由著名教育专家、命题评价专家和特级教师联合策划

转型导练 99 课

文 科 数 学

主　编　罗保华
编　委
主　审　王书清

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书聘请全国知名的学科专家和重点中学的优秀一线教师联合编写。采用新的编写理念,在内容取舍和体例编排上,注重学生的学习效率和学习效果,强调知识和能力的同步培养。

本书与高中新教材同步配套,可供师生配合课堂教学使用。由于本书内容比较实用,同样也适合广大高中学生自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

文科数学/罗保华 主编 . —北京: 电子工业出版社, 2004 .1
ISBN 7 - 5053 - 9522 - X

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 121436 号

责任编辑:
印　　刷:
出版发行: 电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编　100036
经　　销: 各地新华书店
开　　本:　　　　1/ 16　印张:　　　字数:　　　千字
印　　次: 2004 年　月第　次印刷
定　　价:　　　元

凡购买电子工业出版社的图书,如有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。联系电话:(010)68279077。质量投诉请发邮件至 zlts@phei .com .cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei .com .cn。

目　　录

第一章　集合与简易逻辑

第 1 课　集合与集合的表示法

考试目标

1. 集合与元素.

一组__象__全集构成一个集合, 集合中的每一个__象__做这个集合的元素.

2. 元素与集合的关系.

集合用__字母表示, 元素用__字母表示.

元素 a 与集合 A 的关系有且仅有__, 用符号表示就是 $a \in A, a \mid A$.

3. 集合中元素的三性.

①集合中的元素是已知的, 叫__定__;

②集合中的元素是互不相同的, 叫做__异__;

③集合中的元素是可换位的, 叫做__序__.

4. 集合的表示法.

用列举法写集合时, 其模式为: $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$

用描述法写集合时, 其模式为: $A = \{x \mid p(x)\}$.

题型示例

【例 1】　已知集合 $M = \{x \mid ax^2 + 6x + 9 = 0, a、x \in R\}$是单元素集, 试求 a 的值及这个单元素集所含的元素.

【解前点津】　M 中只 1 个元素, 转化为方程 $ax^2 + 6x + 9 = 0$ 只有 1 个根的条件.

【规范解答】　(1) 当 $a = 0$ 时, 原方程仅有一实根 $x = -\frac{3}{2}$;

(2) 当 $a \neq 0$ 时, 原方程 $ax^2 + 6x + 9 = 0$ 有且仅有一根, $\therefore \Delta = 6^2 - 4 \times 9a = 36 - 36a = 0$, $\therefore a = 1$,

即 $a = 1$ 时, 方程只有 1 个根 $x = -3$.

综上可知: 当 $a = 0$ 或 $a = 1$ 时, 集合 M 为单元素集, 且当 $a = 0$ 时, $M = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, $a = 1$ 时, $M = \{-3\}$.

【解后归纳】　题设条件中没有要求关于 x 的方程 $ax^2 + 6x + 9 = 0$ 为二次方程, 故它有两种情况: (1) 为一次方程; (2) 为二次方程——参数问题"分类讨论"法.

【例 2】　含三个元素的集合可以表示为$\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$, 也可以表示为$\{a^2, a + b, 0\}$, 则 $a^{2004} + b^{2004} =$ ________.

【解前点津】　从第二种表示法中的特殊元素 0 开始考虑, 确定第一种表示法中的 a 和 b 哪个应该为 0.

【规范解答】　由题意, 得$\left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\} = \{a^2, a + b, 0\}$, 故 $0 \in \left\{a, \frac{b}{a}, 1\right\}$且 $a \neq 0$　$\frac{b}{a} = 0$　$b = 0$, 从而$\{a, 0, 1\} = \{a^2, a, 0\}$.

于是 $a^2 = 1$ 解得 $a = 1$(舍去) 或 $a = -1$.

所以 $a^{2004} + b^{2004} = (-1)^{2004} = 1$.

【解后归纳】　问题中要考虑的因素较多时, 可从一个因素开始, 这个因素的特点应尽量鲜明, 这称做特点切入法.

【例 3】　设集合 $A = \{x \mid |x - a| < 2\}$, $B = \left\{x \,\middle|\, \frac{2x - 1}{x + 2} < 1\right\}$, 若 A　B, 求实数 a 的取值范围.

【解前点津】　为了求得实数 a 的取值范围, 必须先解出这两个集合 A 和 B.

【规范解答】　由$\frac{(2x - 1)}{(x + 2)} < 1$　$\frac{(x - 3)}{(x + 2)} < 0$ 解之: $-2 < x < 3$, 故 $B = (-2, 3)$.

另由$|x - a| < 2$　$-2 < x - a < 2$　$a - 2 < x < a + 2$, 所以: $A = (a - 2, a + 2)$,

$\because$ A　B, 即 $(a - 2, a + 2)$　$(-2, 3)$, $\therefore$ 由$\begin{cases} a - 2 \geq -2 \\ a + 2 \leq 3 \end{cases}$得 $0 \leq a \leq 1$.

【解后归纳】　利用数轴及条件, 确定四个实数 $-2, 3, a - 2, a + 2$ 的排列次序是解题的亮点所在.

【例 4】　已知 $P = \{(x, y) \mid (x + 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4\}$, $Q = \left\{(x, y) \mid (x + 1)^2 + (y - m)^2 < \frac{1}{4}\right\}$, 且 $P \cap Q = Q$, 求实数 m 的取值范围.

【解前点津】　P、Q 均为圆内点集, 前者包括边界, 后者不含边界.

【规范解答】　点集 P 表示平面上 $O_1(-2, 3)$ 为圆心, 2 为半径的圆所围成的区域, 且包括边界圆周.

点集 Q 表示平面上以 $O_2(-1, m)$ 为圆心, $\frac{1}{2}$为半径的圆的内部.

要使 $P\cap Q=Q$，应$\odot O_2$内含于$\odot O_1$，故有：

$|O_1O_2|^2\leq(R_1-R_2)^2$，

即$(-1+2)^2+(m-3)^2\leq\left(2-\frac{1}{2}\right)^2$，解之得 $3-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq m\leq 3+\frac{\sqrt{5}}{2}$.

【解后归纳】 熟悉用集合语言表述的问题，利用数形结合方法解题.

对应训练

一、基础夯实

1. 以下对象的全体，能构成集合的是 (　　)
   A. 某百货商场好看的花布
   B. 副食品商店好吃的食品
   C. 比哥哥大同时比弟弟小的人
   D. 受人喜爱的歌星
2. 以下表示集合的方法，正确的是 (　　)
   A. $x^2-6x+9=0$ 的根为$\{3,3\}$
   B. {等腰三角形，等边三角形，直角三角形}
   C. {矩形，菱形，正方形}
   D. {方程 $x^2+4=0$ 的解集，$x\in R$}
3. 以下集合 P 与 Q，属于不同集合的是 (　　)
   A. $P=\{1,2,3,4,5\}$　$Q=\{5,4,3,2,1\}$
   B. $P=\{1,2,3,4,5\}$　Q={不大于 5 的自然数}
   C. $P=\{1,2\}$　$Q=\{x|x^2-3x+2=0\}$
   D. $P=\{1,-1\}$　$Q=\{x|x=(-1)^n,n\in N\}$
4. 表示元素与集合的关系，以下不正确的是 (　　)
   A. $\sqrt{2}\notin Q$　B. $\sqrt{4}\in Z$
   C. $\frac{1}{x}\notin R$　D. $\sqrt{x^2}\in Q$
5. 在集合 $A=\{1,a^2-a-1,a^2-2a+2\}$中，a 的值可以是 (　　)
   A. 0　B. 1　C. 2　D. 1 或 2
6. 以下集合，有且仅有三个元素的是 (　　)
   A. 由 1，2，3 所组成的没有重复数字的自然数
   B. 中国国旗图案上的颜色
   C. 20 以内能被 5 整除的自然数
   D. 一已知三角形中三边的长度
7. 以下集合中，元素恰为 2 个的集合是 (　　)
   A. $\{x|x^2-3x+2=0\}$　B. $\{x^2-3x+2=0\}$
   C. $\{x^2-3x+2\}$　D. $\{x^2-3x+2>0\}$
8. 方程组$\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}$的解的集合是 (　　)
   A. $\{x=1,y=2\}$　B. $\{1,2\}$
   C. $\{(x,y)|x=1$ 或 $y=2\}$　D. $\{(1,2)\}$
9. 以下命题中的假命题是 (　　)
   A. 梯形属于平行四边形集合
   B. 正方形属于矩形集合
   C. 正三角形属于等腰三角形集合
   D. 菱形属于多边形集合
10. 平面上到两定点距离之比等于 1 的点的集合是 (　　)
    A. 一条直线　B. 一条射线
    C. 一个圆　D. 一条圆弧

二、思维激活

11. 设集合 $P=\{(x,y)|x=3m-1,m\in Z,y=3n+1,m\in Z\}$，用适当的符号表示如下元素与集合 P 之间的关系$(1,3)$ ________ P，$(-1,3)$ ________ P，$(2000,2005)$ ________ P，$(2005,2000)$ ________ P.
12. 用描述法表示{北京，天津，上海，重庆}________.
13. 用数对(a,b)的集合表示方程 $x+y=10$ 的一切正整数解________.
14. 用描述法表示{1 分，2 分，5 分，1 角，2 角，5 角，1 元，2 元，5 元，10 元，20 元，50 元，100 元}________.

三、能力提高

15. 用列举法表示：
    (1) 20 以内的质数；
    (2) 立方后等于本身的实数；
    (3) 不等式$\{-1<2x+3\leq5\}$的整数解.
16. 用描述法表示：
    (1) $\{0,1,2,3,4\}$；
    (2) $\{3,6,9,12,\cdots,96,99\}$；
    (3) $\{1,2,11,22,12,21\}$.
17. 画出符合以下特征的图形.
    (1) 空间中到定点距离为 1 cm 的所有点的集合；
    (2) 空间中到两定点距离相等的所有点的集合.
18. 如果 $A=\{3,4,5\}$，$B=\{a^2-1,a^2,a^2+1\}$表示同一个集合，求 a 值.

第 2 课　集合的子、交、并、补

考试目标

1. 子集：若集合 A 的＿　元素都是集合 B 的元素，则集合 A 是集合 B 的子集.

2. 真子集与集的相等.

若 A＿B 且 B＿A，则称 A 是 B 的真子集. 若 A、B 同时满足A＿B 且 B＿A，则称集合 A 等于集合 B.

3. 补集$\complement_S A$ = {x|x　A 且 x∈S}

4. 交集与并集.

A∩B = {x|x∈A 且 x∈B}

A∪B = {x|x∈A 或 x∈B}

题型示例

【例 1】　设集合 $A=\{x|2^{x^2-3x+2}=1\}$，$B=\{x|(x-a)(x^2-1)=0\}$，当 a 分别为何值时，

(1) A　B;

(2) A∩B = {1};

(3) A∪B = {0, -1, 1, 2};

(4) $\complement_R B=\{x|x^2\neq 1, 0\}$.

【解前点津】　化简确定集合 A、B，便一目了然.

【规范解答】　易得 A = {1, 2}，B = {-1, 1, a}.

(1) ∵a∈B，∴a = 2 时，A　B.

(2) ∵2 |　B，∴a ≠ 2 时，a ∩ B = {1}.

(3) a = 0 时，A∪B = {0, -1, 1, 2}.

(4) a = 0 时，$\complement_R B=\{x|x^2\neq 1, 0\}$.

【解后归纳】　有关集合的子、交、并、补等计算，化简或确定集合，或借助数轴等图形，是必须掌握的一项基本功.

【例 2】　设 $A=\{x|x^2+mx+1=0, x\in R\}$，B = {y|y < 0}，若 A∩B = 　，求实数 m 的取值范围.

【解前点津】　由条件 A∩B = 　可推断 A = 　或 $A=\{x|x^2+mx+1=0, x\geq 0\}\neq$ 　.

【规范解答】　当 A = 　时，由 $\Delta=m^2-4<0$ 得 $-2<m<2$. 当 A≠　时，则方程 $x^2+mx+1=0$ 没有负实根. 设其根为 x_1、x_2，因 x≠0，

故由$\begin{cases}x_1+x_2=-m>0\\ \Delta\geq 0\end{cases}$　得 m≤ -2.

综上所述得 (-2, 2) ∪ (-∞, -2] = (-∞, 2) 为 m 的取值范围.

【解后归纳】　本题综合应用了集合的交，方程中根与系数的关系及“分类讨论”的思想方法.

【例 3】　将函数 $f(x)=x^2-ax$，x∈[0, 1] 的最小值记成 A，函数 g(x) = x + a，x∈[0, 1] 的最小值构成的集合记为 B，求 A∪B.

【解前点津】　分别确定一次函数，二次函数在闭区间上的最小值是关键所在.

【规范解答】　∵x∈[0, 1]，∴(x + a)∈[a, 1 + a]，∴B = {a}，

又 $f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$，欲求其最小值，要分 $\frac{a}{2}\in(-\infty, 0)$，$\frac{a}{2}\in[0, 1]$，$\frac{a}{2}\in(1, +\infty)$ 三种情况.

当 $\frac{a}{2}<0$，即 a < 0 时，f(x) 的最小值为 f(0) = 0;

当 $0\leq\frac{a}{2}\leq 1$，即 0 ≤ a ≤ 2 时，f(x) 的最小值为 $f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}$;

当 $\frac{a}{2}>1$，即 a > 2 时，f(x) 的最小值为 f(1) = 1 - a，故

$$A=\begin{cases}\{0\} & (a<0)\\ \left\{-\frac{a^2}{4}\right\} & (0\leq a\leq 2)\\ \{1-a\} & (a>2)\end{cases},$$

综上所述可知：当 a < 0 时，A∪B = {0} ∪ {a} = {0, a}；当 0 < a ≤ 2 时，$A\cup B=\left\{-\frac{a^2}{4}\right\}\cup\{a\}=\left\{-\frac{a^2}{4}, a\right\}$;

当 a > 2 时，A∪B = {1 - a} ∪ {a} = {1 - a, a}.

【解后归纳】　二次函数在闭区间上的最值，常依对称轴所处的位置而定.

【例 4】　设 $A=\{y|y^2-3y+2\leq 0\}$，$B=\{x|x^2-4ax+(3a^2-2a-1)\leq 0\}$

(1) 若 A　B，求 a 的取值范围;

(2) 是否存在 a 值，使 B　A?

【解前点津】　确定集合，集 B，利用“数轴”进行运算.

【规范解答】　由条件知：A = [1, 2]，B = [a - 1, 3a + 1].

(1) ∵A　B，∴a - 1≤1 < 2≤3a + 1.

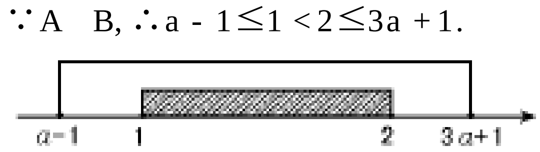

图 1-2-1

故由$\begin{cases} a-1\le 1\\ 3a+1\ge 2\end{cases}$ $\frac{1}{3}\le a\le 2$.

(2) 若 B A, 则 $1\le a-1\le 3a+1\le 2$.

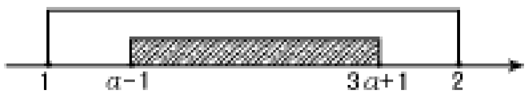

图 1-2-2

故由$\begin{cases} a-1\ge 1\\ 3a+1\ge a-1\\ 3a+1\le 2\end{cases}$ $\begin{cases} a\ge 1\\ a\ge -1\\ a\le \frac{1}{3}\end{cases}$ 无解.

因而, 不存在这样的 a 值, 使 B A.

【解后归纳】 通过两个集合在数轴上的位置关系可确定 a 满足的条件.

对应训练

一、基础夯实

1. 设全集 $I=\{1,3,5,7,9\}$, 集合 $A=\{1,|a-5|,9\}$, $\complement_I A=\{5,7\}$, 则 a 的值是 ( )
A. 2 B. 8 C. -2 或 8 D. 2 或 8

2. 已知集合 $M=\{x|x^2-x>0\}$, $N=\{x|x\ge 1\}$, 则 $M\cap N$ = ( )
A. $[1,+\infty)$ B. $(1,+\infty)$
C. D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

3. 设全集 $I=\left\{-2,-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\right\}$, $A=\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,2,3\right\}$, $B=\{-2,2\}$, 则集合 $\{-2\}$ 等于 ( )
A. $\complement_I A\cap B$ B. $A\cap B$
C. $\complement_I A\cap\complement_I B$ D. $A\cup\complement_I B$

4. 设集合 $M=\{x|x-m\le 0\}$, $N=\{g|g=(x-1)^2-1, x\in R\}$. 若 $M\cap N=$, 则实数 m 的取值范围是 ( )
A. $[-1,+\infty)$ B. $(-1,+\infty)$
C. $(-\infty,-1]$ D. $(-\infty,-1)$

5. 已知集合 $A=\{-1,2\}$, $B=\{x|mx+1=0\}$, 若 $A\cup B=A$, 则实数 m 的取值范围是 ( )
A. $\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$
C. $\left\{-1,0,\frac{1}{2}\right\}$ D. $\left\{-\frac{1}{2},0,1\right\}$

6. 如图 1-2-3, U 是全集, M、N、S 是 U 的子集, 则图中阴影部分所示的集合是 ( ) 1-2-3
A. $(\complement_U M\cap\complement_U N)\cap S$
B. $(\complement_U(M\cap N))\cap S$
C. $(\complement_U N\cap S)\cup M$
D. $(\complement_U M\cap S)\cup N$

7. 集合 $A=[2,+\infty)$, $B=(-\infty,a)$ $A\cap B=$, 则 a 的取值范围是 ( )
A. $(-\infty,2)$ B. $(-\infty,2]$
C. $(2,+\infty)$ D. $[2,+\infty)$

8. 满足 $A\cup B=\{a,b\}$ 的集合 A、B 的组数是 ( )
A. 4 组 B. 6 组 C. 7 组 D. 9 组

9. 定义 $M-N=\{x|x\in M$ 且 $x|$ $N\}$. 若 $M=\{1,3,5,7,9\}$, $N=\{2,3,5\}$, 则 $M-N=$ ( )
A. M B. N C. $\{2\}$ D. $\{1,7,9\}$

10. 已知集合 M、N 满足: $M=\{x|2^{x^2-5x+4}=1\}$, $M\cap N=\{x|\lg(2-x)=\lg(x^2-4x+4)\}$, 则集合 N 可能是 ( )
A. $\{1,4\}$ B. $\{1,2\}$
C. $\{2,4\}$ D. $\{1,2,4\}$

二、思维激活

11. 已知非空集合 M 满足: M $\{1,2,3,4,5\}$ 且若 $x\in M$, 则 $6-x\in M$, 则满足条件的集合 M 有________________个.

12. 以下关系正确的是____________.
① ∈{ }且 { } ②0 { }且 { }
③0{0}且 ={ } ④ ∈{0}且 0∈{ }

13. 设全集 $S=\{x\in N^*\ |x\le 10\}$, A = {不大于 10 的质数}, B = {6 的正约数}, 则 $\complement_S(A\cup B)$ = ________________.

14. 设 $S=\{2,4,1-a\}$, $A=\{2,a^2-a+2\}$, 若 $\complement_S A=\{-1\}$, 则 a = ________.

三、能力提高

15. 若 $A=\{x|x=6a+8b, a,b\in Z\}$, $B=\{x|x=2m, m\in Z\}$, 求证: A = B.

16. 已知全集 $S=\{1,3,x^3+3x^2+2x\}$, $A=\{1,|2x-1|\}$, 如果 $\complement_S A=\{0\}$, 则这样的实数 x 是否存在? 若存在, 求出 x, 若不存在, 说明理由.

17. 已知非空集合 $A=\{(x,y)|(a^2-1)x+(a-1)g=15\}$, $B=\{(x,y)|y=(5-3a)x-2a\}$, 若 $A\cap B=$, 求实数 a 的值.

18. 已知集合 $A=\{-1,1\}$, $B=\{x|x^2-2ax+b=0\}$, 若 $B\neq$, 且 $A\cup B=A$, 求 a、b 值.

第 3 课 含绝对值的不等式

考试目标

1. 基本类型($c>0$).

不等式$|x|<c$与不等式$-c<x<c$等价;

不等式$|ax+b|<c$与不等式$-c<ax+b<c$等价;

不等式$|x|>c$与不等式$x>c$或$x<-c$等价;

不等式$|ax+b|>c$与不等式$ax+b>c$或$ax+b<-c$等价.

2. 分式不等式.

分式不等式$\dfrac{x+a}{x+b}>0$与整式不等式$(x+a)(x+b)>0$等价;

分式不等式$\dfrac{x+a}{x+b}\leq 0$与整式不等式组$\begin{cases}(x+a)(x+b)\leq 0\\ x+b\neq 0\end{cases}$等价.

题型示例

【例 1】 解不等式$|x-5|-|2x+3|<1$.

【解前点津】 利用数轴, 分段讨论, 从而去掉绝对值符号.

【规范解答】 分别由$x-5=0$及$2x+3=0$可知零点为$x=5$或$x=-\dfrac{2}{3}$.

当$x\in\left(-\infty,-\dfrac{2}{3}\right]$时, 原不等式为

$(5-x)+(2x+3)<1$, 解之得$x<-7$.

故由$\begin{cases}x\leq -\dfrac{2}{3}\\ x<-7\end{cases}$得$x<-7$.

当$x\in\left(-\dfrac{2}{3},5\right]$时, 原不等式为

$(5-x)-(2x+3)<1$, 解之得$x>\dfrac{1}{3}$.

故由$\begin{cases}-\dfrac{2}{3}<x\leq 5\\ x>\dfrac{1}{3}\end{cases}$得$\dfrac{1}{3}<x\leq 5$.

当$x\in(5,+\infty)$时, 原不等式为

$(x-5)-(2x+3)<1$, 解之得$x>-9$.

故由$\begin{cases}x>5\\ x>-9\end{cases}$得$x>5$.

综上所知: $(-\infty,-7)\cup\left(\dfrac{1}{3},5\right]\cup(5,+\infty)=(-\infty,-7)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$为所求解集.

【解后归纳】 找"零点", 确定分类标准, 体现了"逻辑划分"的重要数学思想.

【例 2】 设$A=\{x||2x-1|>1\}$, $B=\{y||2y-a|\leq 1\}$且$A\cap B=$, $A\cup B=R$, 求实数 a 的值.

【解前点津】 先化简集合, 再利用数轴进行集合运算.

【规范解答】 解: $A=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, $B=\left[\dfrac{a-1}{2},\dfrac{a+1}{2}\right]$

$\because A\cap B=$, $A\cup B=R$, $\therefore$从图形看出

$\begin{cases}\dfrac{a-1}{2}=0\\ \dfrac{a+1}{2}=1\end{cases}$ $a=1$.

【解后归纳】 数形结合, 是获得"a 满足上述方程组"这一条件的重要途径.

【例 3】 设$0\leq a\leq 1$, 若满足不等式:

$|x-a|<b$的一切实数 x 边满足不等式: $|x-a^2|<\dfrac{13}{2}$, 求正实数 b 的取值范围.

【解前点津】 利用集合观点, 易知

$\{x||x-a|<b\}$ $\left\{x\,\middle|\,|x-a^2|<\dfrac{13}{2}\right\}$.

【规范解答】 由条件可知

$\{x||x-a|<b\}$ $\left\{x\,\middle|\,|x-a^2|<\dfrac{13}{2}\right\}$,

即$(a-b,a+b)$ $\left(a^2-\dfrac{13}{2},a^2+\dfrac{13}{2}\right)$.

如图 1-3-1 所示:

1-3-1

故由$\begin{cases}a-b\geq a^2-\dfrac{13}{2}\\ a^2+\dfrac{13}{2}\geq a+b\end{cases}$ $\begin{cases}b\leq a-a^2+\dfrac{13}{2}\\ b\leq a^2-a+\dfrac{13}{2}\end{cases}$.

$\because 0\leq a\leq 1$, $\therefore\left(a-a^2+\dfrac{13}{2}\right)-\left(a^2-a+\dfrac{13}{2}\right)=2a(1-a)\geq 0$. $\therefore a-a^2+\dfrac{13}{2}\geq a^2-a+\dfrac{13}{2}$.

$\therefore 0<b\leq a^2-a+\dfrac{13}{2}$.

【解后归纳】 求含参不等式组的解,要综合利用"数形结合","比较法"等手段.

【例 4】 求使不等式

$\left|\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}\right|<3$ 恒成立的实数 m 值.

【解前点津】 将含有绝对值的不等式转化为不含绝对值的整式不等式(组).

【规范解答】 由原式不等式得:

$-3<\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3.$

$\because x^2+x+1>0$ 恒成立,$\therefore$ 可继续化为:

$$\begin{cases} x^2-mx+1<3(x^2+x+1) \\ x^2-mx+1>-3(x^2+x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+(m+3)x+2>0 & ① \\ 4x^2+(3-m)x+4>0 & ② \end{cases}$$

由①恒成立知: $\Delta_1=(m+3)^2-4\times2\times2<0$,

即 $-7<m<1$.

由②恒成立知: $\Delta_2=(3-m)^2-4^3<0$,

即 $-5<m<11$.

故 $(-7,1)\cap(-5,11)=(-5,1)$ 为 m 的取值范围.

【解后归纳】 等价转化,利用判别式,寻求 m 满足的条件是"常规方法".

对应训练

一、基础夯实

1. 不等式 $|ax+1|<1$ 的解集为 ( )

A. $\left(-\frac{2}{a},0\right)$

B. $\left(0,-\frac{2}{a}\right)$

C. $\left(-\frac{2}{a},0\right)\cup\left(0,-\frac{2}{a}\right)$

D. 以上都不是

2. 以下推断正确的是 ( )

A. $|5-3x|<1 \quad |3x-5|>1$

B. $|x+3|>a \quad x+3>a$

C. $3<|x-1|\leq4 \quad 3<x-1\leq4$ 或 $-4\leq x-1<-3$

D. $(x+1)^2>3 \quad x+1>\sqrt{3}$

3. 以下说法正确的是 ( )

A. 不等式 $|x|<a$ 的解集为 $(-a,a)$

B. 不等式 $|x|<a$ 的解集表示数轴上到原点的距离小于 a 的点的集合

C. $|x|\leq a^2$ 的解集非空

D. $1-|x|\geq a^2$ 的解集是空集

4. 当 $|x-1|<a$ 时,不等式 $|x^2-3|<6$ 成立,则正数 a 的取值范围是 ( )

A. $[1,2]$ B. $[2,4]$ C. $(0,1]$ D. $(0,1)$

5. $(1-|x|)(1+x)>0$ 的解集为 ( )

A. $\{x||x|<1\}$ B. $\{x|x<1\}$

C. $\{x||x|>1\}$ D. $\{x|x<1$ 且 $x\neq-1\}$

6. 若不等式 $|x-3|+|x-4|<m$ 的解集为空集,则实数 m 的取值范围是 ( )

A. $m<1$ B. $m\leq1$

C. $m\leq\frac{1}{10}$ D. $m<\frac{1}{10}$

7. 若 $a>0,b>0$,则 $-b<\frac{1}{x}<a$ 等价于 ( )

A. $-\frac{1}{b}<0$ 或 $0<x<\frac{1}{a}$

B. $-\frac{1}{a}<x<0$ 或 $0<x<\frac{1}{b}$

C. $x<-\frac{1}{b}$ 或 $x>\frac{1}{a}$

D. $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

8. 设 $f(x)=2^{|x|}$ 且 $f(a)<f(b)$,则下列关系正确的是 ( )

A. $a<b$ B. $a>b$

C. $0\leq a<b$ D. $0\leq b<a$

9. 设函数 $f(x)=|x+1|+|x+2|-\frac{1}{2}$,则下列结论正确的是 ( )

A. f(x) 的图像与直线 $y=2$ 无交点

B. f(x) 的图像与直线 $y=1$ 无交点

C. f(x) 的图像与直线 $y=0$ 无交点

D. f(x) 的图像与直线 $y=-1$ 有交点

10. 分式不等式 $\frac{x-1}{x-a}<0$ 的解集为 ( )

A. $(1,a)$ B. $(a,1)$

C. $(1,a)$ 或 $(a,1)$ D. 以上都不是

二、思维激活

11. 不等式 $\left|\frac{1}{x}\right|\geq3$ 的解集是________.

12. 设 $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$,则不等式 $|g^{-1}(x)|<1$ 的解集是________.

13. 当 $m>0$ 时,不等式 $\sqrt{x^2+2mx+2m^2}\leq m$ 的解集是________.

14. 函数 $f(x)=|x|+|x-1|-2$ 与 x 轴交点的横坐标是________.

三、能力提高

15. 解不等式 $\sqrt{|\log_2 x|-1}+\frac{1}{2}\left|\log_{\frac{1}{2}}x^3\right|-2>0$.

16. 已知 $\alpha, \beta \in R$, 给出下列三个论断: ① $|\alpha-\beta| \leq |\alpha+\beta|$; ② $|\alpha+\beta|>5$; ③ $|\alpha|>2\sqrt{2}$, $|\beta|>2\sqrt{2}$.
以其中的两个论断为条件, 另一个论断为结论, 写出你认为正确的命题, 并给予证明.

17. 若适合不等式 $|x^2-4x+p|+|x-3| \leq 5$ 的 x 的最大值为 3, 求 p 值.

18. 已知图 1-3-2(1) 中的图像对应的函数为 $y=f(x)$, 求图 1-3-2(2) 中的图像对应的函数解析式.

1-3-2

第 4 课　一元二次不等式

考试目标

1. $a>0$ 型不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解. 若 $\Delta>0$, 其解集为 $\left(-\infty, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cup \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, +\infty\right)$.

若 $\Delta<0$, 其解集为 R.

若 $\Delta=0$, 其解集为 $\left\{x \mid x \neq \frac{-b}{2a}\right\}$.

2. $a<0$ 型不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解, 当 $\Delta>0$ 时, 其解集为 $\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$.

当 $\Delta=0$, 其解集为__.

当 $\Delta<0$, 其解集为__.

3. 化分式不等式为整式不等式(组), 分式不等式 $\frac{x+a}{x+b}>0$ 与一元二次不等式 $(x+a)(x+b)>0$ 解集相同.

分式不等式 $\frac{x+a}{x+b}<0$ 与整式不等式 $(x+a)(x+b)<0$ 解集相同.

题型示例

【例 1】　不等式 $\frac{ax}{x-1}<1$ 的解集为 $\{x \mid x<1$ 或 $x>2\}$, 求实数 a 的值.

【解前点津】　化分式不等式为整式不等式.

【规范解答】　化原不等式为

$\frac{(1-a)x-1}{x-1}>0$, 它与整式不等式 $(x-1)[(1-a)x-1]>0$ 等价, 由条件知: 方程 $(1-a)x-1=0$ 的根为 2.

$\therefore (1-a)2-1=0 \quad a=\frac{1}{2}$.

【解后归纳】　将不等式的求解转化为求方程的根, 是解题的关键所在.

【例 2】　已知集合 $A=\{x \mid |x-a|<1\}$, $B=\{x \mid x^2-(a+3)x+3a>0\}$, 若 $A \cup B=R$, 求实数 a 的取值范围.

【解前点津】　不等式 $x^2-(a+3)x+3a>0$, 可分解为 $(x-3)(x-a)>0$, 讨论 a 与 3 的三种大小关系可确定集合 B.

【规范解答】　由 $|x-a|<1$, 得 $A=(a-1, a+1)$, 由 $x^2-(a+3)x+3a>0$ 得 $(x-3)(x-a)>0$.

当 $a>3$ 时, $B=(-\infty, 3) \cup (a, +\infty)$, 要使 $A \cup B=R$, 当且仅当

$\begin{cases} a-1<3 \\ a>3 \end{cases} \quad 3<a<4$.

当 $a=3$ 时, $B=(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$, $A=(2, 4)$, 满足 $A \cup B=R$.

当 $a<3$ 时, $B=(-\infty, a) \cup (3, +\infty)$, 要使 $A \cup B=R$, 当且仅当

$\begin{cases} a<3 \\ a-1<a \\ a+1>3 \end{cases} \quad 2<a<3$.

综上所述可知: $(3, 4) \cup \{3\} \cup (2, 3) = (2, 4)$ 为 a 的取值范围.

【解后归纳】　通过分类讨论, 确定集合 B, 利用数形结合, 即可确定 a 的取值范围.

【例 3】　已知关于 x 的不等式 $(m-2)x^2-mx-1 \geq 0$ 的解集为 $[x_1, x_2]$ 且 $1 \leq |x_1-x_2| \leq 3$, 求实数 m 的取值范围.

【解前点津】　a 应满足三个条件:

① $m-2<0$, 保证抛物线 $y=(m-2)x^2-mx-1$ 开口向下;

② 其判别式 $\Delta \geq 0$;

③ $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

【规范解答】　令 $y=(m-2)x^2-mx-1$,

则由 $\begin{cases} m-2<0 \\ \Delta \geq 0 \\ 1 \leq |x_1-x_2| \leq 3 \end{cases}$

$$\begin{cases} m<2 \\ m^2+4(m-2)\geq 0 \\ 1\leq \dfrac{\sqrt{m^2+4(m-2)}}{|m-2|}\leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m<2 \\ m\geq 2\sqrt{3}-2 \text{ 或 } m\leq -2-2\sqrt{3} \\ m\geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$\frac{3}{2}\leq m<2.$

【解后归纳】 通过二次函数的图像特点，寻找 m 的满足的充要条件，是数学中"等价转化"思想的体现.

【例 4】 若当 $1<x\leq 2$ 时，不等式 $x^2-2ax+a<0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解前点津】 通过二次函数 $y=x^2-2ax+a$ 的图像特点，可寻找参数 a 满足的条件.

1-4-1

【规范解答】 令 $y=x^2-2ax+a$. 因首项系数为正，故抛物线开口向上. 由条件知

$$\begin{cases} x=1 \text{ 时}, y\leq 0 \\ x=2 \text{ 时}, y<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-a\leq 0 \\ 4-3a<0 \end{cases},$$

解之得 $a>\frac{4}{3}$.

【解后归纳】 数形结合，寻找 a 满足的条件，是数学中的"常规方法".

对应训练

一、基础夯实

1. 不等式 $9x^2+6x+1\leq 0$ 的解集为(　　)

A. $\left\{x \mid x\neq -\frac{1}{3}\right\}$　　B.

C. R　　D. $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

2. 不等式 $\frac{2x+1}{2x-1}\leq 0$ 的解集为(　　)

A. $\left\{x \mid -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{x \mid x\leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x\geq \frac{1}{2}\right\}$

C. $\left\{x \mid -\frac{1}{2}\leq x<\frac{1}{2}\right\}$

D. $\left\{x \mid x\leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x>\frac{1}{2}\right\}$

3. 不等式 $|x^2-5x+6|<x^2-4$ 的解集为　　(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$　　D. $\left(\frac{4}{5},2\right)$

4. 不等式 $-3\leq 4x-4x^2\leq 0$ 的解集为　　(　　)

A. $\left\{x \mid x\leq -\frac{1}{2} \text{ 或 } x\geq \frac{3}{2}\right\}$

B. $\left\{x \mid -\frac{1}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}\right\}$

C. $\{x \mid x\leq 0 \text{ 或 } x\geq 1\}$

D. $\left\{x \mid -\frac{1}{2}\leq x\leq 0 \text{ 或 } 1\leq x\leq \frac{3}{2}\right\}$

5. 已知集合 $M=\{x \mid x^2-2x-3\leq 0\}$, $P=\{x \mid |x|<a\}$，若 P　M，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(0,1]$　　B. $(-\infty,1]$

C. $(-1,3]$　　D. $(-\infty,1)$

6. 设集合 $A=\{x \mid x<1\}$, $B=\{x \mid (x-a)(x-2)\leq 0\}$，且 $A\cup B=\{x \mid x\leq 2\}$，则 a 的取值范围是　　(　　)

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

7. 设 x_1、x_2 是关于 x 的二次方程 $x^2-2kx+1-k^2=0$ 的两个实根，k 为实数，则 $x_1^2+x_2^2$ 的最值为　　(　　)

A. -2　　B. 0　　C. 1　　D. 2

8. 已知不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解为 $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}$，则 $a+b$ 等于　　(　　)

A. -14　　B. -10　　C. 1　　D. 10

9. 若关于 x 的不等式 $8x^4+8(a-2)x^2-a+5>0$ 的解集为 R，则实数 a 的取值范围是　　(　　)

A. $\left[\frac{1}{2},5\right]$　　B. $(-\infty,5)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(2,5)$

10. 关于 x 的不等式 $\frac{x+a}{x^2+4x+3}>0$ 的解集为 $\{x \mid -3<x<-1 \text{ 或 } x>2\}$，则 a 的值为　　(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. -2　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 2

二、思维激活

11. 已知全集 $U=R$, $A=\left\{x \mid \frac{x-1}{4}\in Z\right\}$, $B=\{x \mid x^2-17x+16>0\}$，则 $A\cap \complement_U B=$________.

12. 已知 $A=\left\{x \,\middle|\, \frac{x^2+6x+9}{2(x-1)}>0\right\}$, $B=\left\{x \,\middle|\, \frac{x^2+2x+1}{x+3}<0\right\}$，设全集 $U=R$，则 $A\cap \complement_U B=$________，$B\cup \complement_U A=$________.

13. 不等式 $ax^2+(ab-1)x+b>0$ 的解集为 $(1,2)$，则 $a+b=$________.

三、能力提高

14. 若不等式 $2x-1>m(x^2-1)$ 对满足 $|m|\leq 2$ 的所有 m 都成立，解关于 x 的不等式.

15. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ 2x^2+(2k+5)x+5k<0 \end{cases}$ 的整

数解的集合为{ - 2}, 求实数 k 的取值范围.

16. 已知 $A=(a, +\infty)$, $B=\{x|x^2-2ax-3a^2<0\}$, 求 $A\cap B$ 及 $A\cup B$.

17. 设 $A=\{x|\log_x(5x^2-8x+3)>2\}$, $B=\{x|x^2-2x-a^4+1\geq 0\}$, 已知 A　B, 试确定 a 的取值范围.

第 5 课　逻辑联结词

考试目标

1. 基本概念: 可以判断 __假__ 语句叫命题; 称 "_或_", "_且_"为逻辑联结词; 不含 __辑联结词的命题__ 做简单命题; 由简单命题与逻辑联结词构成的命题, 叫做 __合__ 题.

2. 填写"真值表".

p	q	非 p	p 且 q	p 或 q
真	真	(假)	(真)	(真)
真	假	(假)	(假)	(真)
假	真	(真)	(假)	(真)
假	假	(真)	(假)	(假)

题型示例

【例 1】 分别指出下列复合命题的形式及构成它的简单命题:

(1) 抛物线没有渐近线;

(2) 728 既能被 7 整除, 又能被 8 整除;

(3) 张小莉参加数学课外活动小组, 或参加英语课外活动小组.

【解前点津】 (1) 为否定句, (2) 两者"同时满足", (3) 含有逻辑联结词"或".

【规范解答】 (1) 这个命题是非 p 的形式, 其中 p: 抛物线有渐近线.

(2) 这个命题是"p 且 q"的形式, 其中, p: 728 能被 7 整除, q: 728 能被 8 整除.

(3) 这个命题是:"p 或 q"的形式, 其中 p: 张小莉参加数学课外活动小组; q: 张小莉参加英语课外活动小组.

【解后归纳】 有些命题, 没有明显的"或"、"且"、"非"这些逻辑联结词, 需要"具体分析其内在含意", 方能判断.

【例 2】 命题"$\sqrt{10}\geq\pi$"是由哪两个 p 与 q 构成的什么形式的复合命题? 判定此命题的真假.

【解前点津】 原命题可叙述为:"$\sqrt{10}$大于 π或$\sqrt{10}$等于 π".

【规范解答】 这是一个"p 或 q"形式的复合命题, 其中, p: $\sqrt{10}>\pi$; q: $\sqrt{10}=\pi$. 因 p 真 q 假, 故它是真命题.

【解后归纳】 若"p 真 q 假", 那么"p 或 q"为真, "p 且 q"为假.

【例 3】 分别指出由下列各组命题构成的"p 或 q", "p 且 q", "非 p"命题的真假.

(1) p: 正多边形有一个内切圆; q: 正多边形有一个外接圆.

(2) p: 线段中垂线上的点到线段的两端点等距离; q: 角平分线上的点到角两边距离不相等.

(3) p: $1\in\{2, 3\}$; q: {矩形} ∩ {菱形} = {正方形}.

(4) p: 正六边形的对角线都相等; q: 凡是偶数都是 4 的倍数.

【解前点津】 先分别判断 p、q 的真假, 然后利用"真值表"回答.

【规范解答】 (1) ∵p 真 q 真, ∴"p 或 q"为真, "p 且 q"为真, "非 p"为假.

(2) ∵p 真 q 假, ∴"p 或 q"为真, "p 且 q"为假, "非 p"为假.

(3) ∵p 假 q 假, ∴"p 或 q"为假, "p 且 q"为假, "非 p"为真.

【解后归纳】 准确判断简单命题的真假, 是判断复合命题真假的关键.

【例 4】 对于命题"△ABC 是直角三角形或等腰三角形".

(1) 指出它是哪种形式的复合命题, 并说明构成它的简单命题.

(2) 写出上述复合命题的否定.

【解前点津】"p 或 q"的否定形式为"非 p"且"非 q".

【规范解答】 (1)这是一个"p或q"形式的复合命题,其中,p:△ABC是直角三角形;q:△ABC是等腰三角形.

(2)其否定形式是:"△ABC既不是直角三角形又不是等腰三角形".

【解后归纳】 一般地,"p或q"的否定形式是" p且 q";"p且q"的否定形式是" p或 q".

对应训练

一、基础夯实

1. 已知下列语句:

①平行四边形不是矩形;②π是无理数;③方程 $9x^2=\log_a a(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的解是 $x=\pm\frac{1}{3}$;④$3m>m$.

其中简单命题的个数是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. 命题"1997 年 7 月 1 日是中国共产党的生日,又是香港回归祖国的日子"是 ( )

A. 简单命题 B. 非 p 形式的命题

C. p 或 q 形式的命题 D. p 且 q 形式的命题

3. 下列语句不是命题的是 ( )

A. 失败乃成功之母 B. 落后必挨打

C. 向孔繁森学习 D. 世上无难事

4. "$a^2+b^2\neq 0$"的含义是 ( )

A. a,b 全不为 0

B. a,b 不全为 0

C. a,b 至少有一个为 0

D. a 不为 0 且 b 为 0,或 b 不为 0 且 a 为 0

5. "$(a+b)(b+c)(c+a)=0$"的含义是 ( )

A. a、b、c 两两互为相反数

B. a、b、c 中至少有一对互为相反数

C. a、b、c 中有两个为 0

D. a、b、c 中至少有一个不为 0

6. "$x^2\leq 0$"的含义是 ( )

A. $x=0$ 且 $x<0$ B. $x\in$

C. $x=0$ D. $x\in R$

7. 以下说法正确的是 ( )

A. "$P\cup Q$"的含义是:"对任意 $x\in P\cup Q$,都有 $x\in P$ 且 $x\in Q$"

B. "P Q"的含义是:"对任意 $x\in Q$,都有 $x\in P$"

C. "$P\cap \complement_S Q$(S 为全集)"的含义是:对任意 $x\in P\cap\complement_S Q$,都有 $x\in P$ 且 x| Q

D. $\complement_S P$ Q(S 为全集)的含义是对任意 $x\in Q$,都有 x | P

8. 以下命题正确的是 ( )

A. 如果 $a+b>0$,那么 a 和 b 中至少有一个大于 0

B. 如果 $ab=0$,那么 $a^2+b^2=0$

C. 如果 $ab=a$,那么 $b=1$

D. 如果 $a^2=b^2$,那么 $a=b$

9. 以下命题错误的是 ( )

A. 如果关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 R,那么必有 $a<0$ 和 $\Delta<0$

B. 如果关于 x 的不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ 的解集为 ,那么必有 $a>0$ 和 $\Delta>0$

C. 如果关于 x 的不等式 $|x+b|\leq a$ 的解集是单元素集,那么 a 必为 0

D. 如果关于 x 的不等式 $|ax+b|>c$ 的解集为 R,那么必有 $c<0$ 且 $a\neq 0$ 或 $c=0$ 且 $a=0$

10. 已知命题"非空集合 M 中的元素都是集合 P 中的元素"是假命题,那么命题:

①M 中的元素都不是 P 的元素;

②M 中有不属于 P 的元素;

③M 中有 P 的元素;

④M 中元素不都是 P 中的元素,

其中真命题有 ( )

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

二、思维激活

11. 已知 p 命题:"a 是 b 的倍数";q 命题:"b 是 c 的倍数",则写成"p 或 q"形式的复合命题为________;写成"p 且 q"的复合命题为________.

12. 如果 p 是真命题,q 是假命题,则"p 或 q"命题为________命题,"p 且 q"命题为________命题.

13. 命题"方程 $\frac{3x-2}{3x-2}=1$ 没有实数根"是________形式的复合命题,用真值表判断,它是________命题.

三、能力提高

14. 分别指出由下列命题构成的"p 或 q","p 且 q","非 p"形式复合命题的真假.

p:由澳门回归的日期(年、月、日)组成的数 19991220 是 3 的倍数;

q:由澳门回归的日期(年、月、日)组成的数 19991220 是 4 的倍数.

15. 若 p: N {x∈R|x>-1},q: ={0},写出由其构成的"p 或 q","p 且 q","非 p"形式的复合命题,并指出其真假.

16. 若 p:三角形的中位线平行于第三边;q:三角形的

中位线等于第三边的两倍, 写出由命题 p、q 构成的“ p 或 q ”,“ p 且 q ”,“ 非 p ”形式的复合命题, 并指出其真假.

17. 已知两个命题.

p: 方程 $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$ 的两根都是实数;

q: 方程 $2x^2 - 2\sqrt{6} + 3 = 0$ 的两根都不相等.

写出由这组命题构成的“ p 或 q ”“ p 且 q ”,“ 非 p ”形式的复合命题, 并指出其真假.

第 6 课　四 种 命 题

考试目标

1. 命题的形式. 设原命题形式为“ 若 p 则 q ”, 那么, 其逆命题形式为: 若 q 则 p 否命题形式为 ___p 则 ___q 逆否命题形式为 ___q 则 p

2. 命题的等价. 原命题与 否命题 价; 逆命题与 命题 价.

3. 互逆命题. 原命题与 命题 逆; 否命题与 否题 逆.

4. 反证法. 反证法证题的步骤是①否定结论, ②推矛盾, ③肯定结论.

题型示例

【例 1】　已知原命题为:“ 若 $A\cup B = A$, 则 $A\cap B = B$ ”, 写出它的逆命题、否命题和逆否命题, 并判断它的真假.

【解前点津】　依命题模式,“ 对号入座 ”即可.

【规范解答】　逆命题:“ 若 $A\cap B = B$ ”, 则“ $A\cup B = A$ ”是真命题; 否命题:“ 若 $A\cup B\neq A$, 则 $A\cap B\neq B$ ”是真命题; 逆否命题:“ 若 $A\cap B\neq B$ ”, 则 $A\cup B\neq A$ 是真命题.

【解后归纳】　某些集合运算的结论, 可借助“ 文氏图 ”验证.

【例 2】　证明 $\sqrt{3}$ 是一个无理数.

【解前点津】　直接证明不宜入手, 故用“ 反证法 ”.

【规范解答】　假若 $\sqrt{3}$ 是一个有理数, 则必然存在两个互质的正整数, 使得 $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$　$a^2 = 3b^2$　a 是 3 的倍数; 不妨设 $a = 3a_1$ 代入上式得: $(3a_1)^2 = 3b^2$, 化之 $b^2 = 3a_1^2$　b 是 3 的倍数. 综上所述, a、b 都是 3 的倍数, 故 3 是 a、b 的公约数, 这与 a、b 互质相矛盾. 所以, $\sqrt{3}$ 是一个无理数.

【解后归纳】　寻找矛盾的“ 症结 ”, 是反证法的关键所在.

【例 3】　原命题为:“ 平面 α 内的一条直线 l_1 如果垂直于此平面的一条斜线 l_2, 则 l_1 垂直于 l_2 在 α 内的射影 l_3. ”写出它的逆命题、否命题和逆否命题, 并分别判断其真假.

【解前点津】　将原命题的条件和结论进行“ 分离 ”, 使之成为“ 若 p 则 q ”的形式.

【规范解答】　逆命题为:“ 平面 α 内的一条直线 l_1, 如果垂直于此平面的一条斜线 l_2 在 α 内的射影 l_3, 则 l_1 垂直于 l_2 ”.

否命题为:“ 平面 α 内的一条直线 l_1 如果不垂直于此平面的一条斜线 l_2, 则 l_1 不垂直于 l_2 在 α 内的射影 l_3 ”.

逆否命题为:“ 平面 α 内的一条直线 l_1, 如果不垂直于此平面的一条斜线 l_2 在 α 内的射影 l_3, 则 l_1 不垂直 l_2 ”.

以上各种形式的命题都是真命题.

【解后归纳】　在分析原命题的“ 条件 ”与“ 结论 ”时, 首先确定是否有“ 大前提 ”, 谁是“ 大前提 ”, 谁是“ 小前提 ”, 然后对号入座.

【例 4】　当 $k\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 时, 是否存在 k 值, 使得两曲线: $x^2 + y^2 = 1$ 与 $y = k(x + 2)$ 有交点? 如果有, 求出 k 值, 如果没有, 说明理由.

【解前点津】　两曲线有无交点的问题, 归结为方程组是否有解的问题.

【规范解答】　从方程组 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = k(x + 2) \end{cases}$ 中消去 y 后得 x 方程整理得: $(k^2 + 1)x^2 + 4k^2x + (4k^2 - 1) = 0$, ∵ $\Delta = (4k^2)^2 - 4(k^2 + 1)(4k^2 - 1) = 4(1 - 3k^2)$ 且 $k\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

∴ 当 $\Delta\geq 0$, 即 $k\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 时有交点, 而 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]\cap\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right] = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, 故存在一切 $k\in\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 使得题设的两曲线均有交点.

【解后归纳】 解题使用了代数方法,本题也可以用"几何法",从直线与圆的位置关系入手,寻找满足题设的充要条件.

对应训练

一、基础夯实

1. 命题"若 a| A,则 $b\in B$"的否命题为 ( )
   A. 若 a| A,则 b| B　　B. 若 $a\in A$,则 b| B
   C. 若 $b\in B$,则 a| A　　D. 若 b| B,则 $a\in A$
2. 命题"若 A B,则 A C"的逆否命题为 ( )
   A. 若 A B,则 A C　　B. 若 A B,则 Aň C
   C. 若 A B,则 A C　　D. 若 Aň C,则 Aň B
3. 若命题 A 的否命题是 B,命题 B 的逆命题是 C,则 C 是 A 的逆命题的 ( )
   A. 逆否命题　　B. 逆命题
   C. 否命题　　D. 以上都不是
4. 命题"若 $x=3$,则 $x^2-9x+18=0$"的逆命题、否命题和逆否命题中,假命题的个数为 ( )
   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3
5. 以下说法错误的是 ( )
   A. 如果一个命题的逆命题为真命题,那么它的否命题也必定为真命题
   B. 如果一个命题的否命题为假命题,那么它本身一定是真命题
   C. 原命题、否命题、逆命题、逆否命题中,真命题的个数一定为偶数
   D. 一个命题的逆命题、否命题、逆否命题可以同为假命题
6. 命题"两条对角线相等的四边形是矩形"是命题"矩形是两条对角线相等的四边形"的 ( )
   A. 逆命题　　B. 否命题
   C. 逆否命题　　D. 以上判断都不对
7. 若命题 p 的逆命题是 q,命题 p 的否命题是 r,则 q 是 r 的 ( )
   A. 逆命题　　B. 否命题
   C. 逆否命题　　D. 以上判断都不对
8. 下列结论错误的是 ( )
   A. 原命题为真,其逆命题不一定为真
   B. 原命题为真,其否命题不一定为真
   C. 逆命题为真,否命题一定为真
   D. 原命题为真,逆否命题不一定为真
9. 命题"若 $a=5$,则 $a^2=25$"与其逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中,真命题的个数是 ( )
   A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4
10. 命题"若 $m>0$,则 $x^2+x-m=0$ 有实数根"与其逆命题、否命题、逆否命题这四个命题中,假命题的个数是 ( )
    A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

二、思维激活

11. 设原命题为:"动点 P 到两定点 A、B 的距离之和若为定值,则动点 P 的轨迹是椭圆",此命题是________命题(填真或假);其逆否命题是________.
12. "正偶数不是质数"的逆命题为________,否命题为________,逆否命题为________.以上四个命题中,真命题有________个.
13. "若不等式 $x^2+px+q>0$ 的解集为 R,则 $p^2-4q\leq 0$"的逆命题为________,否命题为________,逆否命题为________.以上四个命题中真命题的个数为________.
14. 命题"若 $xy=0$,则 $x=0$ 或 $y=0$"的逆否命题是________.

三、能力提高

15. 原命题为"若 $ab\neq 0$,则 a、b 中至少有一个为 0",写出它的逆命题、否命题、逆否命题,并判断其真假.
16. 证明:若 $a+b+c>0$ 关于 x 的方程:$8x^2-8\sqrt{a}x+b=0$,$8x^2-8\sqrt{b}x+c=0$ 以及 $8x^2-8\sqrt{c}x+a=0$ 中至少有一个方程有两个不等实根.
17. 给定原命题为:"若不等式 $8x^2+8(a-2)x-a+5>0$ 对任意实数 x 恒成立,则实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{2},3\right]$".
    (1) 判断原命题的真假,并说明理由;
    (2) 分别写出其逆命题、否命题、逆否命题.并指出这些命题的真假.
18. 若 a、b、c 均为实数,且 $a=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$,$b=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$c=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$,求证:a、b、c 中至少有一个大于零.

第7课　充要条件

考试目标

1. 能判断<u>　假　</u>语句叫做命题,不含<u>　辑联结词</u>的命题叫做简单命题,由简单命题和<u>　辑联结词　</u>成的命题叫做复合命题.复合命题的构成形式有三种,分别表示为<u>p 或 q</u>　<u>且 q</u>　<u>非 p</u>

2. 填写真值表.

p	真	真	假	假
q	真	假	真	假
p 且 q	(真)	(假)	(假)	(假)
p 或 q	(真)	(真)	(真)	(假)
非 p	(假)	(假)	(真)	(真)

3. 设原命题的形式为:若 p 则 q,则其逆命题形式为<u>　q 则 p</u>　否命题形式为<u>　p 则　q</u>　逆否命题形式为<u>　q 则　p</u>

4. p 既是 q 的充分条件,又是 q 的必要条件,则称 p 是 q 的<u>　要条件</u>.

题型示例

【例 1】　已知 p:在△ABC 中,$\sin(A+B-C)=\sin(A+C-B)$;q:△ABC 是 A 为顶点的等腰三角形.说明 p 是 q 的什么条件,并证明你的结论.

【解前点津】　化简等式,分别考查 p　q,q　p 是否成立.

【规范解答】　p 是 q 的必要不充分条件.

证明:由 p 知:$\sin(\pi-2C)=\sin(\pi-2B)$　　$\sin 2B=\sin 2C$,取 $B=\frac{\pi}{6}$,$C=\frac{\pi}{3}$,则满足 $\sin 2B=\sin 2C$　ABC 不是等腰三角形,∴p / q.

又由 q 知:△ABC 是 A 为顶点的等腰三角形,故 $2B=2C$　$\sin(\pi-2B)=\sin(\pi-2C)$　$\sin(A+B-C)=\sin(A+C-B)$,∴q　p.

综上所述可知:p 是 q 的必要不充分条件.

【解后归纳】　欲证 p / q,举“反例即可”,这叫做:“肯定结论须证明,否定结论举反例”.

【例 2】　求关于 x 的不等式 $ax^2-ax+1>0$ 的解集为 R 的充要条件.

【解前点津】　依首项系数 a 的正、负、零而定.

【规范解答】　当 $a=0$ 时,不等式的解集为 R;

当 $a<0$ 时,化原不等式为 $x^2-x+\frac{1}{a}<0$,其解不可能是 R;

当 $a>0$ 时,由 $\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$　$\begin{cases}a>0\\ a^2-4a<0\end{cases}$　$\begin{cases}a>0\\ a-4<0\end{cases}$　$0<a<4$.

综上所述可知:原不等式的解集为 R 的充要条件是:$0\le a<4$.

【解后归纳】　对“寻找”出来的“充要条件”,要注意“检验”.

【例 3】　已知条件 p:$A=\{x|x^2-(a+1)x+a\le 0\}$;条件 q:$B=\{x|x^2-3x+2\le 0\}$,当 a 为何值时:

①p 是 q 的充分不必要条件;

②p 是 q 的必要不充分条件;

③p 是 q 的充要条件.

【解前点津】　化简集合 A,集合 B,并注意 p　q 与 A　B 的等价性.

【规范解答】　由 p:$A=\{x|(x-1)(x-a)\le 0\}$,由 q:$B=[1,2]$.

①∵p 是 q 的充分不必要条件,∴A　B 且 $A\neq B$,故 $A=[1,a]$　$1\le a<2$.

②∵p 是 q 的必要不充分条件.∴B　A 且 $A\neq B$,故 $A=[1,a]$ 且 $a>2$　$a>2$.

③∵p 是 q 的充要条件,∴$A=B$　$a=2$.

【解后归纳】　当命题的形式是集合时,其充分条件和必要条件的判定,就是集合包含关系的判定.

【例 4】　证明:$f(x)=x^2+2mx+1$ 的图像与 x 轴正半轴至少有一个交点的必要不充分条件是:$m^2\ge 1$.

【解前点津】　原命题等价于:关于 x 的方程 $x^2+2mx+1=0$ 至少有一个正根的必要不充分条件是 $m^2\ge 1$.

【规范解答】　若关于 x 的方程 $x^2+2mx+1=0$ 有正实根,则 $\Delta\ge 0$　$m^2\ge 1$,故必要性成立.

∵$m=1$ 时,方程 $x^2+2x+1=0$ 无正根,故充分性不成立.

综上所述可知:关于 x 的方程 $x^2+2mx+1=0$ 至少有一个正根的必要不充分条件是 $m^2\ge 1$,亦即原命题成立.

【解后归纳】　等价转化是重要的数学思想方法.

对应训练