文科高等数学

上海大学理学院数学系　组编

上海大学出版社
· 上 海 ·

图书在版编目(CIP)数据

文科高等数学/上海大学理学院数学系组编.—上海：上海大学出版社，2004.8
ISBN 7-81058-762-5

Ⅰ.文... Ⅱ.上... Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 086944 号

责任编辑 王悦生 朱 音
封面设计 谷夫平面设计工作室

文科高等数学
上海大学理学院数学系 组编
上海大学出版社出版发行
(上海市上大路 99 号 邮政编码 200436)
(E-mail: sdcbs@citiz.net 发行热线 66135110)
出版人：姚铁军
*
南京展望文化发展有限公司排版
印刷厂印刷 各地新华书店经销
开本 880×1230 1/32 印张 9.25 字数 276 千
2004 年 8 月第 1 版 2004 年 8 月第 1 次印刷
印数：1～3 100
ISBN 7-81058-762-5/O·026 定价：18.80 元

内 容 摘 要

本书是面向大学和高职高专的文科学生的文化素质教材．书中讲述了微积分中的基本思想、概念、内容与方法．本书以数学的思想史和发展史为背景，使学生在初等数学的基础上，对微积分有比较清楚的了解，为学生在以后的生活实践中应用数学思想、解决实际问题打下扎实基础．本书的特点是内容引经据典、深入浅出，叙述简明扼要．

本书可作为综合性大学、师范类院校和高职高专等有关文科专业本科生和专科生教材，也可以作为了解一些高等数学的数学思想和方法的通俗读物．

前　　言

数学自它萌芽之日起,就担当起解决因人类实际需要而提出的各种问题的重任 数学对人类物质文明的影响,最突出地反映在它与从根本上改变人类物质生活方式的产业革命的关系上 .人类历史上先后共发生过三次重大产业革命,而这三次产业革命的主体技术都与数学的新理论、新方法的应用有直接或间接的联系 .数学在推动人类物质文明进步方面的作用越来越受到公众的推崇 .

数学对于人类精神文明的影响更为深刻 数学本身就是一种精神,一种顽强地不断进取的探索精神,这种精神具有两个要素,其一是对真理与完美的追求,千万年来对人们的思维方式、教育方式以及世界观、审美观等诸方面的影响是不容否定的 .其二是数学具有不可抗拒的逻辑说服力和无可争辩的计算正确性,其往往成为解放思想的决定性武器 以文艺复兴时期哥白尼“日心说”与宗教和中世纪传统思想的斗争为例,日心说长期受到教会势力的抵制,为此布鲁诺被教会焚烧而亡于罗马花园广场,伽利略也为此被判终身监禁 .而日心说的决定性胜利是用牛顿发现的数学新工具——微积分和从动力学定律、万有引力定律出发经严格的数学推理推演出太阳系的运动之后,德国天文学家加勒于 1846 年 9 月 23 日晚发现了与英国的亚当斯和法国的勒维列用数学方法推算出的未知行星位置只差一度的新行星——海王星,标志着哥白尼学说得到了光辉的证实 .凡此种种,由于电子计算机的发明,今天数学以空前广度和深度向人类几乎所有的知识领域渗透,结合形成了诸多新学科,如数理语言学、数理心理学、数理考古学等等,而且新学科的数目仍在不断增加 .

如何编写好一本符合大学文科本科与高职高专学生的高等数学教材,是一个不断探索的过程 .本教材力图以数学的思想史和发展史作为

引导,使学生能从本教材中对数学的思想、方法及其基本的概念有所了解,在推理、论证、演算等诸能力方面有所提高 .同时学生能从教材中学到一些必要的高等数学知识和得到一定的高等数学的训练 .

本教材的第一章由石忠锐、楼烨(上海科技学院)执笔,第二章由姜勤执笔,第三章和第四章由任亚娣执笔,第五章和第六章由沈裕华执笔,第七章及附录由楼烨、陈宝冲(上海科技学院)执笔,第八章由郧冬华、楼烨执笔,全书由郧冬华统一修改、统稿、定稿 .

在本教材出版之际,我们感谢博士研究生俞武扬和硕士研究生吕瑜佩、孙天川、凌和良等同学为本书打印了部分书稿和制作了部分插图 .我们感谢上海大学出版社诸位编审的辛勤工作,是他们卓有成效的工作才使本书得以早日与读者谋面 .

由于作者学识与水平,难免书中出现一些缺点和错误,敬请广大读者批评指正,并及时与我们联系,以便改正 .对于大家的支持作者不胜感激 .

编　者

2004 年盛夏

目　　录

第一章　函数与数论中的一些猜想

初等数学研究的主要对象是常量及其运算,而高等数学所研究的主要对象是变量之间的依赖关系.从古到今整个数学的发展大体可分为五个时期:(1) 公元前600年以前的数学萌芽时期;(2) 公元前600年到17世纪中叶的初等数学时期;(3) 17世纪中叶到19世纪20年代的变量时期;(4) 19世纪20年代到第二次世界大战的近代数学时期;(5) 20世纪40年代以来的现代数学时期.

每一数学时期的发展,从来都是和生产实践、科学技术的水平密切相关的.首先,生产实践和科学技术向数学提出需要解决的问题,刺激数学向生产实践和科学技术发展的方向发展.其次,生产实践和科学技术向数学提供丰富的研究资料和物质条件,计算机技术的发展推动整个数学的发展就是最典型的案例.此外,生产实践和科学技术为检验数学结论的正确性提供了真理性的标准.因此数学的发生和发展归根到底是由生产实践决定的.同时数学发展到一定阶段,对于生产实践又具有一定的相对独立性.

本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上,进一步研究函数的性质,分析初等函数的结构.

第一节　预 备 知 识

一、集合

“集合”是现代数学中的一个重要的基本概念.集合是指具有某种特定性质的事物的全体.组成这一集合的事物称为该集合的元素.

例1　所有皮制火炬牌篮球构成一个集合,则每一只皮制的火炬

牌篮球都是该集合的元素 .

例 2　所有正整数的全体构成一个集合,则每一个正整数都是该集合的元素 .

通常,我们用英文大写字母如 A、B、X、Y 等表示集合,用英文小写字母如 a、b、x、y 等表示集合中的元素 .如果 a 为集合 A 中的元素,则记作 $a \in A$, 读作 a 属于 A 或 a 在 A 中;如果 a 不是集合 A 中的元素,则记为 $a\,|\;\; A$, 读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中 .

如果集合中所包含的元素的个数只有有限个,则称这种集合为有限集 .

如果集合中所包含的元素的个数有无限个,则称这种集合为无限集 .

不包含任何元素的集合称为空集,记为　 .

例 3　$A = \{x \mid x^2 + 1 = 0,\ x$ 为实数$\}$ 为空集 .

定义 1. 1　设有集合 A、B,如果集合 A 中的每一元素都是集合 B 中的元素,即 $a \in A$,必有 $a \in B$, 则称集合 A 为 B 的子集 .记为 $A\quad B$,或 $B\quad A$, 读作 A 包含于 B,或 B 包含 A .

例 4　设 $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6\}$, 则 A 中的任一元素都是 B 中的一个元素, $A\quad B$.

定义 1. 2　设集合 A、B,若 $A\quad B$ 且 $B\quad A$, 则称集合 A 与 B 相等 .记作 $A = B$.

例 5　设 $A = \{x \mid x^2 - 5x + 4 = 0\}$, $B = \{1, 4\}$,则 $A = B$.

二、实数集

自公元前十几个世纪,人类历史开始从青铜器时代过渡到铁器时代 .铁器的应用,大大促进了生产力的发展,社会财富迅速增加,刺激了社会的商业活动 .由于经济生活的需要,人们越来越多地要计算产品的数量和生产工时的长短,测定建筑物的大小和丈量土地的面积等等 .人类从长期的社会实践中积累了许多有关数的知识,从而产生数的概念,并产生数的运算的方法 .

随着社会的发展,人类对数的认识越来越深刻 .由文明古国印度所

发明的阿拉伯数码表明正整数已被人类所广泛认识.通常地,全体正整数构成的数集记为 $N_+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$.为对正整数进行一系列的算术运算,数的范围扩大到了整数和有理数,分别记整数集为 $Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$,有理数集为 $Q = \left\{ x \,\middle|\, \frac{p}{q};\ p, q \in Z, q \neq 0 \right\}$.

如果用十进制来表示有理数,则有理数可表示成有限或无限循环的小数.一个数为有理数当且仅当其可以由整数表示成分数.如果一个数用十进制表示时,都不是有限的和无限循环的,这种无限不循环小数称之为无理数.例如,$\pi = 3.1415926\cdots$; $e = 2.71828\cdots$,这种无限不循环小数都是无理数.

通常把具有原点、方向和长度单位的直线称为数轴.有理数在数轴上对应的点称作有理点;无理数在数轴上对应的点称作无理点.有理数和无理数的全体称为实数集,记为 R.实数充满整个数轴.

我们把能被 2 整除的整数称为偶数,反之称为奇数.

如果一正整数只能被自身和 1 整除,则称该正整数为素数或质数.例如:2, 3, 5, 7, 11, …;其中惟一的偶素数为 2.

任何有理系数代数方程 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$ 的任何一个根称为代数数.反之,称为超越数.

18 世纪以前数学家在澄清无理数的逻辑基础方面没有进展,但他们以相对平静的态度接受了一些数的无理性.欧拉(Euler, L.)在 1737 年证明了 e 是无理数,他证明了 e 可表示为一个无穷连分数.由于他已经证明每个有理数都可以表示成一个有限的连分数,由此推断 e 必定是无理数.1763 年兰伯特(Lambert, J. G.)用类似的方法证明了 π 是无理数.但在 18 世纪,数学家们还没有找到任何一个具体的超越数.直到 1844 年,法国数学家刘维尔(Liouville, J.)才第一次证明了超越数的存在性.1873 年和 1882 年,法国数学家埃尔米特(Hermite, C.)和法国数学家林德曼(Lindermann, C. L. F.)分别证明了 e 和 π 的超越性.

三、绝对值

定义 1.3 任何实数 x 的绝对值,记为 $|x|$,定义为 $|x| = x$,若

$x \geq 0$; $|x| = -x$,若 $x < 0$.

x 的绝对值 $|x|$ 表示为数轴上点 x 到原点的距离.实数绝对值具有如下性质:

(1) $|x| = \sqrt{x^2}$;

(2) $|x| \geq 0$,当且仅当 $x = 0$ 时有 $|x| = 0$;

(3) $|-x| = |x|$;

(4) $-|x| \leq x \leq |x|$;

(5) $|x+y| \leq |x| + |y|$; $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big| \geq |x| - |y|$;

(6) $|xy| = |x||y|$;

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}\ (y \neq 0)$.

四、区间与邻域

区间与邻域是高等数学中常用的实数集,其中区间按不同的名称记号和定义可分为如下九种形式:

闭区间:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

开区间:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

半开区间:

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}$$

无限区间:

$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\}$$

其中 a, b 为给定的实数,分别称为区间的左端点和右端点 .$+\infty$ 读作为“正无穷大”, $-\infty$ 读作为“负无穷大”,它们不表示任何数,仅仅是记号 .

定义 1.4　设 a 与 δ 为两个给定的实数,集合

$$\{x \mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$$

称为点 a 的 δ 邻域, a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径,记为 $U(a, \delta)$,即

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta, \delta>0\}$$

习题 1-1

1 . 给出下列集合:

(1) 不小于 0 并不大于 1 的所有实数;

(2) $A=\{1, 3, 5\}$ 的全部子集 .

2 . 求 -10, $-a^2$ 的绝对值 .

第二节　函　　数

一、函数概念

笛卡尔(René Descartes)的“几何学”中引入了坐标与度量,开创了解析几何,使过去对立着的两个研究对象“形”和“数”统一了起来,完成了数学史上一项划时代的变革 .笛卡尔引入变量以后,随之而来的便是函数概念 .虽然他没有使用变量和函数这两个词,但两者的关系如此的密切,它们在历史上是同时出现的 .笛卡尔在指出 y 和 x 是变量时,注意到了 y 依赖于 x 而变化 .这正是函数思想的萌芽 .

客观事物是在不断地发展变化的,因此,对某个特定的现象进行观察时,其中出现的各种量也在不断地变化 .例如,上海本地区的气温、区域内噪声的分贝数,上海市的房地产指数等等都在不断地变化,这些变

化的量都是变量.

高等数学与初等数学的重要区别在于高等数学以变量为研究对象,而初等数学的研究对象基本上是常量.

我们经常碰到这样一些变量,它们总是随着另外一个变量的变化而变化.例如在超市购物时,我们的付款数目随所购买商品的数量增加而不断增加.这种依赖关系,通常称为函数关系.

定义 1.5 设 x 和 y 为两个变量, D 是实数集 R 的子集.如果对任何的 $x\in D$, 按照一定的规则 f 有惟一确定的实数值与之对应,则称规则 f 是定义在 D 上的函数, 也称 f 为变量 x 的函数, 记为 $y=f(x)$.此处 D 称为函数 f 的定义域,称 x 为自变量, y 为因变量.

对于每一个 $x\in D$, 按规则 f 所对应的惟一的 y 称为函数 f 在点 x 处的函数值.当 x 取遍 D 的每一个值时,对应的变量 y 取值的全体组成的数集称为该函数的值域,记为 $R(f)$.

如果两个函数的定义域相同,并且对应规则也相同,则称此两个函数相同,均表示为同一函数.我们约定:无特别标明时,函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的一切实数所组成的实数集.

例 1 求函数 $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ 的定义域.

解:当分母 $x-2\neq 0$ 时,此函数才有意义,所以函数的定义域为 $x\neq 2$ 的全体实数,即

$$D=\{x\mid x\neq 2\}$$

例 2 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$,求 $f(x^2)$, $f[f(x)]$, $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$.

解: $f(x^2)=\dfrac{1}{1-x^2}$, $\quad D=\{x\mid x\neq -1,1,\ x\in \mathrm{R}\}$

$$f[f(x)]=f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x},$$

$$D=\{x\mid x\neq 0,1,\ x\in \mathrm{R}\}$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right]=f(1-x)=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x},$$

$$D=\{x \mid x\neq 0,1,x\in \mathrm{R}\}$$

例 3　判断 $f(x)=1+x$ 与 $g(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}$ 是否为相同的函数.

解: 由于当 $x\neq 1$ 时, $f(x)=g(x)$, 但当 $x=1$ 时 $f(x)$ 有定义而 $g(x)$ 无定义, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不相同, 两者不是同一个函数.

二、函数表示法

函数的表示法通常有三种: 表格法、图示法和公式法.

(1) 表格法.表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出, 这样函数关系就用表格表示出来.例如, 大家熟悉的开方表、三角函数表、对数表等都是用表格法表示函数的.

表格法的优点是方便易用, 可直接查到对应的函数值, 缺点是数据不全面, 不能查出函数的任意值.

(2) 图示法.函数 $y=f(x)$ 的图形能直观地表达自变量 x 与因变量 y 之间的关系.图示法的主要优点是直观性强, 函数的主要特征在图上一目了然.图示法的缺点是不便于作理论上的推导、分析与运算.

(3) 公式法.用数学公式表示自变量与因变量之间的对应关系, 是函数的公式法.用公式法表达函数的优点是简明准确, 便于理论分析, 缺点是不够直观, 有些实际问题很难用公式法表示.

函数的三种表示法各有优点和缺点, 针对不同的问题可以采用不同的表示法.为了直观之便, 本书常采用公式法表示函数的同时, 辅之以图示法.

习题 1－2

1. 判定下列函数是否相同:

(1) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$;　　　　(2) $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$.

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{x^2-x}$;　　　　(2) $y=\ln(x^2-4)$.

第三节　函数的几种特性

一、有界性

定义 1.6　**设函数** $y=f(x)$ **在区间** (a, b) **内有定义,如果存在一个正数** M,**对于所有的** $x\in(a, b)$,**恒有** $|f(x)|\leq M$, **则称函数** $f(x)$ **在** (a, b) **内是有界的,如果不存在这样的正数** M,**则称** $f(x)$ **在** (a, b) **内是无界的**.

例如,函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ **在** $(0, +\infty)$ **内有定义,对任意的一个** $x\in(0, +\infty)$,**均有** $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1$,**所以函数** $y=\sin\frac{1}{x}$ **在** $(0, +\infty)$ **内是有界的**.**函数** $y=\frac{1}{x}$ **在** $(0, 1)$ **和** $[1, +\infty)$ **内均有定义,但在** $(0, 1)$ **内是无界的,在** $[1, +\infty)$ **内是有界的**.

二、单调性

定义 1.7　**设函数** $y=f(x)$ **在区间** (a, b) **内有定义,如果对区间** (a, b) **内任意两点** x_1, x_2,**当** $x_1<x_2$ **时,满足** $f(x_1)<f(x_2)$,**则称函数在区间** (a, b) **内是单调增加的,相应区间** (a, b) **称为** $f(x)$ **的单调增加区间;当** $x_1<x_2$ **时,满足** $f(x_1)>f(x_2)$,**则称函数在区间** (a, b) **内是单调减少的,相应区间** (a, b) **称为** $f(x)$ **的单调减少区间**.

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数.**单调增加区间与单调减少区间统称为单调区间**.

例 1　**判断函数** $y=x^3$ **的单调性**.

解:**由于** $y=x^3$ **在** $(-\infty, +\infty)$ **内有定义,对于任意** $x_1, x_2\in(-\infty, +\infty)$,**且** $x_1<x_2$,**有**

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

当 x_1，x_2 异号时，有

$$x_1x_2 \leq 0, \ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 > 0$$

故

$$f(x_2) - f(x_1) > 0$$

当 x_1，x_2 同号时，有

$$x_1x_2 \geq 0, \ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0$$

故

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 .$$

即对任意的 x_1，$x_2 \in (-\infty, +\infty)$，且 $x_1 < x_2$ 均有 $f(x_2) > f(x_1)$ 换言之，$y = x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$上是单调增加函数．

三、奇偶性

定义 1.8 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为$(-a, a)$或$(-\infty, +\infty)$，如果对于任意一个 $x \in (-a, a)$或$(-\infty, +\infty)$，满足 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对于任意一个 $x \in (-a, a)$或$(-\infty, +\infty)$，满足 $f(-x) = -f(x)$，则称为奇函数．

例 1 判断函数 $f(x) = x^5 + x^3$ 的奇偶性．

解：函数 $f(x) = x^5 + x^3$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，对于任意一个 $x \in (-\infty, +\infty)$，有

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x^5) + (-x^3) \\ &= -x^5 - x^3 \\ &= -(x^5 + x^3) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

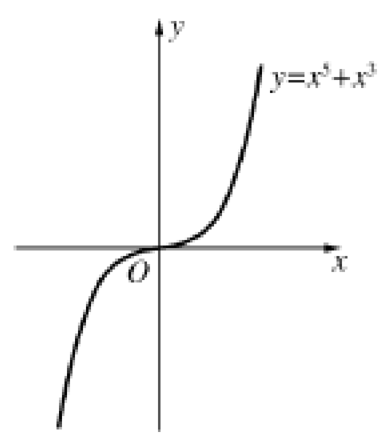

图 1－1

所以 $f(x) = x^5 + x^3$ 为奇函数，见图 1－1．

例 2 判断函数 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ 的奇偶性．