绪　　论

一、物理实验的作用与地位

物理学是一门实验科学，无论是物理概念的产生还是物理规律的发现都是建立在严格的科学实验基础上的，同时，建立起来的理论正确与否也必须通过实验来验证。因此，物理实验在物理学的发展过程中的重要地位和作用就不言而喻了。

在古代社会中就已有物理实验。我国元代赵友钦根据他所做的光学实验证明了光的直进性，还说明了光源的大小和强度、光源与不同直径小孔的距离、像的大小和亮度这三者的复杂关系。而古阿拉伯人伊本。海赛木则通过大量的光学实验认定光线在不同介质的界面上折射时，入射线、折射线和法线在同一平面上，同时正确指出人能看见物体是由于物体发出的光线进入人眼所致等。他的实验结果和解释为近代光学的研究奠定了基础。

在 15 世纪以前，物理实验基本上是对生产过程和自然过程的直接观察，是记录和整理生产经验和观察到的自然事实，而专门以探索为目的的活动不多。真正把科学的实验方法引入物理学研究中来，从而使物理学走上真正科学道路的是 16 世纪意大利物理学家伽利略。为了彻底否定亚里士多德关于速度与外力成正比等错误的运动学理论，伽利略在做了著名的比萨斜塔实验后又做了斜面实验。在设计思想巧妙的斜面实验中，他把难以直接测量的速度和时间的关系，转化为路程和时间的关系，并通过实验的研究和数学推理得到了反映匀加速直线运动重要特性的时间平方定律，从而断定斜面运动是匀加速直线运动；在改变斜面倾斜度实验时获得同样的定律，推断出自由落体运动也应是匀加速运动，从而揭示出自由落体运动之谜。伽利略卓越的实验思想和实验方法结合数学的分析、归纳和演绎确立科学的定律，是他研究方法的精髓，也是他留给后人的宝贵财富。

在 16 世纪和 17 世纪，科学的实验方法已初具规模，但许多实验是以隔离某些因素，排除外部干扰来进行的，而不是以强化和激化自然过程为主。到了 19 世纪这种实验方法才得到充分发展。现举电磁学的发展来说明。实验证明了摩擦能生电、莱顿瓶能储存电。 18 世纪 80 年代法国物理学家库仑在开文迪许等人实验的基础上对静电现象进行定量的测量，确立了静电学的基本定律——库仑定律，奠定了电磁学的基础。 1800 年意大利教授伏打用锌片与铜片夹以盐水浸湿的纸片做成电堆进行实验，使人们第一次获得持续电流——伽伐尼电池，为电流研究准备了物质基础。在 19 世纪以前，人们普遍接受吉尔伯特的观点，认为电和磁是两种本质不同的现象。 1820 年丹麦物理学家奥斯特在课堂演示时发现了电磁现象，以后通过实验证明了电流与磁之间有相互作用，冲破了电与磁无关的学说。同年法国物理学家安培通过实验证明了电流与电流之间有相互作用，提出了一切磁现象起源于电流的假说。与此同时，法国物理学家毕奥和萨伐尔通过实验总结出直线电流对磁针作用正比

需要全本请访问 www.ertongbook.com

于电流强度、反比于距离的实验规律。全面研究电与磁相互转化关系的是英国自学成才的物理学家法拉第。他经过连续 10 年的实验，在 1831 年实现了“磁性发电”的设想。并结合实验进行了定量计算，总结出了电磁感应定律。英国物理学家麦克斯韦发展了法拉第关于场的概念，系统总结了电学和磁学的新成就，提出了著名的电磁场理论。在这个理论中，他预言了电磁波的存在，并预见到光也是一种电磁波。麦克斯韦的电磁理论把电、磁和光三个领域综合到一起，具有划时代意义。但这个预言只有在 20 年后由德国物理学家赫兹从实验发现了电磁波之后。才真正被人们所接受。

在现代物理学的进展中，物理实验起着更重要的作用。 20 世纪物理学的革命首先是电子、X 射线和放射性，它们都是物理学家致力于实验研究的结果。在 19 世纪中叶，不少物理学家在低压气体放电管的实验研究中发现了阴极射线. 并认为是一种电磁波。这个世纪末期，英国物理学家汤姆逊用不同方法，对不同的阴极和气体产生的阴极射线进行比荷的测量，都得到相近的结果，认为阴极射线是带电的微粒子流，而不是一种电磁辐射，这个微粒就是电子。英国物理学家密立根在著名的油滴实验中，得到了精确的电子电量，并证明了一个电子的电量 e 是电荷的基本单位。电子是人类认识的第一个基本粒子。

19 世纪末，德国物理学家伦琴在用真空放电管做实验时发现了另一种性质不同于阴极射线的射线——X 射线。X 射线的发现，暗示人们在原子内部有着复杂的结构，宣布 20 世纪新的物理学即将到来。其实伦琴不是第一个看到 X 射线的人，而它被伦琴发现是由于他十分重视实验在科学研究中的作用。伦琴认为“实验是最有力的、最可靠的手段，能使我们揭示自然之谜。实验是判断假说应当保留还是放弃的最后鉴定。”这对我们是很有教益的。

继 X 射线之后，法国的贝克勒尔发现铀盐会自动放出一种新射线， 1897 年居里夫妇发现了钍、钋和镭等元素也放出与 X 射线不同的射线，英国物理学家卢瑟福在 1900 年前后通过实验发现了 α、β 和 γ 射线，并通过实验分别被证明为氦的正离子流、电子流和原子核内部的电磁波。这些射线由放射性产生的。电子、 X 射线和放射性的发现，以实验动摇了关于原子不可分的观点，把物理学从经典物理阶段推进到现代物理阶段，科学实验也从只观测宏观现象进入到同时考察微观现象，使物理学进入到一个新的领域。

理论的正确与否是需要实验进行检验的。正确的就发展，错误的就摒弃。在物理学发展史中这类例子很多，现仅举光的波动、微粒说之争和爱因斯坦的相对论被人们接受的例子来说明。

在人们探索光的本质的过程中，出现了长达三个世纪的所谓“微粒说”和“波动说”之争。这个争端反映了唯物辩证法对立统一的规律。 1666 年牛顿提出了光的微粒说，同一时代另一著名学者荷兰物理学家惠更斯于 1678 年提出了波动说，由于牛顿的声望和波动说的粗糙，微粒说占了上风。1801 年英国医生托马斯·杨做了双缝干涉实验，动摇了微粒说的统治地位，以后又通过菲涅耳等人的实验支持了波动说。在 19 世纪末，波动说占了绝对优势。在 20 世纪初，光电效应实验又揭示了光的粒子性， 1923 年康普顿在 X 射线散射实验中，发现了康普顿效应，证实并使人们认识到光的波粒二象性。

在 19 世纪末到 20 世纪初，伟大的物理学家、科学巨匠爱因斯坦在物理实验和理论的基础上，创立了具有划时代意义的广义相对论学说。这一学说提出后，当时很难被人们接受，还是在观测到水星近日点的进动、光谱线的红移和引力场会使光线弯曲等事实之后，才被人们广泛接受。

从上面的描述中可知物理实验的重要性是显而易见的，当然在强调实验重要性时，绝不意味着理论不重要。在物理学的发展中，理论和实验有着同等的重要性，任何轻视理论或实验的态度都是不对的。

二、大学物理实验课程的作用、任务和基本要求

1. 作用

大学物理实验是对高等工科学校学生进行科学实验基本训练的一门独立的必修基础课程，是学生进入大学后受到系统实验方法和实验技能训练的开端，是工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础。

本课程应使学生在中学物理实验的基础上，按照循序渐进的原则，学习物理实验的方法，得到实验技能的训练，从而初步了解科学实验的主要过程与基本方法，为今后的学习和工作奠定良好的实验基础。

2. 任务

（1）通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

（2）培养与提高学生的科学实验能力。其中包括：能够通过阅读实验教材与资料，做好实验前的准备；能够借助教材或仪器说明书正确使用常用仪器；能够运用物理学理论对实验现象进行初步分析判断；能够正确记录和处理数据，绘制曲线，说明实验结果，撰写合格的实验报告；能够完成简单的具有设计性内容的实验。

（3）培养与提高学生的科学实验素养。要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神，遵守纪律、团结协作和爱护公共财产的优良品德。

3. 基本要求

通过物理实验的基本训练，要求做到：

（1）能够自行完成预习、进行实验和撰写报告等主要实验程序。

（2）能够调整实验装置，并基本掌握常用的操作技术。例如：零位调整；水平、铅直调整；光路的共轴调整；消视差调节；逐次逼近调节；根据给定的电路图正确接线等。

（3）了解物理实验中常用的实验方法和测量方法。如比较、放大、转换、模拟、补偿、平衡和干涉等方法。

（4）能够进行常用物理量的一般测量。例如：长度、质量、时间、热量、温度、电流强度、电压、电动势、电阻、磁感应强度、折射率等。

（5）了解常用仪器的性能，并学会使用方法。例如：测长仪器、计时仪器、测温仪器、变阻器、电表、直流电桥、直流电势差计、通用示波器、低频信号发生器、分光计、常用电源和常用光源等。

在进行以上各项基本训练过程中，要重视对物理现象的观察和分析，运用理论去指导实践、解决实验中的问题。

三、大学物理实验课的基本教学程序

1. 实验前的预习

（1）阅读实验教材的有关内容及参考资料，弄清实验的目的、原理和使用的仪器，全面地了解测量的方法、实验的内容和注意事项，并回答【预习提要】中提出的有关问题。

（2）写好预习报告。预习报告的主要内容是：实验名称、目的、简要的实验原理（或主要的计算公式）、实验内容及仪器（要写出哪些是已知量，哪些是待测量，这些待测量用什么仪器去测量）、记录数据表格、遇到的问题及注意事项。

每次实验前，教师要检查预习情况，未预习者原则上不让做实验。

2. 实验中的观测

（1）认真听讲：做实验前，教师要作简要的讲解，这对做好实验是很有益处的。学生要认真注意听讲，这样可起到事半功倍的效果。

（2）实验操作：在操作前，先熟悉主要仪器，了解其使用方法。然后进行安装调整并检查仪器是否完好，如有问题要及时向教师提出，切不可盲目从事。待基本符合要求后，方可进行实验操作、测试数据。

（3）记录数据及实验现象：应科学地、实事求是地记录下实验中的全部有关的原始数据和出现的各种现象。有关数据中除了直接的测量数据外，还应当包括实验条件（如与实验结果有关的温度、湿度、气压等）和主要仪器的名称、型号、规格、准确度等。在记录数据时要特别注意它的有效数字和单位。

测试结束后，把原始数据记录给教师审阅签名认可后，方可整理仪器结束实验。

3. 实验后的报告

（1）实验名称。

（2）实验目的。

（3）实验原理：写出简要的原理及有关的计算公式（不写推导过程），如有必要的图（如电路图、光路图等），还要描绘出来。

（4）实验仪器：包括实验用的所有仪器、量具和材料的名称、型号和规格等。

（5）实验数据：把测得的原始数据及必要的中间计算结果认真地填写在设计好的记录表格之中，切忌不能用教师签字的那张原始数据代替实验报告的这部分内容。

（6）数据处理：按所讲述的数据处理方法处理数据，并按结果表达式写出实验结果。

（7）实验现象、误差分析、讨论以及对实验的建议、体会等。

（8）附上经教师审核签字的原始数据记录。

实验报告一律用统一规定的实验报告纸书写，文体要端整，字句要简练，图表要按规定要求格式绘制。

第一章　误差与数据处理

物理实验有两个方面的任务：一是定性地观察物理现象和变化过程；二是定量地测量物理量并确定物理量之间的关系。要测量就会有误差。而误差的存在与大小将直接影响测量效果；要确定物理量之间的关系只有通过对数据进行处理才能完成。因此，研究误差与数据处理是物理实验必不可少的。

当今误差与数据处理已成为一门学科，其中包含的内容很多，其理论基础是概率论与数理统计，又比较繁杂。本书不全面介绍误差与数据处理的内容，也不过多地进行繁杂的数学推导与论证，只介绍一些常用的误差与数据处理的初步知识和作一些简单而必要的推导。

第一节　测量与误差

一、测量与误差的基本概念

(一)测 量

1. 测量的含义

测量是人类认识和改造客观世界的一种必不可少的重要手段。在物理实验中，特别是在定量研究中的测量是少不了的。

什么是测量？测量就是把待测物理量与作为计量单位的同类已知量相比较，找出被测量是单位多少倍的过程。这个倍数叫做测量的读数，读数加上单位记录下来就是数据。任何物理量都是有单位的。因此，在物理实验中，测量物理量记录数据时，一定不要忘记记录单位。

在完成一个测量时，必须明确测量对象、测量单位、测量方法和测量准确度，通常把这四点称为测量的四要素。

2. 测量的分类

在科学实验中会遇到各种类型的测量，我们可以从不同的角度对测量进行分类。按获得数据的方法可分为直接测量和间接测量；按测量条件的不同可分为等精度测量和非等精度测量。

a. 直接测量和间接测量

直接测量：直接由仪器标尺（刻度）读数而获得被测量的值的测量，称为直接测量。例

需要全本请访问 www.ertongbook.com

如，用游标卡尺测量长度，用秒表测时间。用天平称衡质量，用电流表测电流。用温度计测量温度等。

间接测量：有的物理量的测量很难通过仪器直接读数得到结果，但通过一些方法或找到这个量与某些能进行直接测量的量之间的函数关系（公式），就能算出被测量的大小，这种测量称为间接测量。例如，测量一个圆柱体的体积，就可利用公式（函数关系） $V=\pi R^2 h$，在用米尺或游标卡尺等测长仪器直接测出半径 R 和高 h 后，代入公式中算出 V。通过这种方式进行 V 的测量就是间接测量。

间接测量是大量的，直接测量是基本的，任何间接测量都是通过直接测量来实现的。一个间接测量量在一定的条件下也可以进行直接测量。比如速度的测量，一般是直接测出时间 t 和在时间 t 内通过的路程 s 后，利用公式 $v=s/t$ 得到；而速度表则可通过直接读数测出车的速度。

b. 等精度测量与非等精度测量

在测量过程中，影响测量结果的各种条件不发生改变的（多次）测量叫做等精度测量；反之，称为非等精度测量。例如，在相同的环境中，由同一个人，在同一台仪器上，采用同样的方法对同一物理量进行多次测量就是等精度测量。显然，它们的可靠程度是相同的，这就是说，对同一物理量进行可靠程度相同的多次测量就是等精度测量。如果在不同的环境中，或由不同人员，或在不同的仪器上，或采用不同的方法，总之在改变测量条件的情况下对同一物理量进行多次测量，其可靠程度是不相同的，即这种测量是非等精度测量。

一般非等精度测量是在科学研究、重要的精密测量等工作中，为了获得更可靠的测量结果而采用的，在数据处理时也比较复杂，所以一般情况下不用它。本书要求的都是等精度测量，至少也是视为等精度测量的。如果不是也要通过某种数据处理方法把它变为等精度测量。

(二)误差的基本概念

1. 真值

任何一个物理量在某一时刻和某一位置或某一状态下，都存在着一个客观值，这个客观值称为真值。

2. 绝对误差与相对误差

a. 绝对误差

测量当然希望得到真值，但不管测量仪器多么精密，采用的方法多么完整，环境多么稳定，实验人员的技术多么精湛，测量值与真值之间总存在着差异，这个差异就称为误差。其定义式为

$$\Delta' N(\text{误差}) = N_i(\text{测量值}) - N(\text{真值}) \tag{1-1-1}$$

由于是测量值对真值的绝对偏离，通常把它称为绝对误差。显然绝对误差除大小外，还有正负（方向）。由于是一个物理量，单位也不能忘记。

在实验中经常会碰到一个与误差相关的概念——修正值，其定义如下：

$$\Delta(\text{修正值}) = N(\text{真值}) - N_i(\text{测量值}) \tag{1-1-2}$$

由此可得

$$N(\text{真值}) = N_i(\text{测量值}) + \Delta(\text{修正值})$$

这说明，只要知道修正值，在得到测量值之后就可得到真值。

注意：从误差与修正值的定义中可知，误差与修正值只差一个符号。

b. 相对误差

绝对误差的大小能够反映对同一被测量的测量效果的好与差，比如对一长度为 1m 左右的物体进行测量，绝对误差为 5cm 的就比为 10cm 的测量效果好；但对不同的被测量就很难确定了，比如测量长为 1m 的物体的绝对误差是 1cm，测量长为 1dm 的物体的绝对误差为 0.5cm，用绝对误差就不能确定了。为此，引入相对误差的概念。如果相对误差用 E 来表示，其定义式是

$$E = \frac{\Delta' N}{N} \times 100\% \tag{1-1-3}$$

式（1-1-3）中，$\Delta' N$ 和 N 分别为绝对误差和真值（一般用算术平均值，甚至测量值来代替）。由相对误差的大小就可比较两个测量效果的好与差了。比如上述例子中，第一个测量效果就比第二个测量效果好，尽管它的绝对误差比第二个测量的大。

3. 误差的来源

在任何测量中都存在着误差，因此，测量时必须对误差进行分析。为了很好地分析误差，了解误差来源是很有必要的。误差的主要来源有下述几个方面。

a. 仪器误差

由于仪器本身的不完善或调整、使用不当，提供的标准量欠准或随时间的不稳性等产生的误差。

如等臂天平不等臂；分光计读数标线与角度盘不同心；螺旋测微计零点不准；需调水平、垂直等未达到；不满足使用条件；电路中电池电压随放电时间延迟而降低，引起电路中电流的变化；激光波长的长期稳定性变化等。

b. 方法误差

由于实验方法和理论的不完善或测量所依据的公式的近似性而导致的误差。

如伏安法测电阻，不管是采用内接法还是外接法，由于电表内阻的影响带来的误差；在推导单摆的周期公式 $T=2\pi\,(l/g)^{1/2}$ 时，要求摆角趋于零，摆球的体积趋于零，实验时因做不到而带来的误差等。

c. 环境误差

由于各种环境因素，如温度、湿度、气压、振动、光照、电磁场等与要求的标准状态不一致及其在空间上的梯度随时间变化，引起测量仪器的量值变化、机构失灵、相互位置改变等产生的误差。

d. 人员误差

由于测量者生理上的最小分辨力、感觉器官的生理变化、反应速度和固有习惯引起的误差。如计时按表测量者滞后或超前的趋向；对准标志读数时始终偏左或偏右；用人眼判定光的强度来获取数据时，由于眼睛对光强分辨力不够带来的误差等。

4. 误差的分类

误差是各种各样的，它们各具特点，为了研究的方便必须对众多的误差进行分类。分类的方法不止一种，本书只采用按误差性质分类的方法，它可以分为“系统误差”和“偶

然误差”两大类。

a．系统误差

在同一条件下多次测量同一量时误差的绝对值和符号保持不变，或在改变条件时，按某一确定的规律变化的误差，称为系统误差。显然，它的特点是恒定性。

例如，用一只未调零（如指针指在 2mV）的电压表去测电压，不管测量多少次，每次测量由于未调零产生的误差（零差）都是 2mV ，这种误差就是系统误差；等臂天平不等臂造成的误差，分光计中由于度盘偏心引起角度测量的误差（此误差按正弦规律变化）等也都是系统误差。

系统误差按掌握的程度可分为“已定系统误差”和“未定系统误差”。前者是大小和符号都知道的系统误差；后者则是或大小、或符号、或大小与符号都不知道的系统误差。

不论哪一种系统误差，根据其特点可知，不可能通过多次测量来减小或消除。

b．偶然误差

在一定条件下对同一物理量进行多次测量，并极力消除或修正一切明显的系统误差之后，每次测量结果还会出现无规律的随机变化，其误差时大时小、时正时负，不可预测，但总体来说又服从一定统计规律的误差，称为偶然误差。它的特点是随机性，故有的又把偶然误差称为随机误差。

注意：*所有的偶然误差都是随机误差，但随机误差不全是偶然误差，它还包含部分系统误差。*

例如，在用物距像距法测凸透镜的焦距时需要测量像的位置，由于眼睛对像的清晰度的分辨本领不足而使每次读数不同产生的误差就是偶然误差。

根据偶然误差的特点可知，多次测量可以减小偶然误差。

c．系统误差与偶然误差的关系

上面在讨论系统误差和偶然误差时是分别进行的，即是在没有偶然误差的情况下研究系统误差，和在系统误差可以不考虑的情况下研究偶然误差。实际上对任何一次实验，既存在着系统误差，又存在着偶然误差，只有一种误差的实验是不存在的。当然这样的情况是存在的，那就是有的实验以系统误差为主（如准确度较低的实验），有的实验以偶然误差为主（如准确度较高的实验），而忽略另一种误差的存在。

系统误差具有恒定性的特点，而偶然误差的特点是随机性。就其特点而论，似乎这两类误差是可绝然分开的，实际上并非完全如此。举一个简单例子,试分析用刻度不均匀的米尺给测量带来的误差。对米尺上某一确定位置的刻度值与真值之间的误差，不管测量多少次都是不会改变的，显然这个误差是系统误差；但对米尺的各处来讲，每个确定位置的刻度值与真值之间误差的大小和方向都不确定，具有随机性，显然这是偶然误差。再如某实验人员在读数时总习惯偏向一方，产生的误差是系统误差；另一实验人员在读数时没有总偏向一边的习惯，有时偏左，有时偏右，产生的误差无疑是偶然误差。系统误差与偶然误差的这种关系正好反映出这种分类方式的缺陷，实验不确定度（见第二节）就可以克服这个缺陷。

由于系统误差和偶然误差性质不同，所以处理的方法也不同。比如多次测量可以减小偶然误差，而对系统误差就无能为力，它只有用其他方法进行减少或消除。

d. 在实验过程中，除系统误差和偶然误差外，还可能出现仪器损坏、操作不当造成的

错误或读数、记录的错误等。这些错误不宜称为误差（有的把它称为粗大误差），因为误差不全等于错误。当然实验中应当避免错误的发生，只要注意，错误是一定能避免的。

b. 误差的几个相关概念

a. 精密度

精密度是指重复测量所得结果相互接近（或离散）的程度，它的高低反映偶然误差的大小。即精密度越高，数据越接近。偶然误差就越小；反之偶然误差就越大。

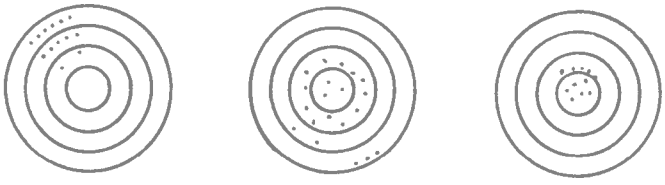
b. 正确度

正确度是指测量值或实验结果与真值的符合程度，它的高低反映系统误差的大小。即正确度越高，测量值越接近真值，系统误差就越小；反之，系统误差就越大。

c. 准确度

准确度（又称精确度）是精密度与正确度的综合反映。当偶然误差小到可以不计时，准确度等于正确度；当系统误差小到可忽略或得到修正消除时，准确度等于精密度。两者都高，准确度就高；两者之一低或两者都低，则准确度低。

它们之间的关系可以通过打靶形象地表示出来，如图 1-1-1 所示。



(*a*)精密度高　(*b*)正确度高　(*c*)准确度高

图 1-1-1　误差的几个相关概念示意图

另外，“精度”这个词还经常出现在各类实验书中，其实它是一个含义不确切的词，通常多指准确度。

二、直接测量偶然误差的估计

测量时误差不可避免，没有误差的测量是不存在的。误差的大小又直接关系到测量效果的好与差，因而进行误差计算的必要性就显而易见了。当然如果知道真值的话，我们可以根据式（1-1-1）来计算误差。例如三角形三内角和为 180°（理论值，即真值），测出三个内角的和是 181°31′（测量值），那么误差就是 1°31′。不过知道真值来进行误差计算的情况不多，对测量而言也没有多大实际意义。有实际意义的是通过测量得到真值，只不过由于误差的存在，通过测量得不到真值，因此就很难用式（1-1-1）来计算误差。实际上误差是通过其他方法进行“估计”的。由于偶然误差服从统计分布规律，一般可通过数理统计的方法进行估计。用数理统计的方法来进行误差估计时，方法又有多种，我们只介绍其中的一种——标准偏差的估计方法。

1. 偶然误差服从的统计分布规律

大多数偶然误差的变化是均匀的、微小的和随机的。可以证明，这种偶然误差服从的统计规律是高斯分布，又称正态分布，如图 1-1-2 所示（除高斯分布外，还有很多种分布，如

均匀分布等)。其中横坐标 ΔN 表示误差，纵坐标 $f(\Delta N)$ 表示在误差值为 ΔN 附近单位误差间隔内，误差值 ΔN 出现的概率。

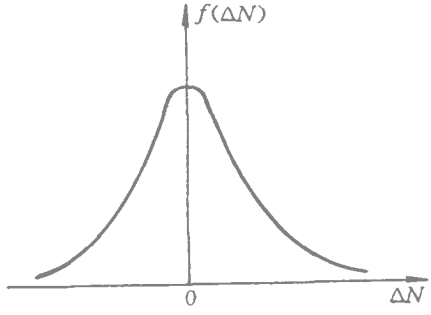


图 1-1-2 偶然误差的高斯分布

根据这个误差分布图，可以看出偶然误差（当然是指服从高斯分布的）具有下列三种特性：

(1) 单峰性：绝对值小的误差出现的概率大。

(2) 有界性：在测量条件一定的情况下，大误差出现的概率小，且不超过一定的界限。

(3) 对称性：绝对值相等的正负误差出现的概率相同。

2. 以算术平均值表示真值

在相同条件下对某物理量进行 n 次等精度重复测量，每次的测量值分别为 $N_1, N_2, \cdots N_n$，真值为 N，则任意一次测量的误差 $\Delta' N_i = N_i - N$。根据（服从高斯分布的）偶然误差的对称性，即当 $n \to \infty$ 时，绝对值相同的正负误差出现的概率相同，有

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta' N_i = 0 \tag{1-1-4}$$

即

$$(N_1 - N)(N_2 - N) + \cdots + (N_n - N) = \sum_{i=1}^{n} N_i - nN = 0$$

$$N = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} N_i = \overline{N} \tag{1-1-5}$$

由式（1-1-5）可知，在测量次数为无限次时，其算术平均值 $\overline{N}$ 就是真值 N。

实际上，测量次数不可能是无限的，相反，都是有限的，这时的算术平均值不是真值，但它是最接近真值的测量值，称为测量的“近真值”（或称最佳值）。其测量误差可用测量值与平均值之差来表示，可写为

$$\Delta N_i = N_i - \overline{N} \tag{1-1-6}$$

式（1-1-6）中，N_i 是多次测量中的任意一次测量值；ΔN_i 是任意一次测量值的绝对误差。

这种用算术平均值代替真值算出的误差，称为“偏差”。显然误差与偏差是有区别的，由于偏差与误差相差很小，偏差就当作误差了，但我们应当知道它们的区别。

3. 用标准偏差估计误差

我们已经知道，大多数偶然误差都服从高斯分布。从高斯分布出发，利用数理统计理论，可以得到估计偶然误差的公式。下面就给出用标准偏差估计偶然误差的公式。

当测量次数 n 为有限时，多次测量中任意一次测量值的标准偏差 S 为

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (N_i - \overline{N})^2}{n-1}} \tag{1-1-7}$$

算术平均值对真值的偏差 S_N 是一次测量值标准偏差 S 的 $\sqrt{n}$ 分之一，即

$$S_{\overline{N}}=\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i-\overline{N})^2}{n(n-1)}} \tag{1-1-8}$$

这里说明一点，任意一次测量值的标准偏差 S 与平均值的标准偏差 $S_{\overline{N}}$仅差一个$\sqrt{n}$，但其意义是不同的。S 是表示多次测量中每次测量值的“分散”程度的，S小表示每次测量值很接近，反之则比较分散，它随测量次数 n 的增加变化很慢；$S_{\overline{N}}$表示平均值偏离真值的多少，小则更接近真值，大则远离真值，它的大小随测量次数 n 的增加变化很快，这也是增加测量次数可以减小偶然误差的一个体现。

4. 置信概率（置信度）

如果只存在偶然误差而无系统误差（或系统误差已消除），在得到测量值的平均值 $\overline{N}$ 和平均值的标准偏差 $S_{\overline{N}}$后，是否就可以得到真值 N 等于（$N+S_{\overline{N}}$）或（$N-S_{\overline{N}}$）的结论呢？结果当然是否定的。因为 $S_{\overline{N}}$不是一个准确的误差值，而是一个估计值。那 N、$\overline{N}$ 和 $S_{\overline{N}}$如何联系起来呢？可以证明，它们是通过概率联系起来的，即真值 N 以一定的概率出现在（$\overline{N}-S_{\overline{N}}$）～（$\overline{N}+S_{\overline{N}}$）所组成的范围之内。这个概率经数理统计理论算出，服从高斯分布的是 68.3%（服从均匀分布的是58%）。这个概率称为“置信概率”或“置信度”。还可证明，如果取值为 $2S_{\overline{N}}$或 $3S_{\overline{N}}$，则真值出现在（$\overline{N}-2S_{\overline{N}}$）～（$\overline{N}+2S_{\overline{N}}$）或（$\overline{N}-3S_{\overline{N}}$）～（$\overline{N}+3S_{\overline{N}}$）范围中的概率分别是 95.4%和 99.7%。通常把 $S_{\overline{N}}$、$2S_{\overline{N}}$、$3S_{\overline{N}}$ 称为“置信限”，显然置信限越大，真值出现在这个范围内的概率越大。当然也不能太大，太大将会使测量变得无意义。

5. 坏值的剔除

实验中对一个物理量进行多次测量，由于某种原因，有时会混入少量的“坏值”，这些坏值与正常的测量数据相差很大，必须剔除，否则会影响测量的准确度。但坏值的判断与剔除不能靠主观臆断来进行，必须有客观可靠的依据，用数理统计的方法可以找出这些依据。下面就介绍一种剔除坏值的依据——拉依达准则。

置信概率不仅可以把 N、$\overline{N}$ 或 $S_{\overline{N}}$联系起来，还可以把测量值 N_i、平均值 $\overline{N}$ 和任意一次测量值的标准偏差 S 联系起来。如果置信限取 $1S$，那么多次测量中任意一次测量值 N_i落在（$\overline{N}-S$）～（$\overline{N}+S$）范围内的概率就是 68.3%；如果置信限取 $2S$、$3S$，则在对应范围内 N_i 出现的概率就是 95.4%和 99.7%。根据这种关系，当置信限取 $3S$ 时，就表示多次测量中任意一次测量值不在（$\overline{N}-3S$）～（$\overline{N}+3S$）范围内的可能性只有 0.3%。也就是说，某一次测量值的误差（$N_i-\overline{N}$）$\geqslant 3S$ 的可能性很小，几乎为零，如果出现就意味着这个测量值是“坏值”，应当剔除。用 $3S$ 作为判据进行坏值剔除的方法称为拉依达准则。其中 $3S$ 称为极限误差 $\Delta\lim$，可表示为

$$\Delta\lim=3S \tag{1-1-9}$$

在这里提醒一下读者，拉依达准则是建立在测量次数 $n\to\infty$的前提下的，当测量次数较少时，$3S$判据并不可靠，特别是 $n\leqslant 10$ 时更是如此。

例　对某一长度 L 测量 10次，其数据如下：10.35，10.38，10.30，10.32，10.35，10.33，10.37，10.31，10.34，20.33（单位为 cm），试用拉依达准则剔除坏值。

需要全本请访问 www.ertongbook.com

解

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(L_i-\bar{L})^2}{10-1}}=3.16(\mathrm{cm})$$

$$3S=3.16\times 3=9.48(\mathrm{cm})$$

第 10 次测量值的偏差是

$$\Delta L_i=L_i-\bar{L}=20.33-11.34=8.99(\mathrm{cm})<3S=9.48$$

故 20.33cm 这个显然是坏值的数据，但用拉依达准则来判断，它就不是坏值，不能剔除。如果再增加一个数据 10.37cm，即 11 个数据，用拉依达准则判断，20.33cm 就是坏值了，读者可以自己算一算。因此，在测量次 $n\leqslant 10$ 时，用拉依达法则剔除坏值时，只要它的误差接近极限误差 $3S$ 就可视为坏值进行剔除。

如果测量数据中有坏值，计算平均值和标准偏差时，必须把坏值剔除后再进行计算。

三、系统误差的处理

在实验中，当系统误差是影响实验结果的主要因素时，如果未被发现，将给实验结果带来严重影响。但它与偶然误差有所不同，它既不能通过多次测量来发现、减小和消除，也不能通过概率统计的方法进行估算。系统误差只能针对每一具体情况采取不同的处理方法。因此，处理是否得当，就在很大程度上取决于观察者的经验、知识和技巧。平时讲误差分析，主要是针对系统误差而言。由于有规则的系统误差处理起来比无规则的偶然误差要复杂得多，所以本书只作一般介绍。

1. 如何发现系统误差

(1) 理论分析法

a. 分析实验理论公式所要求的条件在测量过程中是否得到满足。比如单摆实验中，只要达不到摆角 $\theta\to 0$，摆球质量 $m\to 0$ 的要求，就会产生系统误差。

b. 分析仪器要求的使用条件是否得到满足。如在使用 UJ31 型电势差计时，若环境温度不是 20℃就会产生系统误差。

(2) 对比测量法

a. 实验方法的对比。用不同的实验方法测量同一个被测量，如果测得的结果在偶然误差允许范围内不重合，则说明其中至少有一种方法存在系统误差。如用单摆与自由落体两种方法测某地的重力加速度，实验结果分别是 $9.800\mathrm{m\cdot s^{-2}}$（偶然误差是 $0.001\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）和 $9.77\mathrm{m\cdot s^{-2}}$（偶然误差是 $0.01\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）。显然，其中至少有一种实验方法存在系统误差。因为两种方法测出的重力加速度在十分位都无偶然误差而数值又不同，必然是系统误差所致。

b. 测量方法的对比。同一物理量，用同一种实验方法，只改变测量方法也可以发现系统误差。如在用拉伸法测杨氏模量实验中，可用增加砝码过程中与减少砝码过程中的读数变化来发现摩擦等带来的系统误差。

c. 仪器的对比。一个量用不同的仪器同时或分别地进行测量可发现仪器的系统误差。如将两只电流表接入同一串联电路，若读数不一致，说明至少有一只存在系统误差。如果有一只是标准表，就可消除另一只表的系统误差。

d. 改变实验参数进行对比。如改变电路中的电流数值，而测量结果有单调变化或规律性变化，说明存在某种系统误差。

(3) 数据分析法

当偶然误差很小时，将测量值的偏差

$$\Delta N_i = N_i - N$$

按测量的先后次序排列，观测 ΔN_i 的变化。如果 ΔN_i 呈现规律性变化，如线性增大或减小，稳定的周期性变化，则必有系统误差存在。

2. 如何消除系统误差

(1) 找出产生系统误差的根源进行消除（减小）

如采用更符合实际的理论公式；尽量满足推导实验公式时的近似条件、仪器装置和测量的实验条件；严格控制实验的环境条件等。

(2) 算出修正值对测量值进行修正

对已定系统误差，只要算出修正值，再根据式（1-1-2），就可得

$$\text{真值} = \text{测量值} + \text{修正值}$$

从而达到消除系统误差的目的。

(3) 选择适当的测量方法抵消系统误差

对未定系统误差可以通过适当的方法进行抵消，下面介绍常用的几种方法。

a. 代替法：又称置换法，它是在一定的测量条件下，用一已知的标准量（通常是可调的）去代替被测量来消除系统误差的方法。比如用电桥测电阻，先把被测电阻接入电桥之中调平衡，然后不改变电桥的任何条件用一可调的标准电阻代替被测电阻，改变标准电阻的阻值再调平衡，此时的标准电阻值就是被测电阻的阻值，它的系统误差与电桥无关，只与标准电阻的误差有关，从而达到消除电桥带给被测电阻的系统误差。代替法的一个缺陷是，它会把标准量的误差带给被测量，因此使用此法时，要求标准量的准确度要很高。

b. 交换法：即交换测量中的某些条件，使产生误差的因素以相反的方向影响测量结果而抵消系统误差的方法。如用天平称物时，交换砝码与被称物左右的位置，可消除由于天平不等臂造成的系统误差；自组惠斯登电桥实验中，交换被测电阻与标准电阻的位置可消除标准电阻和接触电阻带来的系统误差。

c. 异号法：即改变测量中的某些条件进行两次测量，两次测量的系统误差符号相反，以两次测量结果的平均值当作测量值以减小或抵消系统误差的方法。如在用拉伸法测杨氏模量实验中，加砝码与减砝码（在同一拉力情况下）各记一次数，取平均值可消除摩擦等产生的系统误差；用霍耳效应测磁场时，可改变电流或磁场方向来消除副效应产生的附加电势差带来的系统误差等。

d. 半周期偶次观测法：上述方法都是针对系统误差是不变的情况，如果系统误差按一定规律变化，是不适用的。对按周期变化的系统误差，可采用在半个周期进行偶次观察测量的方法消除。如分光计就是采用在 180° 范围内两个窗口读数来消除由于分光计“偏心”造成的周期性系统误差的。

第二节　实验不确定度

对一个有价值的测量结果必须进行评价，无质量评价的测量结果是毫无意义的。这样，如何评价测量质量就是我们所关心的事了。

乍看起来，似乎用误差来评价测量质量是最合适的。因为根据误差的意义，误差是测量值与真值之差。显然误差大的测量质量就差；反之测量质量就好。确实，过去乃至于现在基本上都是用误差来评定测量质量的。不过，有一个事实不要忘记，那就是由于真值通常无法得知而使误差无法计算的事实。如果用这个通常无法知道的量去评价测量质量，显然有些不太合适。因此，国际上现在越来越多的地区已不用误差来评价测量质量，而是用另一个物理概念——不确定度（σ）来对测量结果进行质量评价，也对误差进行评价。我国 1990 年 5 月经审查通过，并作为国家标准颁布实施的《测量误差及数据处理技术规范》中，也明确规定测量结果的评定用不确定度而不再用误差。

一、不确定度的概念

实验不确定度，又称测量结果不确定度，简称不确定度。其含义是，由于误差的存在而被测量值不能确定的程度。它是被测量真值在某一范围内的一个评定。

“不能确定的程度”是通过“量值范围”和“置信概率”来表达的。如果不确定度为 σ，根据它的含义，则表示误差将以一定的概念被包含在量值范围（$-\sigma\sim+\sigma$）之中，或者表示测量值的真值以一定的概率落在量值范围（$\overline{N}-\sigma$）～（$\overline{N}+\sigma$）之中。显然，不确定度的大小反映了测量结果与真值之间的靠近程度。不确定度愈小，测量结果与真值愈靠近，其可靠程度愈高，即测量的质量愈高，其使用价值就愈高。由此可见，用不确定度来评价测量结果的质量比误差评价更合适。

二、不确定度的分类

由于误差来源不同，一个直接测量量的不确定度会有很多分量，按获得的方法可把这些分量分为 A 类不确定度和 B 类不确定度。

1. A 类不确定度

凡是可以通过统计方法来计算不确定度的称为 A 类不确定度。由于这一特点，故又称为统计不确定度，用字母 S 表示。

注意：*使用的字母 S 与标准偏差一样。*

对某一物理量进行多次测量，由于误差来源不同，可能有若干个 A 类不确定度 S_1，S_2，…，S_m，把它们称为 A 类不确定度分量。如果这些分量之间彼此独立，那么分量的“方和根”就是 A 类不确定度 S，即

$$S=\sqrt{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_m^2} \tag{1-2-1}$$

在教学实验中，只存在一个分量 S_1，自然 S_1 这个分量就是 A 类不确定度 S。

2. B 类不确定度

凡是不能用统计方法计算而只能用其他方法估算的不确定度称为 B 类不确定度，又称为非统计不确定度，用字母 u 表示。

与 A 类不确定度类似，由于误差源不同，一个测量可能存在多个 B 类不确定度 u_1、u_2、…，u_n，把它们称为 B 类不确定度分量。如果这些分量相互独立，则有

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \tag{1-2-2}$$

如果只有一个分量 u_1，那么 B 类不确定度 u 就等于分量 u_1。

在用 A、B 两类不确定度来评定测量结果和误差时，无需再把误差分为偶然误差与系统误差。当然这并不意味着 A、B 两类不确定度与偶然误差和系统误差有着完全对应关系。实际上偶然误差全部可用 A 类不确定度来评定，但用 A 类不确定度评定的不都是偶然误差，系统误差中具有随机性质的都可用 A 类不确定度来评定；系统误差也不能都用 B 类不确定度来评定，因为在用不确定度进行误差评定时，是要把已定系统误差修正后再进行的，即按 A、B 类划分不确定度时，是不包括已定系统误差的。

判别 A、B 两类不确定度比判别偶然误差和系统误差容易得多。这种分类弥补了把误差分为偶然误差和系统误差的不足。

三、直接测量不确定度的计算

1. A 类不确定度的计算

对一直接测量量进行多次测量就存在 A 类不确定度，其计算方法与偶然误差用标准偏差来计算的方法完全相同，即测量值 N_i 的不确定度为

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(N_i - \overline{N})^2}{n-1}} \tag{1-2-3}$$

平均值 $\overline{N}$ 的不确定度为

$$S_{\overline{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{1}(N_i - \overline{N})^2}{n(n-1)}} \tag{1-2-4}$$

式中，n 为测量次数。这种计算的方法又称为贝塞尔法。

2. B 类不确定度的估计

（1）用近似标准差（u_j）估计

对于 B 类不确定度，不能采用统计不确定度计算的方法进行计算，必须采用其他方法。一般采用近似标准差（u_j）的估计方法。用这种方法时，首先要估计一个“误差极限值”（Δ），然后确定误差的分布规律（如高斯分布、均匀分布等），利用关系式

$$\Delta = Cu_j \tag{1-2-5}$$

就可算出近似标准差 u_j，其中 C 为置信系数，其值决定于误差分布规律。如对高斯分布，$C=3$，即 $u_j=\Delta/3$ 对均匀分布 $C=\sqrt{3}$，即 $u_j=\Delta/\sqrt{3}$。还有很多分布，这里就不介绍了。为了简便，在以后的计算中，我们不考虑它是什么误差分布，置信系数 C 都取为 $\sqrt{3}$。

（2）用仪器误差（$\Delta_{仪}$）估计误差极限值 Δ

由仪器产生的不确定度，一般用仪器误差 $\Delta_{仪}$ 来估计误差极限值 Δ，即 $\Delta=\Delta_{仪}$。

所谓仪器误差，就是在规定使用条件下正确使用仪器时，仪器的示值与被测量的真值之间可能产生的最大误差。通常仪器出厂时要在检定书或仪器上注明仪器误差，不过注明的方式不尽相同，大体有两种情况：

一是在仪器上直接标出或用准确度表示仪器的仪器误差。如标出准确度为 0.05mm 的游标卡尺，其仪器误差就是 0.05mm。

另一是给出该仪器的准确度级别，然后算出仪器误差。如电表，它的准确度级别是这样规定的

$$\frac{\text{电表的最大误差}(\Delta_{仪})}{\text{电表的量程}}=\text{级别}\ \% \tag{1-2-6}$$

如果电表的量程是 100mA，经检定的最大误差（$\Delta_{仪}$）是 1mA，代入式（1-2-6）中，有

$$\frac{1}{100}=\text{级别}\ \%=1\%$$

就把这只表定为 1 级表。这是出厂时定好的，并标在电表的表盘上。我们在使用此表时，从表盘上读出级别和量程，最大误差 $\Delta_{仪}$ 轻而易举地就能算出，即

$$\Delta_{仪}=\text{量程}\times\text{级别}\ \%$$

如果未注明仪器误差或不清楚时，我们作这样的规定：对能连续读数（能对最小分度下一位进行估计）的仪器，取最小分度的一半作为仪器误差，如米尺、螺旋测微计、移测显微镜等；对于不能连续读数的仪器就以最小分度作为仪器误差，如天平、数字式仪表等。

（3）根据实际情况估计误差极限值

对某一物理量进行测量时，由于误差来源不同，相应的不确定度就不止一个。比如在拉伸法测杨氏模量实验中，用卷（米）尺测金属丝原长时，除卷尺的仪器误差（相应的不确定度 $u_1=\Delta_{仪}/\sqrt{3}$）外，还有测量时因卷尺不能准确地对准金属丝两端产生的误差，其相应的 B 类不确定度（u_2）中的误差极限值 Δ 就是通过实际情况估计的。

一般根据实际情况估计误差极限值的 B 类不确定度都比与仪器误差相应的不确定度大很多，在计算时可以不考虑后者。

3. 合成不确定度

若测量结果含统计不确定度分量与非统计不确定度分量

$$S_1,S_2,\cdots,S_i,\cdots,S_m$$

$$u_1,u_2,\cdots,u_j,\cdots,u_n$$

且它们之间相互独立时，则合成不确定度（σ）的表征为

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}S_i^2+\sum_{i=1}^{n}u_j^2} \tag{1-2-7}$$

式中，m 和 n 分别表示 A、B 两类不确定度分量的个数。如果 $m=n=1$ 时，则

$$\sigma=\sqrt{S_1^2+u_1^2}=\sqrt{S^2+u^2} \tag{1-2-8}$$

对任何一个直接测量原则上都必须算出它的统计不确定度 S 和估计出非统计不确定度 u 后，按“方和根”的方式合成为合成不确定度 σ；只有测量是单次测量时，由于不存在

统计不确定度 S，合成不确定度 σ 不需要“合成”，直接等于非统计不确定度 u。没有统计不确定度的直接测量（单次测量）是存在的，但没有非统计不确定度的测量是不存在的。

例 1　用 50 分度游标卡尺测一圆环的宽度，其数据如下：$m=15.272,15.276,15.268,15.274,15.270,15.274,15.268,15.274,15.272$（单位为 cm），求合成不确定度 σ.

解　在计算合成不确定度 σ 前要先计算不确定度分量。

由于是多次测量，存在统计不确定度，用贝塞尔公式计算，有

$$S_{\bar{m}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10}(m_i-\bar{m})^2}{n(n-1)}}=0.003(\mathrm{cm})$$

它的非统计不确定度用近似标准差进行计算，取仪器误差（$\Delta_{仪}=0.002\mathrm{cm}$)为估计的误差极限值，则

$$u=\frac{\Delta}{\sqrt{3}}=\frac{\Delta_{仪}}{\sqrt{3}}=\frac{0.002}{\sqrt{3}}=0.001(\mathrm{cm})$$

合成不确定度为

$$\sigma=\sqrt{S_{\bar{m}}^2+u^2}=\sqrt{(0.003)^2+(0.001)^2}=0.003(\mathrm{cm})$$

四、间接测量的不确定度计算——不确定度的传播公式

间接测量是通过直接测量进行的，每个直接测量量的误差必然会带给间接测量量。评定误差的每个直接测量量的合成不确定度 σ_i，当然就会对间接测量量的合成不确定度 σ 产生影响，那么是如何影响的呢？这就是我们要研究的不确定度的传播规律。不确定度传播规律的数学基础是全微分，我们先复习一下多元函数的全微分公式，然后再介绍不确定度的传播规律。

1. 多元函数的全微分

设待测物理量 N 与各直接测量量 $x,y,z,\cdots$ 有下列函数关系

$$N=f(x,y,z,\cdots) \tag{1-2-9}$$

对式（1-2-9）全微分后有

$$\mathrm{d}N=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{1-2-10}$$

如果先对式（1-2-9）取对数后再进行全微分，则有

$$\ln N=\ln f(x,y,z,\cdots)$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\frac{\partial \ln f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial \ln f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial \ln f}{\partial z}\mathrm{d}z+\cdots \tag{1-2-11}$$

上面微分式中，$\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，…是自变量的微小变化量（增量），$\mathrm{d}N$ 是由于自变量微小变化引起函数的微小变化量（函数增量）。

2. 不确定度的传播公式

不确定度都是微小量，与微分式中的增量相当。只要把微分式中的增量符号 $\mathrm{d}N,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z,\cdots$，换成不确定度的符号 $\sigma,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\cdots$，再采用某种合成方式合成后就可以得不确定度的传播公式了。

需要全本请访问 www.ertongbook.com