

物理光学学习指导

韩 军 段存丽 编著

西北工业大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

物理光学学习指导/ 韩军, 段存丽编著. —西安: 西北工业大学出版社, 2005 .8

ISBN 7 - 5612 - 1997 - 0

I. 物… II. ①韩…②段… III. 物理光学-高等学校-教学参考资料 IV. O436

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 099382 号

出版发行: 西北工业大学出版社

通信地址: 西安市友谊西路 127 号 邮编: 710072

电 话: 029 - 88493844

网 址: www.nwpup.com

印 刷 者: 陕西向阳印务有限责任公司

开 本: 787 mm×960 mm 1/16

印 张: 14.625

字 数: 319 千字

版 次: 2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

定 价: 20.00 元

前 言

物理光学是测控技术与仪器、光信息科学与技术、光电信息工程、光学等专业的核心专业基础课，是光学、光学工程及其相关专业硕士研究生入学考试的必考课程之一，它在一定程度上决定着学生对后续课程的学习效果，在培养基础扎实且有创新能力的高素质专业人才的过程中具有重要的作用和深远的意义。

在物理光学中，认为光是一种电磁波。在光的电磁场理论基础上，研究光在介质中的传播规律，如光的干涉、光的衍射、光的偏振等物理现象，进而研究这些规律和现象的应用。它是一门经典理论与近代技术相结合的应用性很强的课程。

对于初学者而言，学习物理光学这门课时常会感到：一是知识要点难以系统掌握，二是分析应用能力难以从心，特别是解题困难。本书以紧密围绕基本要求，准确理解物理概念，系统把握知识脉络，熟练掌握思想方法，努力培养创新能力为主要编写原则，旨在帮助读者掌握恰当的学习方法，高效、系统而全面地掌握物理光学知识，逐步培养运用物理思想分析问题和解决问题的综合能力，达到培养创新意识和科学素质的目标。

体现于本书的教学思想是从 1980 年以来西安工业学院所有讲授物理光学的教师和学习本课程的学生在教学实践中不断探索、验证和完善的结果。

本书在编写过程中，力求体系直观、脉络清晰，旨在帮助读者对每一章节的基本内容及知识脉络有一个纲领性认识，从诸多内容中找出关联，建立系统而直观的知识框架，从而使所学知识系统化，便于理解、掌握和记忆。

为了解决学生普遍存在的分析应用能力难以从心，特别是解题困难的问题，本书选编了大量的典型例题，着眼基础，意在引导，内容覆盖物理光学课程各教学要点。选题以符合要求、难度适中、重点突出为原则，同时注重内容、题型、解法三方面的典型性和综合性。解题突出启发性和灵活性，旨在引导读者掌握正确的解题方法和技巧。

各章都配有一定数量的习题与思考题，题目力图精少，但各练习目标明确，目的在于巩

固读者的观察、分析和应用技能，并引导其灵活延展，使读者既加深理解物理概念及思想方法，又能有针对性地体会科学研究的一般规律，提高用所学知识分析问题和解决问题的能力。

在本书的最后，附有 3 套自测试题及参考答案，供读者自测之用。

本书可与浙江大学梁铨庭编写的《物理光学》(修订版)，石顺祥等编写的《物理光学与应用光学》，郁道银等编写的《工程光学》，谢敬辉等编写的《物理光学教程》等教材配套使用。

本书在编写过程中，参阅了大量国内外文献，在此，向这些文献的作者表示谢意。刘木兴教授在百忙之中仔细地审阅了全稿，提出了许多中肯的修改意见，并提供了宝贵的资料；齐文浦教授、朱昌教授、徐昌杰为本书的编写提供了指导性建议；路绍军、祁瑞利、胡小英、张维光等为本书的样稿打印、制图、校对做了大量的工作，付出了辛勤的劳动，在此谨致以衷心的感谢。

本书的第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 4 章和第 6 章由韩军执笔，第 5 章和第 7 章由段存丽执笔，全书由韩军负责统稿。

本书在编写和出版过程中，得到了西安工业学院教务处、光电工程学院和西北工业大学出版社的大力支持，在此谨致以衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中错误和缺点在所难免，恳请读者批评指正，以便改进提高。

编著者

2005 年 7 月

目 录

第 1 章 波动及其描述	1
1.1 波动及其基本特征	1
1.2 定态光波的概念	2
1.3 波动的微分波动方程描述	3
1.4 正弦波	6
1.5 相位和相速度	8
1.6 复数表示	9
1.7 三维波	10
1.8 标量波与矢量波	13
1.9 波阵面	14
习题与思考题	14
第 2 章 光的电磁理论	16
2.1 麦克斯韦方程组和电磁波	16
2.2 电磁波的传播	22
2.3 光在二介质界面上的反射和折射	27
2.4 全反射与倏逝波	35
2.5 光在金属中的传播简述	39
习题与思考题	40
第 3 章 光波的叠加与分析	42
3.1 两个同频率同振动方向的光波的叠加	42
3.2 两个频率相同、振动方向互相垂直的光波的叠加	48
3.3 两个不同频率的单色光波的叠加	53
3.4 复杂光波的分析	57
第 4 章 光的干涉和干涉仪	64
4.1 相干光源与相干条件	65
4.2 双光束干涉的基本理论	66
4.3 利用波阵面分割法的干涉装置	72
4.4 干涉条纹的可见度	77
4.5 平行平板由振幅分割法产生的干涉条纹	82
4.6 楔形薄板由振幅分割法产生的干涉条纹	87
4.7 常用干涉仪	92

4.8	平行平板产生的多光束干涉	98
4.9	光字薄膜	103
	习题与思考题	109
第5章	光的衍射	112
5.1	光的衍射现象与衍射理论概述	112
5.2	惠更斯-菲涅尔原理	114
5.3	基尔霍夫标量衍射理论及其近似	115
5.4	矩孔和单缝的夫琅和费衍射	117
5.5	双缝夫琅和费衍射	122
5.6	多缝衍射光栅	126
5.7	其他衍射光栅	132
5.8	夫琅和费圆孔衍射	138
5.9	光学仪器的分辨本领	144
5.10	菲涅耳圆孔衍射	147
	习题与思考题	154
第6章	傅里叶光学	156
6.1	单色光波的复振幅分布与空间频率	156
6.2	单色光波场中复杂的复振幅分布	158
6.3	衍射现象的傅里叶分析方法	160
6.4	透镜的傅里叶变换性质及成像性质	164
6.5	相干传递函数和光学传递函数	166
6.6	相干光学信息处理	173
	习题与思考题	179
第7章	光的偏振与晶体光学基础	182
7.1	引言——光的偏振性的发现	182
7.2	自然光、部分偏振光和线偏振光	184
7.3	晶体的双折射和二向色性	189
7.4	椭圆偏振光和圆偏振光	196
7.5	偏振光和偏振器件的矩阵表示	200
7.6	偏振光的干涉	206
	习题与思考题	210
附录	自测试题及参考答案	213
	参考文献	228

第 1 章 波动及其描述

几何光学和波动光学是经典光学的两个组成部分。几何光学从光的直线传播、反射、折射等基本实验定律出发,讨论成像等特殊类型的光的传播问题,它在方法上是几何的,在物理上不必涉及光的本性。但是,要真正理解光,理解光场中可能发生的一切绚丽多彩的景象,必须研究光的波动性。此外,也只有从光的波动理论才能看出几何光学理论的限制。

波动是自然界中相当普遍的一类运动形式,在力、热、电、光各个领域中都无处不有。尽管各种波动的具体形态各异,其间却存在着非常明显的共性。无论在基本概念、基本原理方面,还是在所用的数学语言和计算方法方面,它们都具有惊人的相似性,甚至可以说几乎完全一样。然而,光波是特定波段内的电磁波,其波长按宏观尺度来看非常小,以及发射源是微观客体,这使它带有一些自己的特点。光波的特点集中地反映在研究和应用它的实验装置和仪器上。这些仪器装置的设计往往需要针对光波的特点作种种十分细腻,甚至令人感到“琐碎”的考虑。鉴于以上情况,我们把波动光学或者更广泛些,一般波动理论中带普遍意义的基本原理和计算方法集中起来,在本章中优先加以介绍。有关波动光学的各种仪器装置和重要应用中的细节问题留给后面几章去讨论。

1.1 波动及其基本特征

内容精讲

振动在空间的传播形成波动。波场中每点的物理状态随时间作周期性的变化,而在每一瞬时波场中各点物理状态的空间分布也呈现一定的周期性,因此,我们说波动具有时空双重周期性。此外,伴随着波动,总有能量的传输。具有时空双重周期性的运动形式和能量的传输,是一切波动的基本特性,不具备这种特性的事物,不能称为严格意义上的波动。

波场中物理状态的扰动可用标量场描述的,称为标量波;需用矢量场描述的,称为矢量波。例如,密度波、温度波等是标量波,电磁波(包括光波)是典型的矢量波(此外,还有更复杂的波动形式——张量波,如固体中的弹性波、引力波等)。

矢量波可以有一个纵方向(与传播方向平行)的自由度和两个横方向(与传播方向垂直)的自

由度。自由空间的电磁波(光波)是横波,它有两个自由度,它们对应着两个独立的偏振状态。

波场的几何描述使用波面和波线的概念。波面,也叫做等相面,它是扰动的位相相等的各点的轨迹。一般说来,波面是三维空间里的曲面族。能量传播的路径叫做波线,在各向同性媒质中波线是与波面处处正交的空间曲线族。在各向异性媒质中情况比较复杂,波线与波面一般不正交,详细情况留待第七章讨论。

波面为球面的波,叫做球面波。波面为平面的波,叫做平面波。球面波就是几何光学中所说的同心光束,平面波是平行光束,它也可看成是中心位于无穷远的同心光束。在多种形状波面的波动中,球面波和平面波占有特殊的地位。这一方面是因为它们比较简单,从而也被研究得比较透彻;另一方面是因为任何形状的波面可看做是点源的集合。点光源之于光学,正像质点之于力学、点电荷之于电学一样,是建筑整个理论体系的基石。光束经过光学系统改造后形成的波场,一般是比较复杂的。现代光学的思想实际就是要在复杂的波场中分离出简单的成分——球面波或平面波。基于上述种种理由,球面波和平面波将是今后我们讨论的重点。我们要从各个角度去仔细研究它们,如研究它们的描述、识别和相互转化等问题。

1.2 定态光波的概念

内容精讲

具有如下性质的波场叫做定态波场:

- (1)空间各点的扰动是同频率的简谐振荡(频率与振源相同);
- (2)波场中各点扰动的振幅不随时间变化,在空间形成一个稳定的振幅分布。

严格的定态光波要求波列无限长。但任何实际光源的发光过程总是有限的,特别是从微观角度看,发光过程是断断续续的。以后我们会看到,有限波列不可能是严格单色的。不过当波列的持续时间比扰动的周期长得多时,除了考虑某些特殊问题(如时间相干性)外,我们可把它当做无限长单色波列处理,这样的波在空间传播时形成定态波场。今后,如果没有特别需要,我们一律以定态光波为讨论对象。

普遍的定态标量波的表达式为

$$U(P, t) = A(P) \cos[\omega t - \phi(P)] \quad (1-1)$$

式中, P 代表场点,函数 $A(P)$ 反映振幅的空间分布, $\phi(P)$ 反映位相的空间分布,二者都与时间 t 无关。波函数 $U(P, t)$ 中惟一与 t 有关的是位相因子中独立的一项 ωt (ω 为圆频率),这项又是与场点坐标无关的。

定态光波的波面也可以有各式各样的形状,我们将重点讨论定态平面波和球面波。

平面波波函数的特点是:振幅 $A(P)$ 是常数,它与场点坐标无关;位相 $\phi(P)$ 是直角坐标的线性函数,即

$$\phi(P) = k \cdot r + \varepsilon = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 + \varepsilon$$

(1-2)

式中, 矢量 $k = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0$ 是波矢, 其 k 的大小与波长 λ 的关系为 $k = 2\pi/\lambda$, 它的方向代表波的传播方向。 $r = x x_0 + y y_0 + z z_0$ 是场点 P 的位置矢量, 这里 x_0, y_0, z_0 是沿直角坐标轴的三个单位基矢。 ε 是坐标原点 O 处的初位相。

球面波波函数的特点是: 振幅 $A(P) = d/r$, 与场点到振源的距离 r 成反比, 这是能量守恒的要求; 位相分布的形式为

$$\Phi(P) = k \cdot r + \varepsilon \quad (1-3)$$

ε 是振源的初位相。不难看出, 波面方程 $\Phi(P) = \text{常数}$, 确实代表以振源为中心的一个球面。

光波是一种电磁波, 它是矢量横波, 定态电磁波需用两个矢量场来描述, 即

$$E(P, t) = E_0(P) \cos[\omega t - \Phi(P)], \quad H(P, t) = H_0(P) \cos[\omega t - \Phi(P)] \quad (1-4)$$

式中, E 和 H 分别是电场强度和磁场强度矢量, $E_0(P)$ 和 $H_0(P)$ 分别是它们的振幅分布。在一定的条件下, 往往只需考虑光波中振动矢量的某一分量, 这时矢量波可作标量波处理。大体说来, 在各向同性媒质中满足傍轴条件时, 用标量理论处理光的干涉、衍射问题得到的结果基本正确。

1.3 波动的微分波动方程描述

一、内容精讲

一列沿着弦运动的简单波具有很多与光波相同的性质。弦的位移垂直于扰动运动的方向, 即波沿弦传播, 而弦本身的每个元段只不过是在往复地运动。这种波称为横波。光恰好是这样一种横波, 其电场和磁场均在垂直于传播方向的方向上变化。

微分波动方程是所有波动共同遵循的基本方程, 其形式为

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1-5)$$

微分波动方程描述上述这样的现象(当只有一个空间变量时)。量 $\psi(x, t)$ 称为波函数, 它表示空间(x)和时间(t)的扰动, 它可以是弦的位移或场强的大小。式中 v 是波的传播速率。

微分波动方程某一解的形式为

$$\psi(x, t) = f(x - vt) \quad (1-6)$$

式中, f 为一个以 $(x - vt)$ 为变量的任意二次可微函数。换句话说, 可以把 $(x - vt)$ 平方、立方或取所需要的形式, 但是它必须作为一个单元出现。扰动的形状(它的波形)可以用“拍照”给定时刻的波函数来获得。在数学上这相当于令 t 为一常数。例如, 在 $t=0$ 时, $\psi(x, 0) = f(x)$ 是波形。因此, 若 $f(x)$ 是弦上隆起的形状, 那么 $f(x - vt)$ 描述了沿正 x 方向以速率 v 运动的隆起。用同样方法, $g(x + vt)$ 是对应于沿负 x 方向传播的任一波形为 $g(x)$ 的波动方程的解。

二、典型例题

【例 1.1】 试证明 $f(x - vt)$ 是一个沿 x 正方向运动的具有不变波形的行波。

【解】 建立一个坐标系 S' , 此坐标系和扰动一起以速率 v 向右运动, 如图 1-1 所示。当 $t=0$ 时两坐标系 S 和 S' 重合, 因而 $x' = x - vt$ 。在 S' 中波函数是与时间无关的。因此, 在 S 中波形是不变的且波函数由下式给定:

$$\psi(x, t) = f(x') = f(x - vt)$$

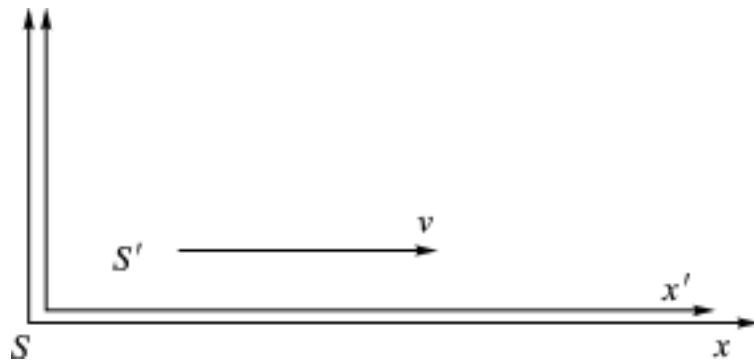


图 1-1

【例 1.2】 试证明 $\psi(x, t) = f(x \pm vt)$ 是一维微分波动方程的解。

【解】 式中 f 是 x' 的函数, 而 $x' \equiv x \pm vt$ 又是 x 和 t 的函数。因此, 使用链式法则, 有

$$\frac{\psi}{x} = \frac{f}{x'} \frac{x'}{x} = \frac{f}{x'}, \quad \text{和} \quad \frac{\psi}{t} = \frac{f}{x'} \frac{x'}{t} = \pm v \frac{f}{x'},$$

所以

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} \quad \text{而} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = - \left[\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right]_t = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \left[\mp \frac{f}{t} \right]$$

因此

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \pm v \frac{\partial}{\partial x'} \left[\pm v \frac{\partial f}{\partial x'} \right] = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

【例 1.3】 若 $\psi_1(x, t)$ 和 $\psi_2(x, t)$ 是微分波动方程的两个解, 试证明 $\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)$ 也是一个解。

【解】 因为 $\psi_1(x, t)$ 和 $\psi_2(x, t)$ 都是解, 所以有

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad \text{和} \quad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2}$$

把上面两式相加, 可得

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \left[\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \right]$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\psi_1 + \psi_2) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\psi_1 + \psi_2)$$

上述结果是一维波动方程的迭加原理。于是有

$$\psi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

是方程的通解。

【例 1.4】 已知波形为: $\psi(y, 0) = \frac{3}{2y^2 + 1}$ 。

(1) 试写出沿 y 增加方向以 2 m/s 速率运动相应的行波表达式。

(2) 画出 $t=0$ 和 $t=1 \text{ s}$ 的波形。

【解】 (1) 只要以 $y \pm vt$ 代替 y , 或在此特定情况下以 $y - 2t$ 来代替 y 。因此有

$$\psi(y, t) = \frac{3}{2(y - 2t)^2 + 1}$$

(2) 如图 1-2 所示。

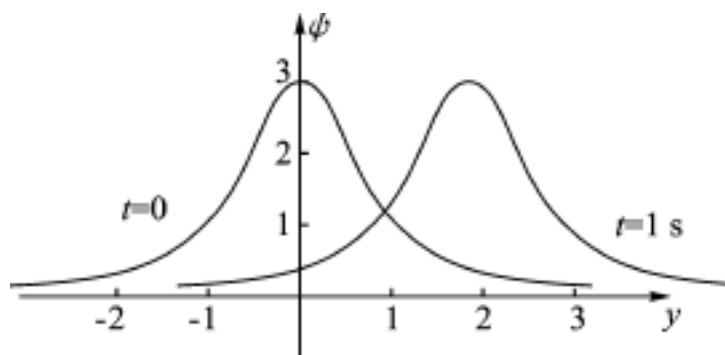


图 1-2

【例 1.5】 (1) 试证明表达式 $\psi(z, t) = Ae^{-(2z+3t)^2}$ 是一行波;

(2) 验证它是波动方程的解。

【解】 (1) 表达式可以改写为

$$\psi(z, t) = Ae^{-4(z+3t/2)^2}$$

上式是 $(z + vt)$ 的函数, 而 $v = 3/2$ 。因此, 上式表示一个沿负 z 方向以速率 $3/2$ 运动的波。

(2) 由微分 $\frac{\partial \psi}{\partial z} = -8(z + 3t/2) Ae^{-4(z+3t/2)^2}$, 有

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = [-8(z + 3t/2)]^2 Ae^{-4(z+3t/2)^2} - 8Ae^{-4(z+3t/2)^2}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = [-8(z + 3t/2)(3/2)] Ae^{-4(z+3t/2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = [-8(z + 3t/2)(3/2)]^2 Ae^{-4(z+3t/2)^2} - 8(3/2)^2 Ae^{-4(z+3t/2)^2}$$

于是, 波方程成为

$$\{ [-8(z + 3t/2)]^2 - 8 \} \psi = \frac{1}{v^2} (3/2)^2 \{ [-8(z + 3t/2)]^2 - 8 \} \psi$$

对于 $v = 3/2$, 的确满足上式。

1.4 正弦波

一、内容精讲

一系列形状为正弦曲线(见图 1-3)的波称为谐波。因为数学上通过傅里叶方法,我们可以用若干正弦函数的和来合成较复杂的波,所以这种波是有特别意义的。

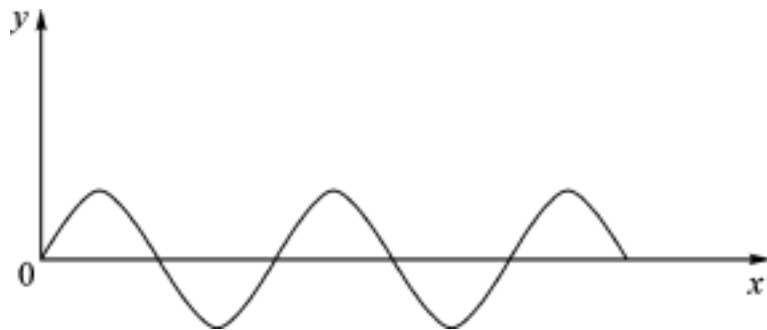


图 1-3

如果 $\psi(x, 0) = A \sin kx$, 于是有

$$\psi(x, t) = A \sin k(x \pm vt) \quad (1-7)$$

式(1-7)描述的是一前进谐波。正弦函数的幅角是无单位的,为此我们引入正的常数 k 并称为传播数。量 $\psi(x, t)$ 的最大值是振幅 A 。由于在一个空间周期或波长 λ 之后波函数本身可重复出现,即 $\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t)$, 对于这种情况,传播数必须用 $k = 2\pi/\lambda$ 给定。类似地,如果在一个时间周期 τ 之后,波函数本身可重复出现,即 $\psi(x, t) = \psi(x, t \pm \tau)$, 从而 $\tau = \lambda/v$ 。周期是每个波的时间单位,它的倒数是频率 ν , 或每单位时间的波数。因此 $\nu = \lambda v$ 。

和力学类似,我们可以引入角频率 $\omega = 2\pi/\tau$ 。虽然实际上这里没有任何东西在转动,但是使用像 ω 这样一类单位为弧度每秒的量是方便的。因此波函数可改写为

$$\psi(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t) \quad (1-8)$$

上述谐波在空间和时间上均从 $-\infty$ 变化到 $+\infty$, 因此它们是数学上的抽象。因为它们只包含单一的频率,这种波称为单色波。虽然以不同程度接近它们的波存在并称为是准单色的,但没有实际的物理扰动具有这种形式。

二、典型例题

【例 1.6】 试证明对于一系列谐波,其空间上的重复性: $[\psi(x, t) = \psi(x \pm \lambda, t)]$, 要求 $k = 2\pi/\lambda$ 。

【解】 我们知道,当幅角增加或减少 2π 时,正弦函数本身重复出现。因此有

$$A \sin k(x - vt) = A \sin k[(x \pm \lambda) - vt] = A \sin [k(x - vt) \pm 2\pi]$$

第二个量给出 $|k\lambda| = 2\pi$, 或因为 k 和 λ 均是正的,所以 $k = 2\pi/\lambda$ 。

【例 1.7】 可见光的波长大致是在 390 nm(紫光)到 780 nm(红光)的范围内。和所有真

空中的电磁波一样,它在真空中速率约为 $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。试确定对应的频率范围。

【解】 因为 $v = \lambda\nu$, 有

$$\nu_{\text{io}} = \frac{3 \times 10^8}{390 \times 10^{-9}} = 7.7 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$\nu_{\text{ed}} = \frac{3 \times 10^8}{780 \times 10^{-9}} = 3.8 \times 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

单位是秒的倒数或周每秒。现在我们使用赫兹(符号为 Hz)来代替周每秒。因此频率范围是从 380 THz 到 770 THz ($1 \text{ 太拉赫兹} = 10^{12} \text{ Hz} = 1 \text{ THz}$)。

【例 1.8】 试证明谐波函数 $\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$ 是一维微分波动方程的解。

【解】 波动方程由下式给出,即

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

由于

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = kA \cos(kx - \omega t), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t) = -k^2 \psi$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t), \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \sin(kx - \omega t) = -\omega^2 \psi$$

因此,波方程成为

$$-k^2 \psi = \frac{1}{v^2} (-\omega^2 \psi)$$

因此,只要 $v = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu$ (这是已知的事实), ψ 是一个解。

【例 1.9】 试证明一列前进谐波可依次用下列方程来描绘:

$$(1) \psi = A \sin 2\pi \left[\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{\tau} \right];$$

$$(2) \psi = A \sin 2\pi \nu \left[\frac{x}{v} \pm t \right];$$

$$(3) \psi = A \sin 2\pi(kx \pm \nu t), \text{ 式中 } \kappa = 1/\lambda.$$

【解】 (1) 从 $\psi = A \sin k(x \pm \nu t)$ 着手,利用 $k = 2\pi/\lambda$ 可得到

$$\psi = A \sin 2\pi \left[\frac{x}{\lambda} \pm \frac{\nu t}{\lambda} \right]$$

而

$$\frac{\nu}{\lambda} = \nu = \frac{1}{\tau}$$

(2) 根据(1)的结果:因为 $\lambda\nu = v$ 和 $\tau\nu = 1$, 所以

$$\psi = A \sin 2\pi \nu \left[\frac{x}{\lambda\nu} \pm \frac{t}{\tau\nu} \right] = A \sin 2\pi \nu \left[\frac{x}{v} \pm t \right]$$

(3) 把 $\lambda = 1/\kappa$ 和 $\tau = 1/\nu$ 代入到(1)的结果中去得

$$\psi = A \sin 2\pi(\kappa x \pm \nu t)$$

【例 1.10】 已知光波的波函数(SI 单位)为

$$\psi(x, t) = 10^3 \sin \pi(3 \times 10^6 x - 9 \times 10^{14} t)$$

试确定该波的: (1) 速率; (2) 波长; (3) 频率; (4) 周期; (5) 振幅。

【解】 (1) 通过与 $\psi(x, t) = A \sin k(x - vt)$ 相比较, 已知波函数可以写为

$$\psi(x, t) = 10^3 \sin[3 \times 10^6 \pi(x - 3 \times 10^8 t)]$$

于是得到 $v = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ 。

(2) 根据(1), $k = 3 \times 10^6 \pi \text{ m}^{-1}$ 。因此, $\lambda = 2\pi/k = 666 \text{ nm}$ 。

$$(3) v = \frac{v}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8}{666 \times 10^{-9}} = 4.5 \times 10^{14} \text{ Hz}。$$

$$(4) \tau = \frac{1}{v} = 2.2 \times 10^{-15} \text{ s}。$$

(5) 根据(1), $A = 10^3 \text{ V/m}$ (即伏特每米)。

1.5 相位和相速度

一、内容精讲

我们将要研究的最重要概念之一是谐波的相位 ϕ , 它简单地定义为正弦函数的幅角, 即

$$\phi = kx \pm \omega t \quad (1-9)$$

因为当 $t = 0$ 和 $x = 0$ 时, $\psi(0, 0) = 0$, 所以, 迄今为止写出的波函数实际上是一种特殊情况。为什么当 $t = 0, x = 0$ 时波的大小不能取所希望的任意值呢? 这是毫无道理的。通过初相位 ε 的引入, 使得: $\phi = kx \pm \omega t + \varepsilon$ 可以用改变正弦函数来达到上述目的。初相位 ε 表示在波源中产生的、对位相的固定贡献, 而与波究竟传播了多远的距离和多长时间无关。

对于更普通的情况, 可以将任何一个简谐波函数写为

$$\psi(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t + \varepsilon) \quad (1-10)$$

或

$$\psi(x, t) = A \cos\left[kx \pm \omega t + \left[\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right]\right] \quad (1-11)$$

即我们可以用正弦函数和余弦函数来描写同一个简谐波。

当我们想像一列波掠过时, 通过观察扰动大小保持不变的某点的运动来确定其速率。对这样一个点, 相位必定也是常数。因此波的速率就是相位不变的状态传播的速率, 即

$$\left[\frac{-x}{t}\right]_{\phi} = \frac{(\phi/t)_x}{(\phi/x)_t} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v \quad (1-12)$$

正量 v 是谐波的传播速率, 它也叫作相速度。

二、典型例题

【例 1.11】 通过检验相位, 试确定由下面式子所表示的行波的运动方向。

$$\psi(y, t) = A \cos 2\pi \left[\frac{t}{\tau} + \frac{y}{\lambda} + \varepsilon \right]$$

$$\psi(z, t) = A \cos 10^{15} \pi \left[t - \frac{z}{v} + \varepsilon \right]$$

【解】 因为 t 是正的而且在增大, 所以要保持相位不变的状态 (即 $\phi = 2\pi \left[\frac{t}{\tau} + \frac{y}{\lambda} + \varepsilon \right] =$ 常数), 要求 y 要减少。换句话说, 由于 ϕ 是常数, ψ 必然是沿负 y 方向运动的波。同样地, ψ 是沿 z 增加的方向或正 z 方向运动的波。 ε 的符号同运动方向是无关的。

【例 1.12】 利用 $v = \left[\frac{-x}{t} \right]_{\phi}$ 这一事实, 计算波 $\psi(x, t) = 10^3 \sin \pi(3 \times 10^6 x - 9 \times 10^{14} t)$ 的速率, 采用 SI 单位。

【解】 $\psi =$ 常数的状态等效于

$$0 = \frac{d\phi}{dt} = \left[\frac{-\phi}{t} \right]_x + \left[\frac{-\phi}{x} \right]_t \left[\frac{-x}{t} \right]_{\phi} = \left[\frac{-\phi}{t} \right]_x + \left[\frac{-\phi}{x} \right]_t v$$

因此
$$v = - \frac{\left(\frac{\phi}{t} \right)_x}{\left(\frac{\phi}{x} \right)_t} = - \frac{-9 \times 10^{14} \pi}{3 \times 10^6 \pi} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

所以, v 是一个正量。

【例 1.13】 一列谐波沿正 x 方向运动, 在 $x = 0$ 处, $\psi = 10$; 在 $x = \lambda/6$ 处, $\psi = 20$; 而在 $x = 5\lambda/12$ 处, $\psi = 0$, 试写出此谐波波形的表达式。

【解】 因为 $t = 0$, $\psi(x, 0) = A \sin(kx + \varepsilon)$; 把题给数据代入, 得到

$$\psi(0, 0) = A \sin \varepsilon = 10$$

$$\psi(\lambda/6, 0) = A \sin(\pi/3 + \varepsilon) = 20$$

$$\psi(5\lambda/12, 0) = A \sin(5\pi/6 + \varepsilon) = 0$$

把第一、第二式合并得

$$A \sin(\pi/3 + \varepsilon) = 2 A \sin \varepsilon$$

或

$$\sin \frac{\pi}{3} \cos \varepsilon + \cos \frac{\pi}{3} \sin \varepsilon = 2 \sin \varepsilon$$

由此

$$\tan \varepsilon = \frac{\sin \pi/3}{2 - \cos \pi/3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

于是, $\varepsilon = \pi/6 \text{ rad}$ 和 $A = 20$ 。

因此

$$\psi(x, 0) = 20 \sin(kx + \pi/6)$$

1.6 复数表示

内容精讲

进一步分析波动现象时将会看到, 用正弦函数和余弦函数来描写简谐波, 会带来不便。当

所表达的式子越复杂时,处理这些式子所需的三角函数运算就越麻烦。波的复数表示提供了另外一种描写方法,它在数学上用起来更为简便。实际上,波函数的复指数形式,在经典力学和量子力学中都用得广泛,在光学中也一样。

复数 z 的形式为

$$z = x + iy$$

其中 $i = \sqrt{-1}$, z 的实部和虚部分别是 x 和 y , x 和 y 本身都是实数。 z 的复共轭用星号表示 z^* ,是把凡出现 i 的地方都换成 $-i$ 而得。上式说明,任何一个复数可以表示成一个实部 $\text{Re}z$ 和一个虚部 $\text{Im}z$ 之和,即

$$z = \text{Re}z + i \text{Im}z$$

所以
$$\text{Re}z = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \text{Im}z = \frac{1}{2i}(z - z^*)$$

由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, 我们可以把 z 写成极坐标形式为

$$z = re^{i\theta} = r \cos \theta + i r \sin \theta$$

式中, r 是 z 的长度,而 θ 是 z 的相角(单位是弧度)。长度常常用 $|z|$ 来代表,并且叫做复数的模或绝对值。

用极坐标表示式有: $\text{Re}z = r \cos \theta$, $\text{Im}z = r \sin \theta$ 。

显然,不论实部和虚部都可以用来描写简谐波。但是,习惯上都选用实部。这时,一个简谐波可以写为

$$\psi(x, t) = \text{Re}[e^{i(kx \pm \omega t + \varphi)}] \quad (1-13)$$

当然,它等价于式(1-10)。

今后,只要它带来方便,我们就把波函数写成

$$\psi(x, t) = Ae^{i(kx \pm \omega t + \varphi)} = Ae^{i\Phi} \quad (1-14)$$

并把这种复数形式用到所需要的计算中,其目的是利用复指数运算的简便。只有在得出最后的结果之后,并且只有当要表示出实际的波的时候,我们才需要取它的实部。因此,把 $\psi(x, t)$ 写成上述的形式是十分通用的,这时应当这样理解:实际的波是它的实部。

1.7 三维波

一、内容精讲

根据空间变量应该对称出现的特征,可把微分波动方程推广至三维情况。即只要坐标系保持右手螺旋,如果把空间变量交换位置,方程应该不变。在任何情况下,有

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1-15)$$

式(1-15)是笛卡儿坐标中适用的三维形式。在光学研究中,最关心的是那些与平面波和球面波有关的特解。现在我们来写平面方程,此平面通过一任意点 (x, y, z) 且垂直于传播矢量

所描绘的给定方向,如图 1-4]。

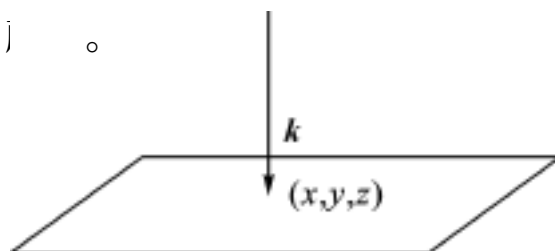


图 1-4

$$\begin{aligned} \text{只要} & (r - r_0) \cdot k = 0 \\ \text{或} & k \cdot r = \text{常量} \end{aligned} \quad (1-16)$$

矢量 $r - r_0$ 将扫过所要求的平面。这是一个平面方程,从而 $\psi(r) = A \sin(k \cdot r)$ 是一个由所有垂直于 k 的平面族所定义的函数。在这些 $k \cdot r = \text{常量}$ 的每一个平面上, $\psi(r)$ 是一常量。当从一平面运动到另一平面时, $\psi(r)$ 正弦式地变化。像以前一样,为了把 $\psi(r)$ 变换为一个前进的平面谐波,要把它改写为

$$\psi(r, t) = A \sin(k \cdot r \pm \omega t) \quad (1-17)$$

式中,负号对应于正 k 方向的运动,正号对应于负 k 方向的运动。

通过解球坐标的微分波动方程,球面谐波的形式是最容易得到的。这个过程导致:

$$\psi(r, t) = \frac{A}{r} \sin k(r \pm vt) \quad (1-18)$$

式中,常数 A 称为源强度。注意到振幅 A/r 和离开波源的距离成反比。这是能量守恒所要求的。另一方面,在相位中的负号和正号分别对应于离开波源的发散波和指向波源的会聚波。在任何情况下,上述表达式均表示一组同心球面,在每个球面上 r 为常量,因而 $\psi(r, t)$ 是常量。

代替谐波,我们可以完全相同地研究球面或平面脉冲。例如,设想一个点波源,它正好接通、建立,然后关掉而不是在作谐振动。扰动(虽然寿命短)应当按某一类球形脉冲沿所有方向传播出去。

二、典型例题

【例 1.14】 我们已求得 $k \cdot r = \text{常量}$ 是一垂直于 k 且通过某点 (x_0, y_0, z_0) 的平面方程。试确定常量的形式,并写出笛卡儿坐标的谐波波函数。

【解】 平面方程是 $(r - r_0) \cdot k = 0$ 。

在笛卡儿坐标中 $r = [x \ y \ z]$, $r_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]$ 和 $k = [k_x \ k_y \ k_z]$ 。

因此 $(x - x_0)k_x + (y - y_0)k_y + (z - z_0)k_z = 0$

或 $xk_x + yk_y + zk_z = x_0k_x + y_0k_y + z_0k_z$

这个最末方程的左边是 $k \cdot r$, 而右边是问题中的常量。谐波函数 $\psi(r, t) = A \sin(k \cdot r \pm \omega t)$ 成为

$$\psi(r, t) = A \sin(xk_x + yk_y + zk_z \pm \omega t)$$

【例 1.15】 试写出在笛卡儿坐标中以方向余弦 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 表示的平面谐波波函数,其中: $k_x = k \cos \alpha, k_y = k \cos \beta, k_z = k \cos \gamma$ 和 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 。然后证明此函数是