

《北京大学数学丛书》书目

- | | |
|-----------------|-------------|
| 1 同伦论基础 | 廖山涛等著 |
| 2 抽样论 | 许宝騄著 |
| 3 微分几何讲义 | 陈省身等著 |
| 4 H_p 鞅论 | 龙瑞麟著 |
| 5 代数曲线 | [美] P·格列菲斯著 |
| 6 代数学(上、下) | 莫宗坚等著 |
| 7 黎曼几何初步 | 伍鸿熙等著 |
| 8 二阶矩阵群的表示与自守形式 | 黎景辉等著 |
| 9 微分动力系统导引 | 张锦炎等著 |
| 10 无限元方法 | 应隆安著 |
| 11 李群讲义 | 项武义等著 |
| 12 H^p 空间论 | 邓东皋等著 |
| 13 黎曼几何选讲 | 伍鸿熙等著 |
| 14 矩阵计算的理论与方法 | 徐树方编著 |
| 15 位势论 | 张鸣镛著 |

《北京大学数学丛书》编委会

主 编：程民德

副主编：江泽培 丁石孙

编 委：钱 敏 丁同仁 姜伯驹 张恭庆 应隆安

责任编辑：邱叔清

说 明

此丛书是以数学、计算数学、概率统计及有关专业的高年级学生、研究生、青年教师及数学研究工作者为读者对象的出版物。丛书特点是内容新颖、力图反映现代数学的新成就，叙述精练，约相当于一学期周学时为3的研究生课程的取材。我们编辑出版此丛书的主要目的是为了适应我们国家培养研究生的需要，同时，又可作为数学及有关关系科高年级选修课程的参考书，为提高本科生的教学质量贡献一份力量。

我们诚恳地希望广大读者对于书目的选择，内容的取材提出宝贵意见，作为我们今后出版或再版时的参考。

《北京大学数学丛书》编委会

一九八一年元月

内 容 简 介

从 20 世纪以来,在测度及拓扑的基础上形成了现代位势理论.本书系统而又精辟地讲述了位势论的基本原理和方法,总结了我国 50 年代以来现代位势论研究的成果,包括作者相当数量的研究成果.全书共分五章,内容包括:测度、积分、拓扑,位势及上调和函数,扫除法,容量、点集的肥瘦和细拓扑,Dirichlet 问题、扫除法的推广等.每节后配有适量习题供读者选用.附录部分对现代位势论在若干方面的发展作了简明的介绍.

本书叙述严谨,深入浅出,富有启发性,注意现代位势论与物理、微分方程、概率论和函数论之间的联系,强调位势论的演变、发展和对各学科的影响,勾画出现代位势论的研究概貌,以引起读者的兴趣和思考,把读者带进现代位势论的研究领域.

本书可作为大学数学、应用数学、概率、物理等系高年级大学生和研究生的教材或参考书,也可供从事位势理论研究及相关专业的科技工作者阅读.

北京大学数学丛书

位 势 论

张鸣镛 著

北京大学出版社

· 北 京 ·

图书在版编目(CIP)数据

位势论/张鸣镛著 —北京:北京大学出版社,1998 12
(北京大学数学丛书)

ISBN 7-301-02781-8

I 位… II.张… III 位势论 IV 0174.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(96)第 02549 号

书 名: 位势论(北京大学数学丛书)

著作责任者 张鸣镛 著

责任编辑 刘 勇 孙 晔

标准书号 ISBN 7-301-02781-8/O·350

出版者 北京大学出版社

地 址 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

电 话 出版部 62752015 发行部 62559712 编辑部 62752032

排 印 者 北京大学印刷厂

发 行 者 北京大学出版社

经 销 者 新华书店

850mm×1168mm 32 开本 9 875 印张 250 千字

1998 年 12 月第一版 1998 年 12 月第一次印刷

印 数 0001—3,000 册

定 价 16.50 元

序

张鸣镛教授(1926~1986)是我国杰出的数学家。他秉性豪放,才华横溢。早在求学时代,他师从陈建功先生和苏步青先生,同时钻研分析学和几何学。在两位高师的熏陶下,他的数学功力的深厚广博,在当时浙江大学数学系历届高材生中也是少有的。1952年院系调整后,他一直在厦门大学任教,他的研究工作涉及数学的许多分支。到50年代中期,他已在现代位势理论方面发表了一系列引人注目的研究成果。可惜从1957年以来,在“左”的政治影响下他遭受了不公正的待遇,他的研究工作不幸被逼中断。直到60年代初期,他才能在数学岗位上发挥作用。他当即在厦门大学数学系开设了位势理论专门化课程,深受年轻学子的推崇。其后在十年浩劫中,他的业务工作全部被逼中断,70年代后期拨乱反正之后,他才获得新生。从此他在开展研究工作的同时,致全力于研究生的培养,多次为位势论方面的研究生开设各项有关课程,并悉心指导他们的学位论文,到80年代中期已培养出一批现代位势论方面的新秀。过去我国在位势论方面的研究极为薄弱,特别是现代位势论方面的研究几乎是空白。张鸣镛教授志在振兴我国的现代数学,为使我国在位势论方面的研究能迅速赶上国际的现代发展,他才从他自己涉及面极为广博的研究工作中集中到现代位势论的研究,并致力于新生力量的培养。他虽历经坎坷而其志弥坚,呕心沥血地为培养这方面的人才而不遗余力,直到癌症夺去了他可贵的生命。

本书即以张鸣镛教授在60年代开设的位势论专门化课程的讲义为基础,并以他在1979年亲自修订后作为厦门大学和福州大

学数学系研究生教材的讲义为蓝本,又收集了一个附录所组成.这个附录是他的学生根据张教授指导中所记录的笔记整理出来的.本书内容确实反映了张鸣镛教授为促使现代位势理论能在我国迅速发展所花出的心血.他在本书中精辟而又深入浅出地讲解了现代位势论的基本原理和方法,既能使读者便于掌握它们,又能使读者掌握之后便于开展现代位势论的研究.而本书的附录对于位势论的若干现代的发展又提供了简明的介绍.所以本书的出版既为我国高校数学(或应用数学)专业以及其相邻专业的研究生教材和本科高年级学生的选修课教材提供了优秀的新书,又能为促进我国位势论的现代发展起到所能起的作用.而后者正是张鸣镛教授生平夙愿,在这个意义上来说,本书的出版又可以看成对作者的一个永恒纪念.

位势理论有长久的发展历史,它的古典理论在 19 世纪中叶就已形成,它同物理有密切的联系,其名称就表明了这一点.实际上,它同复变函数、Laplace 方程都是研究电磁场的基本数学工具.从 20 世纪以来,在测度及拓扑的基础上形成了现代位势理论.它同物理仍有密切联系,而且联系得更广泛了.尤其它同 Brown 运动的深刻联系使位势论的基本概念得到了明确的概率论意义,于是概率论方法引进到位势论的研究中来;反过来,位势论的工具也促进了概率论的发展.二者的相互渗透是近代位势论的一个重要特点.它仍然同微分方程的研究联系在一起,但现在牵涉到了一般的二阶及高阶椭圆型方程、其他类型的方程如抛物型方程、Schrodinger 方程、以至一般的非线性方程,因之有了非线性位势论.同时,由于引入公理化思想还形成了极为重要的公理化位势论.所以半个多世纪以来,位势理论有了巨大的发展,形成了一个内容丰富、充满活力的数学分支.张鸣镛教授早在 50 年代就提倡现代位势论的研究是具有远见卓识的.

本书的出版首先要感谢张鸣镛教授的弟弟清华大学应用数学系张鸣华教授自始至终的大力支持. 高琪仁(厦门大学)、涂铨基(福州大学)、吴炯圻(漳州师范学院)诸位副教授在编写附录、进行校订、统一数学名词以及编制索引等工作中,做出了卓有成效的贡献;北京大学出版社编审邱淑清一贯关注、重视并主持《北京大学数学丛书》的编辑出版工作,并付出了极大精力. 在此一并表示由衷的感谢!

程民德

1992年9月于北京

目 录

第一章 测度、积分、拓扑	(1)
§ 1 1 测度	(1)
§ 1 2 积分	(10)
§ 1 3 不定积分及绝对连续测度	(19)
§ 1 4 乘积测度及 Fubini 定理	(23)
§ 1 5 测度的扩张及外测度	(32)
§ 1 6 拓扑空间上的测度及连续函数空间上的泛函	(41)
§ 1 7 测度的浑收敛	(64)
第二章 位势及上调和函数	(74)
§ 2 1 位势概念的由来	(74)
§ 2 2 位势 U_n^α 和它的连续性	(76)
§ 2 3 E^n 上的几何和有关的微积分原理	(80)
§ 2 4 E^n 的子区域里的调和函数	(87)
§ 2 5 位势的上调和性	(94)
§ 2 6 F Riesz 的分解定理	(101)
§ 2 7 相对于开球的 Green 位势	(113)
第三章 扫除法	(119)
§ 3 1 候补 Hilbert 空间及投影	(120)
§ 3 2 α 级位势及能量的符号	(124)
§ 3 3 强收敛、弱收敛及浑收敛	(128)
§ 3 4 凌驾原理及扫除法	(137)

第四章 容量、点集的肥瘦和细拓扑	(148)
§ 4 1 紧致集的容量及平衡分布	(148)
§ 4 2 外容量、内容量与可定容	(158)
§ 4 3 零容集及极大值原理	(165)
§ 4 4 点集的肥瘦	(175)
§ 4 5 细(肥)拓扑	(190)
第五章 Dirichlet 问题、扫除法的推广	(196)
§ 5 1 Dirichlet 问题及正则边界点	(196)
§ 5 2 边界数据不连续的情况	(203)
§ 5 3 Brelot 关于“干脆性”的理论	(207)
§ 5 4 关于调和测度下的零集	(210)
§ 5 5 上下解在不正则边界点的细极限	(216)
§ 5 6 边界的改造、分歧边界	(226)
§ 5 7 Martin 边界	(234)
附录 现代位势论简介	(246)
位势论发展简史	(250)
§ 1 一般核的位势	(252)
§ 2 抽象位势及理想边界	(261)
§ 3 Abel 群上的位势论	(272)
§ 4 公理位势论	(278)
§ 5 位势论与其他数学分支的联系及发展	(287)
记号表	(294)
索引	(297)

第一章 测度、积分、拓扑

§ 1.1 测 度

集合以及有关的基本概念假定读者已经熟悉 自然,我们谈的远不止是欧氏空间或者它的子集

我们考虑一个集合 X 及 X 的子集, X 的元素也称为点. 于是 X 及它的子集都是点集. 为了方便, X 也称为空间.

集合的交集、和集用通常的记号 集合 A 的余集记作 $C(A)$, 而 $A \cap C(B)$ 也记作 $A \setminus B$ 由单独一点 P 组成的集合记作 $\{P\}$ 下面也用 $\{P_i\}$ 表示点列 $\{P_i\} (i=1, 2, \dots)$, 即点列 $\{P_1, P_2, \dots\}$, 但这不会引起混淆

假定 Φ 是 X 的一族子集, Φ 不空并且有下面的性质:

(1) 如果 $A_1 \in \Phi, A_2 \in \Phi$, 那么 $A_1 \setminus A_2 \in \Phi$;

(2) 如果 $A_i \in \Phi (i=1, 2, \dots)$, 那么 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \Phi$,

就称 Φ 是由 X 的子集所组成的一个 σ 环.

假定 Φ 是由 X 的子集所组成的一个 σ 环, 每个 $A \in \Phi$ 都对应着一个实数 $\mu(A)$ 或者 $\pm\infty$, 那么说这个对应关系 μ 是在 Φ 上定义的一个**集函数**. 如果对属于 Φ 的任何可列个两两不相交的集合 A_1, A_2, \dots , 下列式子成立:

$$\mu\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i \mu(A_i), \quad (1.1.1)$$

就说 μ 是**绝对可加的**(或者**完全可加的**)

注意:(1.1.1)式成立就表示等号右边的和式里不会同时出现等于 $+\infty$ 及等于 $-\infty$ 的项, 因为 $+\infty - \infty$ 是没有意义的 关于 $\pm\infty$

的四则运算,我们采用习惯的规定:

当 $0 < a \leq +\infty$ 的时候,

$$a \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot a = (-a) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (-a) \\ = a \cdot \infty = \infty \cdot a = +\infty,$$

$$a \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot a = (-a) \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot (-a) \\ = -a \cdot \infty = -\infty \cdot a = -\infty,$$

$$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0;$$

当 $-\infty < a \leq +\infty$ 的时候,

$$a + \infty = \infty + a = +\infty,$$

$$-a - \infty = -\infty - a = -\infty;$$

当 $0 < a < +\infty$ 的时候,

$$+\infty/a = -\infty/(-a) = +\infty,$$

$$-\infty/a = +\infty/(-a) = -\infty,$$

$$a/(+\infty) = -a/(+\infty) = a/(-\infty) = -a/(-\infty) = 0.$$

定义 假定 Φ 是由空间 X 的子集所组成的 σ 环, μ 是定义在 Φ 上的一个绝对可加集函数, 并且至少存在一个 $A \in \Phi$ 使 $|\mu(A)| < +\infty$, 就说 μ 是一个测度或者质量分布. 对每一个 $A \in \Phi$, $\mu(A)$ 叫做 A 的测度或者分布在 A 里的质量. 每个 $A \in \Phi$ 称作一个可测集(相对于 μ).

定理 1.1.1 假定 Φ 是由空间 X 的子集构成的一个 σ 环, 那么空集 $\emptyset \in \Phi$. 如果再假定 μ 是在 Φ 上定义的测度, 那么 $\mu(\emptyset) = 0$

证明 假定 $A \in \Phi$, 那么由 σ 环的定义知道 $A \setminus A \in \Phi$, 因此 $\emptyset \in \Phi$. 再假定 μ 是一个测度, 那么存在一个 $A \in \Phi$, 使 $\mu(A)$ 有限. 所以

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$$

由此得到 $\mu(\emptyset) = 0$ **|**

下面我们举几个测度的例子. 当然, 测度是一个非常广泛的概念, 这几个例子并没有多大的代表性. 在举例以前, 先请大家注意:

如果一个测度 μ 在 σ 环 Φ 上定义,那么 μ 当然在 Φ 的任何一个子 σ 环上也有定义. 空间 X 的所有子集(包括空集)全体当然构成一个 σ 环 $\tilde{\Phi}$. $\tilde{\Phi}$ 是最大的由 X 的子集构成的 σ 环,也就是由 X 的子集构成的任何一个 σ 环 $\Phi \subseteq \tilde{\Phi}$. 所以,如果一个测度在 $\tilde{\Phi}$ 上定义,那么自然就在任何一个 Φ 上都有定义了.

例 1 假定 X 是一个不空的点集,在 X 中取定一点 P 对任何 $A \subseteq X$,令

$$\varepsilon_P(A) = \begin{cases} 1, & \text{当 } P \in A, \\ 0, & \text{当 } P \notin A, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

那么 ε_P 是在 σ 环 $\tilde{\Phi}$ 上定义的一个测度. ε_P 称为在 P 点的一个单位质点,或 Dirac 测度.

例 2 X 是一个点集. 对任何 $A \subseteq X$,令

$$o(A) = 0,$$

那么 o 是在 σ 环 $\tilde{\Phi}$ 上定义的测度,叫做零测度.

例 3 X 是一个点集. 对任何 $A \subseteq X$,令

$$\mu(A) = \begin{cases} +\infty, & \text{当 } A \text{ 不是空集,} \\ 0, & \text{当 } A \text{ 是空集,} \end{cases}$$

那么 μ 是一个在 $\tilde{\Phi}$ 上定义的测度.

例 4 大家熟悉的直线上的 Lebesgue 测度是在由全部 Lebesgue 可测集构成的 σ 环上定义的测度.

下面还要说明测度的几个基本性质.

定理 1.2 假定 μ 是一个测度, A 及 B 是两个可测集, $B \subseteq A$, $\mu(A)$ 及 $\mu(B)$ 不都等于 $+\infty$, 也不都等于 $-\infty$, 那么

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B).$$

证明 因为

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B),$$

移项就得到所要证明的等式. 在定理的假设下,这样的移项是许可的. **■**

定理 1.3 假定 μ 是一个测度, 存在一个可测集 A , 使

$\mu(A) = +\infty$, 那么对任何可测集 B , $\mu(B) > -\infty$

证明 因为 B 是一个可测集, 所以

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A)$$

如果 $\mu(B) = -\infty$, 那么 $\mu(B \cap A)$ 及 $\mu(B \setminus A)$ 中至少有一个是 $-\infty$ 若 $\mu(B \cap A) = -\infty$, 那么由

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$$

得到矛盾, 这是因为等号左边是 $+\infty$, 右边却有一项是 $-\infty$. 若 $\mu(B \setminus A) = -\infty$, 那么由

$$\mu(A \cup B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$$

得到矛盾, 因为等号右边有一项是 $+\infty$, 有一项是 $-\infty$, 所以 $A \cup B$ 必定不可测而这跟可测集全体构成 σ 环的假设矛盾 所以, $\mu(B) > -\infty$ **|**

定理 1.1.4 假定 μ 是一个测度, $\{A_m\}$ 是一列可测集 如果 $A_m \subseteq A_{m+1}$ ($m=1, 2, \dots$), 那么

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m).$$

如果 $A_m \supseteq A_{m+1}$ ($m=1, 2, \dots$), 而且 $|\mu(A_1)| < +\infty$, 那么

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m).$$

证明 先证明定理前半部分. 令 $S = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$. 如果有一个 A_m 使 $\mu(A_m) = +\infty$, 那么由于对任何 $k > m$,

$$\mu(A_k) = \mu(A_k \setminus A_m) + \mu(A_m),$$

必须 $\mu(A_k \setminus A_m) > -\infty$, 而 $\mu(A_k) = +\infty$. 因此, $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m) = +\infty$ 另一方面, 由于

$$\mu(S) = \mu(S \setminus A_m) + \mu(A_m),$$

必须 $\mu(S \setminus A_m) > -\infty$, 而 $\mu(S) = +\infty$ 所以所说的等式成立.

同样, 如果有一个 A_m , 使 $\mu(A_m) = -\infty$, 那么等式显然也成立

再如果所有的 A_m 都满足

$$-\infty < \mu(A_m) < +\infty \quad (m = 1, 2, \dots),$$

那么由

$$S = A_1 \cup A_2 \cup \dots = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \dots$$

得到

$$\begin{aligned} \mu(S) &= \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) + \mu(A_3 \setminus A_2) + \dots \\ &= \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1) + \mu(A_3) - \mu(A_2) + \dots \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m) \end{aligned}$$

这就是所要求的等式 注意这里由于假定 $\mu(A_m)$ 有限, 所以

$$\mu(A_{m+1} \setminus A_m) = \mu(A_{m+1}) - \mu(A_m)$$

其次证明定理的后半部分 由于 $|\mu(A_1)| < +\infty$, 所有的 A_m 都必须满足 $|\mu(A_m)| < +\infty$, 否则的话, 如果有一个 $A_m (m > 1)$, 使 $|\mu(A_m)| = +\infty$, 那么

$$|\mu(A_{m-1})| = |\mu(A_{m-1} \setminus A_m) + \mu(A_m)| = +\infty,$$

因为 $\mu(A_{m-1} \setminus A_m)$ 不能是跟 $\mu(A_m)$ 符号相反的无限大 继续推算下去, 最后得到 $|\mu(A_1)| = +\infty$, 这是不可能的.

既然所有的 A_m 都满足 $|\mu(A_m)| < +\infty$, 那么由

$$A_1 = \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m \right) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots$$

得到

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) + \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_2) - \mu(A_3) + \dots \\ &= \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m\right) + \mu(A_1) - \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

因此得到所要证明的等式 **■**

假定一个测度 μ 在所有的可测集 A 里分布的质量不为负, 那么说 μ 是一个**正测度**

假定 $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ 是在同一个 σ 环 Φ 上定义的测度, a_1, a_2, \dots, a_m 是实数, 而对每个 $A \in \Phi, a_1\mu_1(A), \dots, a_m\mu_m(A)$ 这 m 个数

中不会同时有 $+\infty$ 及 $-\infty$,那么可以构造一个新的测度 $\mu =$

$$\sum_{i=1}^m a_i \mu_i, \quad \mu \text{ 在任何一个 } A \in \Phi \text{ 分布的质量是 } \mu(A) = \sum_{i=1}^m a_i \mu_i(A)$$

这个 μ 称为 μ_1, \dots, μ_m 的**实系数线性组合** 特别是两个测度 μ_1, μ_2 的和 $\mu_1 + \mu_2$ 及差 $\mu_1 - \mu_2 (= \mu_1 + (-1)\mu_2)$ 就是在这样的线性组合的定义下理解的

我们要证明,一个测度必定可以表示为两个正测度的差. 为了这个目的,先说明变差的概念

假定 μ 是在 σ 环 Φ 上定义的一个测度 对任何一个 $A \in \Phi$, 令

$$\mu_+(A) = \sup_{\Phi \ni B \subseteq A} \mu(B), \quad (1.1.3)$$

$$\mu_-(A) = - \inf_{\Phi \ni B \subseteq A} \mu(B) \quad (1.1.4)$$

$\mu_+(A)$ 及 $\mu_-(A)$ 分别称为 μ 在 A 里的**正变差**及**负变差**. 所得到的 μ_+ 及 μ_- 这两个集函数分别称为 μ 的**正变差**及**负变差** 由于空集可测,并且是任何一个可测集 A 的子集,所以 $\mu_+(A) \geq 0, \mu_-(A) \geq 0$ 因此,测度的正负变差都是非负的集函数

引理 1 假定 μ 是一个测度,那么 μ_+ 及 μ_- 都是正测度.

证明 显然, $\mu_+(\emptyset) = \mu_-(\emptyset) = 0 < +\infty$, 所以只要证明 μ_+ 及 μ_- 都是绝对可加的就行了.

任意取可列个两两不相交的可测集 $A_m (m=1, 2, \dots)$ 令 $A =$

$$\bigcup_m A_m$$

如果存在一个 A_m , 使 $\mu_+(A_m) = +\infty$, 那么当然 $\mu_+(A) = +\infty$. 因此

$$\mu_+(A) = \sum_i \mu_+(A_i).$$

如果每个 $\mu_+(A_i) < +\infty$, 那么任意取定一个正数 a 以后, 对每个 i , 存在一个可测集 $B_i \subseteq A_i$, 使

$$\mu_+(A_i) < \mu(B_i) + a/2^i.$$

因此