第一章 数学的文化价值

§1 数学的特点

数学作为一门科学，其最鲜明的特点是：高度的抽象性，严密的逻辑性和广泛的应用性，

数学的研究对象是客观世界的数量关系和空间形式，例如数学中研究的数 3，不是三个苹果或三个人，而是由这样的实例抽象出来的共同的数量特征 3.人们在对各种集合计数时，发现数的特征和被计数事物的特性无关，数也和用什么符号表示无关，从人类认知数的过程可以知道，只有智力发展到较高程度时，数的概念的抽象特征才会变得清晰，对儿童来说，数总是和有形的事物联系在一起，例如和手指或算盘珠联系在一起，同样，数学中研究的点，不是地上工程师用油漆标出的记号，也不是白布上很小的瑕疵，而是由类似的实际事物抽象出来的没有长度、没有宽度的一个位置特征，对数学来说，实际对象的描述并没有多少意义，因为局限于具体的实际对象数学并不能走得太远，如果我们只会计算一只梨加一只梨是两只梨，一只苹果加一只苹果是两只苹果，而不懂得抽象的数的加法的思维，我们就得不到一根香蕉加一根香蕉或其他什么东西相加的结果，数学研究的对象超越了现实的具体事物，致力于研究这些对象之间的相互关系、它们的运算法则，即研究对象的结构和关系，当然，抽象和具体又

是相互依存的，对实际对象作出的抽象是否正确和恰当，不能靠自身来说明，而只能以实践来判断，要看由此得到的数学结构和关系是否与‘可验证的事实’相符合，

严密的逻辑性是数学的另一个特点，数学的结论，除了少数几个被称为‘公理’和‘公设’以外，都要求应用逻辑推理的方法，用公理、公设或已经得到证明的结论加以严格的论证，这个从欧几里德所处的古希腊时代就流传下来的‘公理化’的传统，反映了学科内在的严密化的要求，对数学的发展产生了巨大的影响，在数学领域之外，欧几里德公理化体系也为其他一些学科领域的基础理论树立了典范。

一门学科理论逻辑的严密，是这门学科发展到一定阶段的必然要求.这里我们可以看看微积分创立阶段的情况，在牛顿创立微积分之初，先是发现了许多在实践中行之有效的方法，却不能对微积分的基础给出令人信服的“证明”，难怪当时攻击微积分方法的人说微分是一个“逝去的鬼魂”当时数学家直观的猜想以及用不能说服人的方法所得到的推论，却常常符合实际情况，于是这样的猜想和不能说服人的方法，常常帮助科学技术人员解决了实际问题，也帮助了数学家开辟拥有无穷宝藏的数学新领域，此时对开拓者来说，严密的逻辑推理似乎并不重要，但是随着微积分应用范围的拓展，开拓阶段的喜悦逐渐为严谨的思考所替代，数学应用的进一步扩展和深化，要求理论本身建立在一个扎实可靠的基础上，要求对数学结论应用的条件和范围给予明确的界定，这样，学科内部严密化的要求逐渐突现出来，微积分的发展受到了其基础不明晰的制约，恰在同时，19 世纪法国大革命促进了高等教育的发展，人们要求高等教育的内容在科学性方面更加可靠，其中包括要求检验数学，特别是微积分和极限概念的基础.这个历史的契机，大大地加快了微积分理论公理化的进程，促进了近代数学的发展。

微积分的发展史说明，逻辑推理表现的深思熟虑并不是数学的全部，但是它引导人们更清晰地领会数学概念的重要性，引导人们更深入地理解数学事实以及它们之间的依存关系，从而在实践中更准

确、更可靠地应用这些知识，经过历代数学家们的千锤百炼，数学已经成为一门逻辑严谨、结构紧密的科学，数学结论的真伪不会因人而异，其结论一旦得到证明，就会得到普遍的接受，可以这样来描述这门科学结构的紧密性：如果这栋科学大厦的任何一个地方出了问题，都会导致整个大厦的崩塌，数学大厦是人类智慧的结晶，是人类在认识客观世界的过程中所作的艰苦卓绝努力的结果。

由数学的抽象性和严密性决定了数学应用的广泛性，数学的抽象性和严密性是同一个数学原理可能在不同的领域中得到应用的原因，抽象的数学概念，在一百多年前曾促成电子学的革命，使世界的通讯手段及思想方法大为改观．而近几十年来由于大量数学成果的出现，才使无线电、电视、电话、人造卫星、电脑等现代科技成果的出现和发展成为可能，事实说明，在今天的社会里，数学方法是各种科学技术领域中不可或缺的工具，数学科学已经成为现代科学技术的支柱，特别是近几十年计算机的普及，使得“数量化”成为许多实质性学科发展的一个显著特点，数学方法渗透到各学科领域，涌现出一批使人耳目一新的成果，这中间包括传统的文科领域，出现了诸如计量历史学、数理语言学、数理心理学等文理交叉的新学科，在研究文科领域的具体课题时借助于数学的成果、数学的方法，并且充分利用计算机等现代技术，在未来也必定是一个大有作为的方向。

§2　数学是哲学思考的重要基础

数学在科学、文化中的地位，也使得它成为哲学思考的重要基础，历史上哲学领域内许多重要论争，常常牵涉到有关对数学的一些根本问题的认识，我们思考这些问题，有助于正确认识数学，正确理解哲学中有关的争论。

2.1　数学——根源于实践

数学的外在表现，或多或少和人的智力活动相联系，因此在数学

和实践的关系上,历来有人主张数学是‘人的精神的自由创造”,否定数学来源于实践,其实，数学的一切发展都不同程度地归结为实际的需要.从我国殷代的甲骨文中，就可以看到那时我们的祖先已经会使用十进制计数方法,他们为适应农业的需要,将‘十干’和‘十二支’配成六十甲子,用以记年、月、日,几千年的历史说明这种日历的计算方法是有效的,同样，由于商业和债务的计算，古代的巴比伦人已经有了乘法表、倒数表,并积累了许多属于初等代数范畴的资料,在埃及,由于尼罗河泛滥后重新测量土地的需要，积累了大量计算面积的几何知识,后来随着社会生产的发展，特别是为适应农业耕种与航海需要而产生的天文测量，逐渐形成了初等数学，包括当今我们在中学里学习到的大部分数学知识,再后来由于蒸汽机等机械的发明而引起的工业革命，需要对运动特别是变速运动作更精细的研究，以及大量力学问题出现，促使微积分在长期的酝酿后应运而生.20 世纪以来近代科学技术的飞速发展，使数学进入一个空前繁荣时期,在这个时期数学出现了许多新的分支:计算数学,信息论,控制论,分形几何等等,总之，实践的需要是数学发展的最根本的推动力。

数学的抽象性往往被人所误解,有些人认为数学的公理、公设、定理仅仅是数学家头脑思维的产物,数学家靠一张纸、一支笔工作,和实际没有什么联系。

其实，即使就最早以公理化体系面世的欧几里德几何而言，实际事物的几何直观和实践中人们发现的现象，尽管不合乎数学家公理化体系的程式，却仍然包含着数学理论的核心,当数学家把建立几何的公理体系当作自己的目标时，他的头脑中也一定联系到几何作图和直观现象,一个人,即使是很有天赋的数学家,能在数学的研究中获得具有科学价值的成果，除了他接受过严格的数学思维训练以外，他在数学理论研究的过程中，必定会在问题的提出、方法的选择、结论的提示等诸多方面自觉或不自觉地受到实践的指引,可以这么说,脱离了实践,数学就会变成无源之水,无本之木。

但是，数学理性思维的特点，使它不会满足于仅研究现实的数量

关系和空间形式，它还努力探索一切可能的数量关系和空间形式．在古希腊时期，数学家就超越了在现实有限尺度精度内度量线段的方法，觉察到了无公度量线段的存在，即无理数的存在这其实是数学中最困难的概念之一——连续性、无限性的问题，直到两千年以后，同样的问题导致极限理论的深入研究，大大地推动了数学的发展．试想今天如果还没有实数的概念，我们将面临怎样的处境这时人们无法度量正方形对角线的长度，也不会解一元二次方程；至于极限理论与微积分学更不可能建立。即使人们可以像牛顿那样应用微积分，但是在判断结论的真实性时会感到无所适从．在这种状况下，科学技术还能走多远呢？又如在欧几里德几何产生时，人们就对其中一个公设的独立性产生怀疑，到 19 世纪上半叶，数学家改变这个公设，得到了另一种可能的几何——非欧几里德几何，这种几何的创立者表现了极大的勇气，因为这种几何得出的结论从“常理”来说是非常“荒唐”的，例如“三角形的面积不会超过某一个正数”。现实世界似乎没有这种几何的容身之地，但是过了近一百年，在物理学家爱因斯坦发现的相对论中，非欧几里德几何却是最合适的几何，再如，20 世纪 30 年代哥德尔得到了数学结论不可判别性的结果，其中的某些概念非常抽象，近几十年却在算法语言的分析中找到了应用。实际上，许多数学在一些领域或一些问题中的应用，是这些数学理论当初的创始者做梦也想不到的所有这一切说明，一旦实践推动了数学，数学本身就会不可避免地获得了一种动力，使之有可能超出直接应用的界限，而数学的这种发展，最终也会回到实践中去。

总之，我们应该大力提倡研究和当前实际应用有直接联系的数学课题，特别是现实经济建设中的数学问题，但是我们也应该在纯粹科学和应用科学之间建立有机的联系，建立抽象的共性和丰富多彩的个性之间的平衡，以此来推动整个科学协调地发展。

2.2 数学——充满了辩证法

由于数学严密性的特点，很少有人怀疑数学结论的正确性，相

反，数学的结论往往成为真理的一种典范，例如人们常常用“像一加一等于二那么确定”来表示结论不容置疑，在我们的中小学的教学中，数学更是只准模仿、演练、背诵。数学真的是万古不变的绝对真理吗？

事实上，数学结论的真理性是相对的，即使像 $1+1=2$ 这样简单的公式，也有它不成立的地方，例如在布尔代数中，$1+1=0$！而布尔代数在电子线路中有广泛的应用，欧几里德几何在我们的日常生活中总是正确的，但在研究天体某些问题或速度很快的粒子运动时非欧几何却是适宜的，数学其实是非常多样化的，它的研究范围也随着新问题的出现而不断扩大，如同一切科学一样，数学家们如果死守着前辈的思想、方法、结论不放，数学科学就不会进步．把数学的严密性和公理化体系看作一种“教条”是错误的，更不能像封建时代的文人对待孔夫子说的话“真理”已经包含在圣人说过的话里，后人只能对其作诠释．数学发展的历史可以证明，正是数学家特别是年轻数学家的创新精神，敢于向守旧的思想挑战，数学的面貌才得以不断地更新，数学才成长为今天这样一门蓬勃发展、富有朝气的学科．

数学的公理化体系从来也不是不容怀疑、不容变化的“绝对真理”．欧几里德的几何体系是最早出现的数学公理化体系，但从一开始就有人怀疑其中的第五公设不是独立的，即该公设可以从公理体系的其他部分推出．两千多年来人们一直在寻找答案，终于在 19 世纪由此发现了非欧几何．虽然人们长时期受到欧几里德几何的束缚，但是最终人们还是接受了不同的几何公理体系．如果历史上某些数学家多一点敢于向旧体系挑战的革新精神，非欧几何也许还可能早几百年出现．

数学公理化体系反映了内部逻辑严密性的要求．在一个学科领域内，当有关的知识积累到一定程度后，理论就会要求把一堆看来散乱的结果以某种体系的形式表现出来．这就需要对已有的事实再认识、再审视、再思索，创造新概念、新方法，尽可能地使理论能包括最一般、最新发现的规律．这实在是一个艰苦的理论创新过程．数学公

理化也一样，它表示数学理论已经发展到了一个成熟的阶段，但并不是认识一劳永逸的终结．现有的认识可能被今后更深刻的认识所代替，现有的公理也可能被今后更一般化、包含更多事实的公理体系所代替．数学就在不断地更新过程中得到发展．

有种看法以为，应用数学就是把熟诵的数学结论套到实际问题上去，以为中小学的数学就是教给学生这些万古不变的教条．其实数学的应用极充满挑战性，一方面不但需要深切地认识实际问题本身，另一方面要求掌握相关数学知识的真谛，更重要的是要求能创造性地把两者结合起来．

就数学的内容来说，数学充满了辩证法．在初等数学发展时期，占统治地位的是形而上学．在该时期的数学家或其他科学家看来，世界由僵硬的、不变的东西组成．与此相适应，那时数学研究的对象是常量，即不变的量．笛卡尔的变数是数学中的转折点，他把初等数学中完全不同的两个领域——几何和代数结合起来，建立了解析几何．这个框架具备了表现运动和变化的特性，辩证法因此进入了数学．在此后不久产生的微积分抛弃了把初等数学的结论作为永恒真理的观点，常常作出相反的判断，提出一些在初等数学的代表人物看来完全不可理解的命题．数学走到了这样一个领域，在那里即使很简单的关系，都采取了完全辩证的形式，迫使数学家们不自觉又不自愿地转变为辩证数学家．在数学研究的对象中，充满了矛盾的对立面：曲线和直线，无限和有限，微分和积分，偶然和必然，无穷大和无穷小，多项式和无穷级数，……正因为如此，马克思主义经典作家在有关辩证法的论述中经常提到数学．我们学一点数学，一定会对体会辩证法有所帮助．

§ 3　数学是公民文化素质的组成部分

3.1　数学——文化中的独特部分

数学作为工具，对各个不同学科领域的专业人士的吸引力是有

目共睹的. 但是数学不仅仅是工具,它也以自己独特的思维方式、独特的表现形式，与其他科学以及文学、艺术等一样，具有重要的文化价值. 数学教育家波耶说过"科学不仅是生活的工具,也是一种思想的习惯. 而数学则不仅是一大堆算法，也是文化的一个组成部分". 有人称数学是"看不见的文化",这里说的"看不见",是指数学家不像作家、艺术家甚至物理学家那样被社会所注目，他们的成果也很少有人理解. 但数学确实是一种文化，它对人的影响无处不在，只是许多人没有意识到. 著名的美国《科学》杂志特约主编斯蒂恩说得更清楚："数学……在人类特性和人类的历史中，它的地位绝不亚于语言、艺术或宗教."

数学和其他科学、艺术一样，是人类共同的精神财富，数学是人类智慧的结晶. 它表达了人类思维中生动活泼的意念，表达了人类对客观世界深入细致的思考，以及人类追求完美和谐的愿望.

早在古希腊时代，哲学家柏拉图把数学看作是文化的最高理想. 他说："几何学可以将灵魂引向真理，并且创造出爱智的精神". 他认为学习数学不只是为了求真，也是为了求善、求美. 他认为人通过研究几何同时也不断地塑造自己，使自己成为更高尚、更丰富、也更有力量的人. 其后的数学家毕达哥拉斯认为"数统治宇宙",即认为宇宙的本原是数. 他们意识到，宇宙是有其自身规律的，而宇宙的规律可以用数学的方式来表现. 数学思想、方法可以成为人认识宇宙、表达客观规律的一种方式、一种途径. 近代有人把数学看作理性的音乐，把音乐看作感性的数学，恰如其分地道出了数学和音乐的共通之处. 伟大的物理学家爱因斯坦曾这样描述过人类的科学探索及数学在其中的作用："音乐和物理学领域中的研究工作在起源上是不同的，可是被共同的目标联系着，这就是对表达未知东西的企求.……这个世界可以由音乐的音符组成，也可以由数学的公式组成. 我们试图创造合理的世界图象，使我们在那里就像感到在家里一样，并且可以获得我们在日常生活中不能达到的安定."

爱因斯坦说的是人类理性的探索，这种探索围绕着一个永恒的

主题，这就是“认识宇宙，也认识人类自己.”在这个漫长而永无止境的过程中，数学起着独特的作用.现在它几乎是任何科学都不可缺少的：它是现代科学技术的语言和工具；它的成果为众多学科所共享，积极推动着这些学科理论的建立和深化；它的思维方式和方法渗透到各学科，为这些学科的发展增添了活力.这其中也包括一些传统的文科领域.时至今日，一门科学要成为当之无愧的“现代科学”，第一个决定性的步骤就是使自己“数学化”.数学之所以有如此显要的作用，这是由数学在人类思维活动中的特点所决定的.这些特点也是数学影响人类文化的最突出之点.

首先，数学追求一种完全确定、完全可靠的知识.数学的对象必须是明确无误的概念，作为推理出发点的命题必须明确、清晰，推理过程的每一步骤都必须明确可靠、容不得半点的含糊，整个认识过程必须前后一贯而不容许自相矛盾.当然，任何一个法律文件、一篇有说服力的学术文章也必须概念清晰、逻辑严谨，但是数学对知识可靠性的要求更高、更明确.正因为如此，数学方法成为人们一种典范的认识方法，帮助人们正确地、客观地认识宇宙和人类自己.几千年来，人类的思想发生了巨大变化，人类的知识在不断地增长.而在由历史积累而形成的人类知识文化宝藏中，数学思想和方法却一直延续发展了几千年，表现出了强大的生命力.

其次，数学不断地追求最简单、最深层次的宇宙的根本.古希腊时代的毕达哥拉斯意识到从音乐的和声到行星的轨道，一切事物中都蕴藏着数那时的思想家就有一个信念：冥冥之中，宇宙有一个伟大的、统一的、但又是简单的设计图，这是一个数学设计图.而后来历史上一切比较深入的科学研究后面，总有一个信念在鼓舞、支持着人们，这就是，宇宙是合理的、简单的，因而是可以认识的.今天用简洁的数学公式来表示复杂的事物、理解变化的客观规律已经随处可见.例如，人们懂得了各种复杂的音调都可以分解为简单谐音的迭加，发现了把任何复杂的周期函数用三角函数表示的方法，人们能用最简单的函数——幂函 ——来求任意函数的近似值.在科学技术领域

内，人们现在已经能习惯地用非常简洁的数学公式来表示牛顿定律，以此来描述物体多种多样的运动；能用简洁的洛伦兹变换说明时空关系的相对论原理.在描述、解释各种现象的同时，人们同时借助于数学探求事物的机理，预测事物未来的发展变化，探求超出人类感官所及的宇宙的根本.在计算机日益普及的今天，人们常常通过建立数学模型进行数学计算，在数学思想方法的启发和帮助下，解决各式各样的问题.人们在认识客观世界的探索中越来越相信，世界的合理性可以用数学来描述.

数学的再一个特点是它不仅研究客观世界的数量关系和空间形式,而且也研究它自己.数学史中出现过的一个又一个悖论，记录了数学在研究自身的过程中所经历的一次又一次的危机.每一次危机所表现出来的震撼是这样的惊心动魄：危机似乎动摇了数学的基础，整栋数学大厦仿佛即刻就要倾毁.而数学正是在不断严格地审视自己、不断地克服自身一个又一个矛盾的过程中夯实了自己的基础，使之变得更为扎实、牢靠.一些公理化体系就是数学对自己的基础出现多次‘危机’后深思熟虑的结果.在探讨数学自身深层次问题的过程中，也形成了像数理逻辑这样的数学新分支，推动了数学自身的发展.作为文化一部分的数学，其发展的历史正是体现了人类追求真理而不断探索的精神：证明数学“是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶；这种奋斗已经历了两千五百多年之久，它深深扎根于人类活动的许多领域，并且只要人们认识自己和认识自然的努力一日不止，这种奋斗就将继续不已”.

数学的基础是逻辑和直觉、分析和推理、共性和个性，这种思维方式是数学外在的表现.而实质上，它也与文学、艺术等其他文化领域一样，其自身的发展受到不同的时代精神、不同的思维方式的影响.反过来它也影响着人们的精神和思维，影响一个民族文化的进步.古希腊时期，各种流派的思想非常活跃，数学也发展到了一个顶峰.这时期以阿基米德为代表的一代学者在自然科学与数学上作出了卓绝的贡献，出现了欧几里德的巨著《几何原本》.数学的辉

煌甚至使奴隶主把数学知识当作一种上层社会身份的标志.由于古希腊的衰亡，也由于当时学者的思维中过于沉重的几何偏向，数学中心并没有继续留在古希腊，而是向东转移到了阿拉伯国家.在这些国家发明的十进制记数法，对世界文明产生了巨大的影响.而在后来漫长的中世纪黑暗时期，数学家和科学家们受到形而上学思维的束缚，数学也是呈现出停滞不前的状态.直到工业革命时期，随着技术和自然科学迅速发展，数学也迎来了其历史上的又一个繁荣期.解析几何和微积分的创立，使变量成为数学的研究对象.数学思想、内容、方法上的革新，使数学的面貌焕然一新而数学研究运动、变化的思想和方法，以及数学所取得的进展，对打破科学研究中形而上学的枷锁，把辩证法引入到科学的思维中，起到了推波助澜的作用.今天，恐怕没有一个有文化的人不懂得“增长速度”“变化率”的含义，人们已经习惯从运动和变化的观点来研究事物.数学促进了几乎所有学科的发展，直接或间接地影响了每一个有文化的人的思维.

总之，数学影响人类的精神生活，在于它大大地促进了人的思想解放，提高和丰富了人类的整个精神文明水平.从这个意义上说，数学使人更完全、更丰富、更有力量.而数学作为一种特殊的文化，其重要性可以这样说：

没有现代数学就不会有现代文化，一个没有现代数学的文化是注定要衰落的.

3.2 数学——现代公民必须具备的文化素养

生活在21世纪的现代公民，面对着飞跃发展的科学技术，必须具备一定的文化素养，包括必要的数学知识和技能，以及对数学本身——作为人类知识宝库和一种文化的理解.

在日常生活中，我们要理解现在的社会，要共享现代科技的成果，就必须具备一定的数学知识.例如，某个权威部门说“今年前六个月的居民存款比去年同期增速下降1个百分点.”这条消息是什么

意思？与去年相比，居民存款数究竟发生了什么变化？是不是居民开始不存款了？又如，天气预报中说“今天降水概率是 50%”，是否意味着如果上午不下雨的话，下午一定下雨？又如，“信息高速公路”、“数字信息”等新名词不断出现，那么“信息”究竟是什么？它和数字如何联系起来，又如何来度量信息的多少？等等.

我国的数学教育不是过多，也不是没有用，而是作为一种素质教育还存在许多问题.在中学数学教学中盛行的题海战，把学习数学看作是进入高等学校的敲门砖.这种急功近利的氛围不利于学生良好素质的养成，不利于人才的培养，相反却造成了许多学生害怕数学、厌恶数学的不良心理.

数学作为人类思维的伟大成果之一，以及它处于自然科学和人文科学之间的地位，使数学成为高等教育一种特别有效的工具.数学对于学生的文化素质的影响，至少表现在如下几个方面.

1. 有利于培养严谨的思维方式.

前苏联教育家加里宁说过，“数学是思想的体操”.说的就是数学对培养严格的逻辑思维有非常重要的作用.尽管大多数学生将来不会成为数学家，但是条理性、逻辑性作为一种文化素质对他们将来从事任何一种职业都是需要的.

2. 有利于培养学生的创新精神.

数学是人类理性文明高度发展的结晶，体现出人的巨大的创造力.同时，数学又是人类创新的锐利工具.无论数学知识的应用或是数学知识的发展，都需要研究新问题，根据实际情况作出恰如其分的分析，并由此找到解决问题的途径.这里没有现成的答案可循，需要某种程度上的创新.而这种创新能力的培养，正是我们的教育目的之一，学习数学知识，应用数学知识，正是一种培养学生创新精神的有效途径.

3. 有利于培养科学的审美观.

数学教育有利于美育教育和科学教育相结合，培养科学的审美观，人们对美的理解各不相同，但总之美和完善、完美、和谐、秩

序…… 等相联系．而数学本身体现出的简洁美(抽象美、符号美、统一美等)、和谐美(对称美、形式美等)、奇异美(有限美、神秘美等)会给学生以美的熏陶，数学所揭示的规律会加深学生对美的理解，而学习数学的过程也会使学生体验数学作为人类智慧的结晶所洋溢出的精神美．

第二章
现代数学浅说

§1 集 合 论

1.1 集合的概念

在一般的教科书中，通常用描述性的“定义”来说明集合这个概念：

集合是具有一定性质的事物的全体.

但这不是一个精确的定义.因为什么叫“事物”,什么叫“一定性质”,什么叫“全体”,含义都没有严格界定.当然,在大多数情况下,这并不妨碍我们正确地应用“集合”这个概念及集合的性质来解决一些问题.

在应用集合概念和理论的时候，我们要求集合有所谓的“一义性”即对于任何一个事物 y 和任何一个集合 B,“y 是集合 B 中的一个事物”与“y 不是集合 B 中的一个事物”,必定有一个断言而且只有一个断言是正确的.如果我们用 $x\in A$ 表示“x 是集合 A 中的一个事物”,用 $x\notin A$ 表示“x 不是集合 A 中的一个事物”,集合的“一义性”要求用数学符号表示,就是

$y\in B$,或 $y\notin B$ 中有且仅有一个表达式成立.

因而,在一般情况下,集合的界定是很清楚的.然而在某些情况下，按上述描述性定义规定的集合却会产生麻烦.如下例.

1. 理发师悖论.

理发师说:他给一切"不给自己刮脸的人"刮脸.

初看起来，理发师的服务对象组成了一个集合 B.但是在讨论理发师自己是否属于 B 时却出现了矛盾.理发师若不给自己刮脸，他就应该属于 B,即自己也是服务对象,他就应该给自己刮脸.这样,他就属于"给自己刮脸的人"，从而他就不属于 B 但是若他不属于 B,即他"给自己刮脸"，他自己就不是服务对象，他就不应该给自己刮脸.因而也产生矛盾.这样,若记理发师为 y,则

$$y\in B \text{ 和 } y\notin B \text{ 都不对.}$$

这样的悖论还有许多.

2. 语义悖论.

由于英语中的音节只有有限多个，因而英语中包含的音节数少于 40个的英语表达式也只可能是有限多个.特别，用这样的表达式能表示的正整数也只可能是有限多个.我们用 B 表示"能用这样的表达式表示的正整数全体所组成的集合"设 x 是用少于 40个音节不能表达的最小正整数,即

$$x\notin B.$$

但是 x 可以用下面的英语表达式表示:

The least positive integer which is not denoted by an expression in the English language containing fewer than forty syllables.

上述表达式只含有 37 个音节,因而

$$x\in B.$$

与 $x\notin B$ 矛盾.

鉴于以上类型例子的矛盾，数学家重新研究了集合论的基础，尝试用各种方法来避免悖论他们提出了集合论的公理系统，其作用是对作为数学研究对象的集合加上一定的限制，使之得以消除产生悖论的可能.在这些限制下,上述种种"集合"都被排除在数学研究的对象之外.当然这些限制也是非常宽松的，足够保留数学理论所有有价值的东西，足够满足数学发展的需求.在这样的公理化理论中，集合

这个概念仍然不加定义,但是它的性质就由所谓的"集合公理"反映出来.而对集合论基础的研究，导致了数学一个重要分支——数理逻辑的迅速发展.

习 题

1. 有人说"我在说谎",他是否属于所有说谎人所组成的集合?试分析说明之.
2. 把一个词分成"自适用"和"非自适用"两类.例如"汉字"两字确实是汉字,"汉字"属于自适用词;"英语"就是非适用词.又如"古老"一词的产生确实历史悠久,"古老"属于自适用词;"摩登"也属于自适用词.试分析"非自适用"一词属于那一类?
3. 如果把不是理发师服务对象的人组成的集合记为 B,试分析理发师和集合 B 的关系,

1.2 集合的基数

对一个集合，我们通常会关心其包含的事物即包含的元素的多少.如果集合内的元素是有限多个，那么称此集合为有限集.对有限集，我们自然用其所含元素的个数来作比较.此时,我们也把集合内元素的个数称为集合的基数.如果一个集合内的元素有无穷多个，我们如何来定义集合的基数呢？我们又如何来比较两个无穷集合所含元素的多少呢？

为此，我们先分析一下在有限集的情况下，两个集合内的元素的多少是如何比较的.

古代的主妇就知道，如何判断客人的数目是否和椅子的数目相同：如果每个客人坐一把椅子，而每把椅子上都坐了一个客人，则客人数目就和椅子的数目一样多.对于两个集合 A 和 B,我们也可以用类似的方法来说明它们所含元素是否一样多.

设法规定一个将集合 A 中元素和集合 B 中元素的对应方法（这种方法随集合的不同而不同，例如上面的例子中把客人和他坐的椅子作对应），在这种对应方法下，满足：

1. 对 A 的每一个元素，B 中有一个元素和它对应.

2. 反过来，对于集合 B 中的任意一个元素，总可以找到 A 中的一个元素和它对应.

3. A 的元素不同，B 中对应元素也不同.

这时我们就可以认为，集合 A 中的元素和集合 B 中的元素一样多，称 A 和 B 有相同的基数.

对于有无穷多个元素的集合，先来看如下两个例子：

1. 普通旅店和客人.

设想一个普通旅店，各房间依次编了号码：

$$\#1,\quad \#2,\quad \#3,\cdots,\# n.$$

现在住进了一批客人.每人住一个房间，没有两个人住同一间房间.如果还有房间没有客人住，我们可以断言，房间数比客人数多；如果这样分配完客人后，发现没有空房间多余，即每个房间都有人住，则房间数和客人数相等；如果这样分配房间后还有客人未住进去，则客人数多于房间数.

对于有无穷多个元素的集合，会有一些不同寻常的性质.

2. 希尔伯特旅店.

设想一个有无穷多个房间的旅店.各房间依次编了号码；

$$\#1,\quad \#2,\quad \#3,\cdots.$$

现在来了一个代表团，有无穷多个成员.为管理方便，团长为每个成员编了号，

$$1,2,3,\cdots.$$

这样到达旅店后，团长让每个人住进号码相同的房间：编了 1 号那个人住进 #1 房间，2 号住进 #2 房间，…. 我们发现房间和代表团成员一样多 因为每个人有一个房间住，而每个房间都住了一个人，没有房间空着.这样，代表团成员的数目和旅店房间的数目相同，我们可以称代