取舍。

写有效数字时应注意以下的要点：

(1)有效数字的位数与小数点位置无关，单位的 SI 词头改变时，有效数字的位数不应发生变化。例如，重力加速度 980cm/s^2，以“m/s^2”表示时记为 9.80m/s^2，与记为 9.8m/s^2 是不同的。前者有三位有效数字，而后者只有两位。若写为 0.00980km/s^2，则数值前面小数点定位所用的“0”不是有效数字，应从非“0”的第一个数算起，仍为三位有效数字。

(2) 为表示方便，特别是对较大或较小的数值，常用 $\times 10^{\pm n}$ 的形式(n 为一正整数) 书写，这样可避免有效数字写错，也便于识别和记忆，这种表示方法叫科学记数法。用这种方法记数值时，通常在小数点前只写一位数字，例如地球的平均半径 6371km 可写作

$6.371\times10^{6}\,\mathrm{m}$，表明有四位有效数字。

(3) 表示测量值最后结果的有效数字尾数与不确定度的尾数一般要取齐。普通物理实验中不确定度一般取一位至两位就可以了，当不确定度的第一位数比较小时经常取两位。相对误差一般取两位数。在计算过程中，对中间运算结果适当多保留几位，以免因过多截取带来附加误差。对 π、$\sqrt{2}$等值应直接按计算器上的按键取用。

(4) 如果在实验中没有进行不确定度的估算，最后结果的有效数字位数的取法如下：一般来说，在连乘除的情况下它跟参与运算的各量中有效数字位数最少的大致相同；在代数和的情况中，则按参与加减的各量的末位数中数量级最大的那一位为结果的末位。作为一种粗略判断方法，最后结果的有效数字位数应和原始测量数据中位数最少者相同或相近。

1.2.2 用作图法处理实验数据

某些实验的观测对象是互相关联的两个（或两个以上）物理量之间的变化关系，实验的任务就是寻求这些物理量互相依存的变化规律。例如，研究单摆周期和摆长的关系，研究金属电阻随温度变化的关系，研究气体压强随温度变化的关系等等。这一类实验中的观测方法是控制某一个量（例如温度）使之依次取不同的值，然后观测另一个量所取的对应值,从而得出一列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和另一列对应的 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 值。如果将这两组数据记录在合适的表格内，便可一目了然，这叫列表法。更形象地处理这类实验数据常用作图法，它能直观地揭示出物理量之间的规律，粗略显示对应的函数关系。

为了使图线能清楚地、定量地反映出物理现象的变化规律，并能准确地从图线上确定物理量值或求出有关常数，所作的图应符合准确度要求，因此必须用坐标纸作图。

作图规则：

(1) 选择合适的坐标分度值。坐标分度值的选取应符合测量值的准确度，即应能反映测量值的有效数字位数。一般以 1 或 2mm 对应于测量仪表的最小分度值或对应于测量值的次末位数，即倒数第二位数。对应比例的选择应便于读数，不宜选成 1∶1.5 或 1∶3，坐标范围应恰好包括全部测量值，并略有富裕。最小坐标值不必都从零开始，以便作出的图线大体上能充满全图，布局美观、合理。

(2) 标明坐标轴。以自变量（即实验中可以准确控制的量，如温度、时间）为横坐标，以因变量为纵坐标。用粗实线在坐标纸上描出坐标轴，在轴上注明物理量名称、符号、单位(要用斜线,如长度 l/mm)，并按顺序标出标尺整分格上的量值。这些量值一般应是一系列正整数（如 1,2,3,4,…,或 0,2,4,6,…,或 0,5,10,…)及其 10^{n}(n 为正负整数)倍,而不要标注实验点的测量数据。

(3) 标实验点。实验点可用“ + ”、“ ⊙ ”等符号标出。

(4) 连成图线。因为每一个实验点的误差情况不一定相同，因之不应强求曲线通过每一个实验点而连成折线（仪表的校正曲线不在此例）。应该按实验点的总趋势连成光滑的曲线，要做到图线两侧的所有实验点与图线的距离都最为接近且分布大体均匀。曲线正穿过实验点时，可以在点处断开。

(5) 写明图线特征。有必要时，可利用图上的空白位置注明实验条件和从图线上得

出的某些参数，如截距、斜率、极大极小值、拐点和渐近线等。

(6)写图名。在图纸下方或空白位置写出图线的名称以及某些必要的说明，要使图线尽可能全面反映实验的情况。最后写上实验者姓名、实验日期，将图纸与实验报告订在一起。

1.2.3 实验数据的直线拟合

作图法虽然在数据处理中是一个很便利的方法，但是在图线的绘制上往往会引入附加误差，尤其在根据图线确定常数时，这种误差有时很明显。为了克服这一缺点，在数理统计中研究了直线拟合问题（或称一元线性回归问题），常用一种以最小二乘法为基础的实验数据处理方法。由于某些曲线的函数可以通过数学变换改写为直线，例如对函数 $y=ae^{-bx}$ 取对数得 $\ln y=\ln a-bx$，这样 $\ln y$ 与 x 的函数关系就变成直线型了。这一方法也适用于某些曲线型的规律。

下面就数据处理问题中的最小二乘法原理作一简单介绍。

设某一实验中，可控制的物理量取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 值时，对应的物理量依次取 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 值。我们假定对 x_i 值的观测误差很小，而主要误差都出现在 y_i 的观测上。如果从 (x_i, y_i) 中任取两组实验数据就得出一条直线，那么这条直线的误差有可能很大。直线拟合的任务就是用数学分析的方法从这些观测到的数据中求出一个误差最小的最佳经验式 $y=a+bx$。按这一最佳经验公式作出的图线虽不一定能通过每一个实验点，但是它以最接近这些实验点的方式平滑地穿过它们。很明显，对应于每一个 x_i 值，观测值 y_i 和最佳经验式的 y 值之间存在一偏差 δy_i，我们称它为观测值 y_i 的偏差，即

$$\delta y_i = y_i - y = y_i - (a + bx_i) \qquad (i = 1,2,\cdots,n)$$

最小二乘法的原理就是：如果各观测值 y_i 的误差互相独立且服从同一正态分布，当 y_i 的偏差的平方和为最小时，得到最佳经验式。根据这一原理可求出常数 a 和 b。

设以 S 表示 δy 的平方和，它应满足

$$S = \sum (\delta y_i)^2 = \sum [y_i - (a + bx_i)]^2 = \min$$

上式中的各 y_i 和 x_i 是测量值，都是已知量，而 a 和 b 是待求的，因此 S 实际上是 a 和 b 的函数。令 S 对 a 和 b 的偏导数为零，即可解出满足上式的 a、b 值。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum (y_i - a - bx_i) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum (y_i - a - bx_i)x_i = 0$$

即

$$\sum y_i - na - b\sum x_i = 0, \quad \sum x_i y_i - a\sum x_i - b\sum x_i^2 = 0$$

其解为

$$a = \frac{\sum x_i y_i \sum x_i - \sum y_i \sum x_i^2}{\left(\sum x_i\right)^2 - n\sum x_i^2}, \quad b = \frac{\sum x_i \sum y_i - n\sum x_i y_i}{\left(\sum x_i\right)^2 - n\sum x_i^2}$$

将得出的 a 和 b 代入直线方程，即得到最佳的经验公式 $y=a+bx$。

上面介绍的用最小二乘法求经验公式中的常数 a 和 b 的方法，是一种直线拟合法。它在科学实验中的运用很广泛，特别是有了计算器后，计算工作量大大减小，计算精度也

能保证，现在用计算机运算速度更快，因此它是很有用又很方便的方法。用这种方法计算的常数值 a 和 b 是“最佳的”，但并不是没有误差，它们的误差估算比较复杂。一般地说，一列测量值的 δy_i 大（即实验点对直线的偏离大），那么由这列数据求出 a、b 值的误差也大，由此定出的经验公式可靠程度就低；如果一列测量值的 δy 小（即实验点对直线的偏离小），那么由这列数据求出的 a、b 值的误差就小，由此定出的经验公式可靠程度就高。

下面介绍实验数据的直线拟合问题中的相关系数。相关系数的定义为

$$r=\frac{\sum \Delta x_i \Delta y_i}{\sqrt{\sum (\Delta x_i)^2}\sqrt{\sum (\Delta y_i)^2}} \tag{1.2.1}$$

式中 $\Delta x_i=x_i-\bar{x}$，$\Delta y_i=y_i-\bar{y}$ 它是从函数 $\varphi=x\pm y$ 的形式导出的（推导从略）。

当 x 和 y 为互相独立的变量时，Δx_i 和 Δy 的取值和符号彼此无关（即无相关性），因此

$$\sum \Delta x_i\ \Delta y_i=0$$

即

$$r=0$$

在直线拟合中，x 和 y 并不互相独立，它们有线性关系，这时 Δx 和 Δy 的取值和符号不再无关而是有关（即有相关性）。例如设函数形式为 $x\mp y=0$，即 $y=\pm x$，那么 Δx 和 Δy 之间就会有如 $\Delta y=\pm\Delta x$ 的关系，将这一关系代入式(1.1.11)，可得

$$r=\frac{\sum \Delta x_i(\pm \Delta x_i)}{\sqrt{\sum (\Delta x_i)^2}\sqrt{\sum (\Delta x_i)^2}}=\pm\frac{\sum (\Delta x_i)^2}{\sum (\Delta x_i)^2}=\pm 1$$

从相关系数的这一特性可以判断实验数据是否符合线性。如果 r 很接近于 1，则各实验点均在一条直线上。普通物理实验中 r 如达到 0.999，就表示实验数据的线性关系良好，各实验点聚集在一条直线附近。相反，相关系数 $r=0$ 或趋近于零，说明实验数据很分散，无线性关系。因此用直线拟合法处理数据时要算相关系数。具有二维统计功能的计算器有直接计算 r 及 a、b 的功能，并有专门的按键“r”及“a”、“b”键。

练　习　题

1. 指出下列各数是几位有效数字。

(1) 0.0001；　(2) 0.0100；　(3) 1.0000；　(4) 980.12300；

(5) 1.35；　(6) 0.0135；　(7) 0.173；　(8) 0.0001730。

2. 改正下列错误，写出正确答案。

(1) 0.10830 的有效数字为六位；

(2) $P=(31690\pm 200)$kg；

(3) $d=(10.430\pm 0.3)$cm；

(4) $t=(18.5476\pm 0.3123)$cm；

(5) $D=(18.652\pm 1.4)$cm；

需要全本请访问 www.ertongbook.com

(6) $h=(27.3\times10^4\pm2000)\text{km}$ ；

(7) $R=6371\text{km}=6371000\text{m}=637100000\text{cm}$；

(8) 最小分度值为分（′）的测角仪测得角度 θ 刚好为 60 度整，测量结果表示为 $\theta=60^\circ\pm2'$。

3. 推导圆柱体体积 $V=\dfrac{\pi d^2 h}{4}$ 的不确定度合成公式 $\dfrac{\Delta_V}{V}$（“方和根”合成）。

4. 计算 $\rho=\dfrac{4M}{\pi D^2 H}$ 的结果及不确定度 Δ_ρ，并分析直接测量值 M、D、H 的不确定度对间接测量值 ρ 的影响（即合成公式中哪一项的单项不确定度的影响大？）。其中 $M=(236.124\pm0.004)\text{g}$，$D=(2.345\pm0.005)\text{cm}$，$H=(8.21\pm0.03)\text{cm}$。

5. 利用单摆测重力加速度 g，当摆角很小时有 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ 的关系。式中 l 为摆长，T 为周期，它们的测量结果分别为 $l=(97.69\pm0.03)\text{cm}$，$T=(1.9842\pm0.0005)\text{s}$，求重力加速度及其不确定度。

6. 选择题

(1) 设下列各式等号前的各个数是某些测量中直接测量结果的量值，等号后的数是相应的间接测量结果的量值，从参与运算的各量的有效数字来判断，哪些题的结果有效位数是明显不合理的，写出它们的题号。

A. $35.780+2.4=38.2$ ；　　B. $92.5-88.330=4.1700$；

C. $6.40\div8.0000=0.800$；　　D. $(0.729)^{1/3}=0.9$（1/3 为精确数）。【 】

(2) 设下列各式等号前的各个数是某些测量中直接测量结果的量值，等号后的数是相应的间接测量结果的量值，从参与运算的量的有效数字来判断，哪些题的结果有效位数基本是合理的，写出它们的题号。

A. $92.5-88.330=4.170$ ；　　B. $(0.9801)^{1/2}=0.9900$；

C. $0.99\times2.000=2$ ；　　D. $125.0+0.1234=125.1$ 。【 】

(3) 对某一被测量进行测量时，下列各例中哪种因素可能使测量结果主要产生系统误差？

A. 指针式检流计的轴尖和支承之间的摩擦力加大，对测量的影响；

B. 螺旋测微计微分套筒圆周上的刻线（50 格）和固定套筒上纵刻线不在同一曲面上，读数时有一定的视差；

C. 磁电式电压表放置在离其他铁磁体很近的地方，使内部磁场变弱且不均匀，对电压测量的影响。【 】

(4) 在测量中，下列各例中哪种因素可能使测量结果主要产生随机误差？

A. 天平的左右臂臂长不等，对质量测量的影响；

B. 电流表的零点(位)不对，对电流测量的影响；

C. 望远镜未调消视差，对瞄准和读数的影响；

D. 水银温度计的玻璃毛细管各处粗细不匀而产生的示值误差分量。【 】

(5) 测量中，下列各例中哪一种因素可能使测量结果主要产生随机误差分量？

A. 指针式电压表内，线圈所处磁场比出厂标定时有所减弱，对电压测量的影响；

B. 在海拔高、重力加速度小的地区使用水银气压计测大气压，未作重力加速度修正；

C. 电桥的平衡指示所用的电流计的零点（位）不对，对电桥测量结果的影响；

D. 对某种测量，读数时要估读到最小分度（格）的 1/10，而估读不准，可能产生的误差。 【 】

(6) 用量程为 15mA、准确度等级为 1.5 级电流表测量某恒流源输出电流 I，电表表盘共有 60 分度(格)，当指针恰好指在 30 分度(格)线上时，测量结果如下：

A. $I=(7.50\pm0.23)$mA；　　B. $I=(7.500\pm0.225)$mA；

C. $I=(7.50\pm0.11)$mA；　　D. $I=(7.500\pm0.113)$mA。 【 】

(7) 被测电压 $U\approx25$V，用下列仪表中哪一台进行测量，可使测量结果的不确定度最小？

A. 量程为 30V 的 2.5 级电压表；

B. 量程为 300V 的 0.5 级电压表；

C. 量程为 1000V，$\Delta_U=0.08\%U+1$V 的三位半数字电压表；

D. 量程为 100V 的 1.5 级电压表。 【 】

(8) 被测电流 $I\approx0.25$A，用下列仪表中的哪一台进行测量，将使测量结果的误差绝对值可能最大？

A. 量程为 1A 的 5.0 级电流表；

B. 量程为 3A 的 1.5 级电流表；

C. 量程为 5A 的 0.5 级电流表；

D. 量程为 2A，$\Delta_I=0.1\%I+0.01$A 的数字电流表。 【 】

2 力学和热学

2.1 拉伸法测弹性模量

物体在外力作用下都要或多或少地发生形变。当形变不超过某一限度时，撤走外力之后，形变能够随之消失，这种形变称之为“弹性形变”。发生弹性形变时，物体内部产生恢复原状的内应力。弹性模量是反映材料形变与内应力关系的物理量，是工程技术中常用的参数。本实验用拉伸法测量弹性模量，研究拉伸正应力与线应变之间的关系。

2.1.1 实验目的

(1) 学习用拉伸法测量弹性模量的方法；

(2) 掌握螺旋测微计和读数显微镜的使用

(3) 学习用逐差法处理数据。

2.1.2 实验原理

2.1.2.1 弹性模量及其测量方法

本实验讨论最简单的形变——拉伸形变，即棒状物体（或金属丝）仅受轴向外力作用而发生伸长的形变（称拉伸形变）。设有一长度为 L、截面积为 S 的均匀金属丝，沿长度方向受一外力 F 后金属丝伸长 δL。单位横截面积上的垂直作用力 F/S 称为正应力，金属丝的相对伸长 $\delta L/L$ 称为线应变。实验结果指出，在弹性形变范围内，正应力与线应变成正比，即

$$\frac{F}{S}=E\frac{\delta L}{L}$$

这个规律称为胡克定律。式中的比例系数

$$E=\frac{F/S}{\delta L/L} \tag{2.1.1}$$

称作材料的弹性模量。它表征材料本身的性质，E 越大的材料，要使它发生一定的相对形变所需的单位横截面积上的作用力也越大。一些常用材料的 E 值见表 2.1.1。E 的单位为 Pa($1\text{Pa}=1\text{N/m}^2$；$1\text{GPa}=10^9\text{Pa}$)。

表 2.1.1 一些常用材料的弹性模量

材料名称	钢	铁	铜	铝	铅	玻璃	橡胶
E/GPa	196～216	113～157	73～127	约 70	约 17	约 55	约 0.007 8

本实验测量的是钢丝的弹性模量，如果测得钢丝的直径为 D，则可将(2.1.1)式进一步写为

$$E=\frac{4FL}{\pi D^2\delta L} \tag{2.1.2}$$

测量钢丝的弹性模量的方法是将钢丝悬挂于支架上，上端固定，下端加砝码对钢丝施力 F，测出钢丝相应的伸长量 δL，即可求出 E。钢丝长度 l 用钢尺测量，钢丝直径 D 用螺旋测微计测量，力 F 由砝码的重力 $F=mg$ 求出。实验的主要问题是测准 δL。δl 一般很小，约 10^{-1}mm 数量级，在本实验中用读数显微镜测量（也可利用光杠杆法或其他方法测量）。为了使测量 δL 更准确些，采用测量多个 δL 的方法以减少测量的随机误差，即在钢丝下端每加一个砝码测一次伸长位置，逐个累加砝码，逐次记录伸长位置。通过数据处理求出 δL。

2.1.2.2 逐差法处理数据

如果用上述方法测量 10 次得到相应的伸长位置 $y_1, y_2, \cdots, y_{10}$，如何处理数据，算出钢丝的伸长量 δl 呢？

我们可以由相邻伸长位置的差值求出 9 个 δL，然后取平均，则

$$\delta L=\frac{(y_2-y_1)+(y_3-y_2)+\cdots+(y_{10}-y_9)}{9} \tag{2.1.3}$$

从上式可以看出中间各 y_i 都消去了，只剩下$(y_{10}-y_1)/9$，用这样的方法处理数据，中间各次测量结果均未起作用。

为了发挥多次测量的优越性，可以改变一下数据处理的方法，把前后数据分成两组，y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 为一组，$y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}$ 为另一组。将两组中相应的数据相减得出 5 个 l_i，$l_i=5\delta L$ 则

$$\delta L=\frac{(y_6-y_1)+(y_7-y_2)+(y_8-y_3)+(y_9-y_4)+(y_{10}-y_5)}{5\times 5} \tag{2.1.4}$$

这种处理数据的方法称为逐差法，其优点是充分利用了所测数据，可以减小测量的随机误差，而且也可以减少测量仪器带来的误差。因此是实验中常用的一种处理数据的方法。

2.1.3 实验仪器

实验装置如图 2.1.1 所示。

(1) 支架。用以悬挂被测金属丝（钢丝），钢丝上端用夹具夹紧，夹具固定在支架的顶端，钢丝的下端也用夹具夹紧。下夹具的另一端可挂砝码，该夹具上有一水平刻线，作为钢丝下端位置的读数标记。

(2) 读数显微镜。它是用来较准确地测量微小位移或长度的仪器。本实验用的读数显微镜是由放大倍率为 1 的物镜和测微目镜构成。测微目镜是由叉丝分划板和目镜以及鼓轮读数系统组成。鼓轮上刻有 100 个分格，鼓轮转一圈，叉丝移动 1mm，所以分度值为 0.01mm。物镜的作用是将钢丝上的读数标记线成像在叉丝分划板上，由测微目镜进行测量（测微目镜的结构详见 4.1.3 节）。

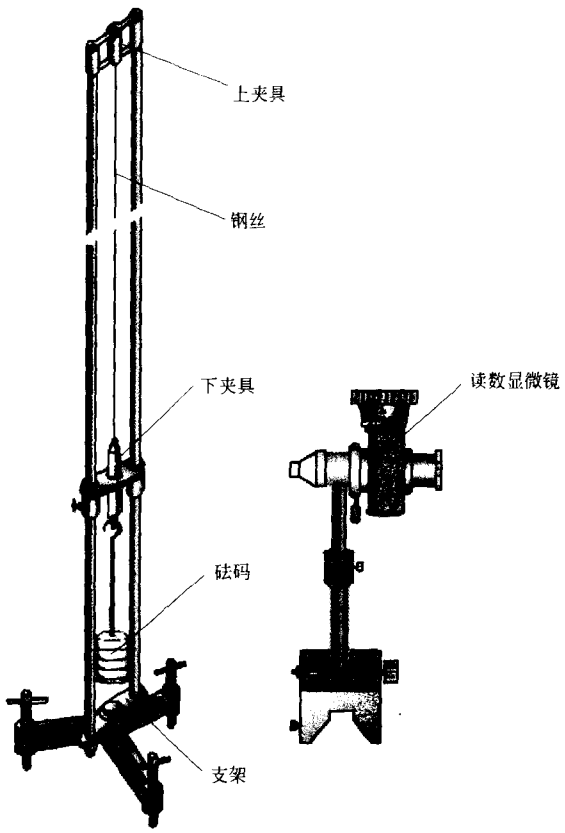

图 2.1.1　测量弹性模量的实验装置

（3）底座。支架和读数显微镜放在同一底座（底座图中未画）上，底座下面有三个调节螺钉，用来调节钢丝铅直。

（4）此外，还备有钢尺和螺旋测微计（见附录 2.1.1)分别测量钢丝长度和直径。

2.1.4　实验步骤和注意事项

（1）调整钢丝竖直。钢丝下夹具上应先挂上砝码钩，用以拉直钢丝。调整底座螺钉使钢丝夹具不与周围支架碰蹭。

（2）调节读数显微镜。应先粗调显微镜高度，使之与钢丝下夹具上的标记线同高，再细调读数显微镜。细调步骤是先调节目镜看清叉丝，再移动镜筒看清标记线，使标记线的像与叉丝无视差（即当视线略微上下移动时，标记线的像与叉丝之间无相对移动。关于“视差”详见本书 4.0.2节）。

（3）测量。测量钢丝长度 L 及其伸长量 δL。先读出只挂砝码钩（其质量为 0.200kg）时的钢丝夹具标记线的位置，然后在砝码钩上每加一砝码（质量均为 0.200kg),读一次位置 y_i。先从 0.200kg 逐步增加到 0.200×10kg,再从 0.200×10kg 逐步减少至 0.200kg，各测一组数据。再用螺旋测微计在钢丝的不同地方测量其直径 D,测 6 次，并在测量前后

记录螺旋测微计的零点 d 各 3 次。

注意事项：

（1）正确使用和维护读数显微镜。调节显微镜要轻、慢，不要用手触摸物镜和目镜的光学表面。调好后，在整个测量过程中不得再碰动显微镜。

（2）测量时注意消除测微目镜丝杠空程带来的误差。整个测量过程中手轮不能中途反转，从增砝码变到减砝码时更要注意消除空程的影响。

（3）增减砝码时动作要轻慢，等钢丝不晃动并且形变稳定之后再进行测量。

2.1.5 数据表格及数据处理

1. 测钢丝长度 L 及其伸长量 δL

仪器编号 _____；钢丝长度 $L=$ _____ mm。

序号	$F_i(F_i=mg)$/N	y_i/mm		$l_i'(l_i'=y_{i+5}-y_i)$/mm		$l_i\left(l_i=\frac{l_i'+l_{i+1}'}{2}\right)$ /mm
		增砝码时	减砝码时	增砝码时 l_+	减砝码时 l_-	
1	0.200×1×9.80					
2	0.200×2×9.80					
3	0.200×3×9.80					
4	0.200×4×9.80					
5	0.200×5×9.80					
6	0.200×6×9.80					$\bar{l}=\frac{\sum_{i=1}^{5} l_i}{5}$
7	0.200×7×9.80					
8	0.200×8×9.80					
9	0.200×9×9.80					
10	0.200×10×9.80					$=$ _____ mm

用计算器的统计功能可直接求出 $\bar{l}$ 及标准偏差 s_l。同时还要考虑仪器的误差，本实验读数显微镜测某一位置 y_i 的仪器误差为 0.01mm，因此用它测一段伸长量 $l=y_{i+5}-y_i$，则 l 的仪器误差 $\Delta_{l仪}=\sqrt{(\Delta_{y_{i+5}仪})^2+(\Delta_{y_i仪})^2}=\sqrt{2}\times 0.01\text{mm}$。由 s_l 和 $\Delta_{l仪}$ 这两项的方和根便可求出 l 的不确定度。由于 $l=5\delta L$，也可进一步求出 δL 的不确定度，写出 $\delta L\pm\Delta_{\delta l}$。

2. 测钢丝直径 D

测定螺旋测微计的零点 d（单位为 mm）。

测量前 _____，_____，_____

测量后 _____，_____，_____ } 平均值 $d=$ _____ mm。

序号	1	2	3	4	5	6
D_i/mm						

需要全本请访问 www.ertongbook.com