



第一章 数学和事物到底有什么关联？

了解很像性（行为）。它有一个实用的用途，但这不是人们经常去做的原因。

——物理学家法兰克·欧本海默

寻找真相是人类活动的中心挚爱，它主宰了在舞台上及餐桌旁、课室中及法院审判庭、科学实验室及宗教僻静地（教堂或庙宇）里讨论到的问题。可是，当剧增的资讯在我们脑中不断反复发出回声之际，在并驾齐驱的不同事实及相互争雄的哲学中，要想去听出真相的清脆之音，就变得愈发困难了。

而结果是，数学贡献了唯一一套可以看出真相的工具。真的，它在广泛得惊人的许多问题中，带来了惊奇的清晰度，从宇宙级的问题（宇宙的命运）到社会议题（辛普森是否有罪），到公共政策的具体事务（种族和智商的关联）。

在科学领域之外的人很少拿这些工具来用。部分原

因是，人们似乎对数学感到恐惧。即使知道有这类工具，他们也不知道怎样把这些工具应用在自己关心的事物上。

可是数学已经潜藏于许多社会最挚爱的政治及社会制度里了：因果之间的理念、公平与正义、自私与合作、衡量风险、在福利及国防上的花费，甚至于科学发现的本质上。

当然，我们对物质世界及社会世界的观念来自数字以外的东西，如宗教、历史、家庭、心理。我们对于源自这些领域的“真理”的接受，就如常识一般的直觉，或者说它们“很明显是对的”；美国的独立宣言把它们称为“不证自明”。

可是数学，这最具逻辑性的科学，给我们证明了，真相或真理可以是高度反直觉的，而常识也可以既不“常”亦不“识”。

数学是一种“脑具”

数学是一种能澄清混淆关系的思考方式。它是一种语言，能让我们把世界上混杂的局面翻译成可以去管理的方式。从某种意义说来，它就像在一间戏院中看电影时，把灯光熄了，因而观众可以把银幕看得更清楚。当然，灯光熄灭了以后，有些东西就看不见了；你看不见你周围的人的脸，或者天花板上的镶花装饰。可是你看到了好很多的银幕景观。

数学科学研究院的院长色斯顿（**William Thurston**），在某些方面被认为是世上最好的几何学家，他把数学叫成一种“脑具”（即脑中的“工具”），它可以让我们观看

及表达我们不能以其他方法处理的观念。

普林斯顿数学家道伯齐斯（Ingrid Daubechies），是使子波分析（wavelet analysis）再兴的人物，子波分析可以用来进行几乎一切的分析工作，从贮存指纹数据到观测星体，因此他得到麦克阿瑟奖。道伯齐斯说，数学近乎诗：是一种把很广大的观念浓缩及精炼的方法，直到正确的资讯能恰如其分地传达为止。

数学可以像望远镜、显微镜一样地工作，可以像筛子一样把讯号从杂讯中筛出，数学是认识模式（pattern）的模板，搜寻及确证真相与真理的方法。数学也是一副眼镜，可以澄清事物，或去除那些把看似清晰的事物遮蔽及扭曲的东西。数学可以把你带到星球的核心或者宇宙的边缘，它可以给你选举的结果，或者给你“二氧化碳气体不断送入大气100年后的后果。”你可以推测到时间的尽头，或者追溯到时间的始点。你可以从那里来到这里。

数学既是语言，也是文学

数学家不把他们的技艺认为是一种简化计算或把实体世界秩序化的工具。他们对数学的了解是，数学可以表达、运算及发现事实。在这种意义之下，数学既是一种语言也是一种文学；是一盒子的工具，以及用这些工具建立起的体系。

有一次，我去波士顿和一位麻省理工学院的宇宙学家讨论宇宙学及相关的话题。飞回来的时候，我朝地面上看，看见许多小岛，可是很明显的是，它们是连起来

的，连起来的地方在浅水中。在地面上，这些连结就看不见了，而这些小岛就变得毫不相连。可是在空中，它们之间的连结就像在地图上一样的明晰。我想，有个理由可以解释为什么许多基本物理学需要在高维的空间中去观看。从高处看，你看得到的总可以多些。

同样的，数学工具也可以让人们去看见以其他方法无法看到的模式及连结。数学暴露了隐藏的趋向（爱滋病感染）、新物质（夸克、暗物质、反物质），及很重要的相关性（抽烟及肺癌）。数学能做到这些工作的方法是，把赤裸的骨骼暴露出来，克服经常把我们带到歧路去的意向。数学让我们把这些局势的外表脱去，可以直接看到骨架，看见内部有些什么在进行，才得以产生出你看到的表面现象？看见把它支架住的又是什么？如果你掘得够深的话，又会发现些什么？

从某种意义来说，把宇宙秘密泄露出来的故事，就是一页找出隐藏着的连结的历史。发现光的特性，是由于某个数字（光速）不断出现在连结了电和磁的方程式中，因而暴露出，光是一种电磁的起伏波动——这个了解就可以让实验家去搜寻它的同类。举例来说，电波讯号是载在比可见光的振动要慢许多的“光”上，而X光的振动则更快些。

方程式可谈到体积、经济趋势、疾病的模式、人口

译注：夸克（quark）是最基本的粒子，有六种，可是从未发现单独存在过。质子及中子各属三枚不同的夸克所组成的拘束体。天文学家发现在宇宙中有不明性质、无法观测到、直到现在仍是不可捉摸的物体，因而称为暗物质（dark matter）。暗物质的存在是由它们产生的重力而推断出来的。反物质（antimatter）是与物质对称的物质，可是电荷相反（其他许多性质也相反），例如质子带正电荷，反质子则带负电荷。物质和反物质一相碰，就化为乌有（变成了能量）。请见第十四章《诺塞与爱因斯坦：真理的不变性》。

的成长，及偏见与歧视的后果。数学是意识逐字逐句的扩充，它让我们瞧见更多。以这些工具，我们可以推测未来（可是也有些风险），可以看到隐藏不见的东西（扭曲的空间）。

“到底我们真正看到的是什么？”在 1939 年时，当英国天文物理学家艾丁顿^① 把本世纪初的物理革命作一结论时，问了这个问题。“相对论已经给了我们答案：我们只能观测到关系。而量子理论则给了另一个回答：我们只能观测到机率。”^②

换句话说，我们所观测到的就是数学上的关系。

数学保护我们不被无知所愚

因为数学有绝佳的能耐去暴露真相，你可以满怀好奇地问：人们是否经常用它来使误解及谎言持续不断地传下去？数学的威力来自我们把数字看得比文字更重要。

“图表经常使人走上歧路，”数学家德福林（Keith Delvin）这么说：“不必为此感到羞耻：文字也能把人带上歧途。数字的问题是因为我们对数字的态度是某种程度的敬畏，好像它们要比文字更加可靠似的。这个信念大错特错。”

人们经常把数学看成一种客观的论证，可以把他们从模棱两可的不安中拯救出来。我们一直希望，只要能事物以数字的形式表达出来，也许真相就可以浮现。

译注：艾丁顿（Arthur Eddington, 1882 - 1944），英国天文物理学家，是现代天文物理学主要创始人之一。他于 1918 年组织观察队去观测日食时星光被太阳的重力所弯曲，因而证明爱因斯坦的广义相对论。在 1926 年时（远在核物理创立之前）就宣称：太阳的能量来自四个氢原子合并成一个氦原子的反应中放出的能量。艾丁顿文笔很好，写了不少的科普书籍。

原注：摘自格里高里（Richard Gregory）的书《科学中的心灵》。

可是数学只能把模棱两可的状态澄清；它不是混淆海洋中的救生艇，它只是标记了暗礁的浮标。毕竟曾有一个数学定理（哥德尔定理）证明了，某些真理根本无法沿着纯逻辑的途径找到。

数字令人胆寒的一个上好例子是一本叫做《钟形曲线》（*The Bell Curve*）的书。这本书的争论性大到——在这书发表以后，有十来本书出现，回应这书的论调。这本书的作者是在美国企业学院任职的穆雷（Charles Murray）及最近逝世的哈佛大学教授赫尔斯坦（Richard Herrnstein）。这本书推出一军火库的数学炮弹来支持他们的论调，强调智慧大都是遗传的，而黑人的智慧较少，而且很少能有方法来改进。书评家（更不必去提读者了）在这一大批统计数字、图表及许多“多重回归分析”（multiple regression analysis）的攻击之下，都承认受到了“弹震病”。

可是有几位不畏死的人跳入这些没顶的统计数字池塘去，发现有些似乎可以讲出真相的关键数字都被扫到地毯之下（即略去不提），因此使得这些数学分析变得毫无意义。

我最经常被问到的问题是：你自己本身既不是数学家，你如何能发现这些？答案是：你不必是数学家，你只要“去问那些大约已经存在你心中的疑问”的自信心就行了。例如问道：你是怎么知道的？根据哪些证据？同哪些相比？就像那位花了一天在旧金山探险博物馆（Exploratorium）去探索展览品的女士，回家后就自己接线

原注：请见第十三章《举证的重担》。

原注：请见第十二章《事情因何发生？》

装了一只电灯。在这所世界闻名的科学博物馆中，没有一件展览品教她如何去接线装电灯的。在探险博物馆里她发现的只是一个信念，她相信自己有能力去想出该如何进行。

如果正确应用，数学可以暴露出我们感官的毛病，这些毛病带给我们常有的幻觉，例如我们不能感觉到百万和十亿这两级数字间的真正区别。数学也可以给我们一些相当简单的方法，来保护我们不被无知所愚。就如物理学家费曼（Richard Feynman, 1918 - 1988）有一回说过的：“科学是学习如何不为自己所愚的漫长历史。”有数学做我们理念的后盾，能使我们自愚的程度减少，并降低激烈后果的发生。

总之，数学很重要，比人们想像中的更重要得多。在做生死交关的决定时，我们的最后决定必须基于数学告诉我们的的是什么。我们不能因为在高中时憎恨数学，因而自暴自弃，对数学的观念无知——就如我们不能对电脑或爱滋病无知一样。数学是必要必需的，而不是次要的边际知识。

真相的基础是数字

我刚开始时只是对社会问题有兴趣，后来特别佩服数学的这种威力，可以在范围辽阔的不同局势中，把所有的证据都筛选过，决定哪些是真的。有些工具是很明显的（如机率），可是其他的很含蓄，甚至于朦胧（例如同称性、真理，以及不管怎样都不变的事物之间的关系）。

许多不同真相的基础是数字，而探索它们就是本书的目的。

若有人说某个数字和另一个数字有关联，例如说，智商就是智慧，大脚的人数学成绩特别好，这样说是什么意思呢？如果一件事能使另一件事更可能发生，是否可以把它称为因？什么是赢游戏的最好策略？永远成长的经济是否是件好事？或者，经济永远成长是否可能？在古代的火星上，有过生命吗？怎样才是最公平分配国家预算的方法？玩亡命的懦鸡游戏^①时，什么是最好的生还策略？被恐怖分子杀死的机率指的是什么？40岁后成婚的机率呢？在纽约曼哈坦岛遇见你的连襟的机率有多少？在阿拉斯加西部的诺姆又是多少？我们把这些事物安上数字的意义又是什么？

毫无疑问的，数学具有极大的威力。因此难怪物理学家京斯（*Jamea Jeans, 1877-1946*）下断言说：“这位宇宙中最伟大的建筑师（指创世者），现在开始以纯数学家的身态出现。”

同时，数学并非不至遭到误用。和所有的科学一样，它在文化中成长及兴旺，因此大幅受到文化特性的影响。本书专注于指向真理的各种数学指南，那可以应用在广阔范畴的问题上，从新闻问题到纯哲学或纯美学意趣都有。

我个人最喜欢的，就是诺塞和爱因斯坦的研究工作中真理与美的结合：如何可以把深奥的真理以不变式

译注：在20世纪50年代，美国狂妄的青少年往往在双线的公路上飙车，两车都在路当中的线上互相朝另一车开去，哪个先让开的是“懦鸡”（*chicken*）——这是美国称胆怯的人的俚语。这被称为“懦鸡游戏”。

(invariant) 的方式来下定义 (不变式是不管数学环境怎样变化, 都是不变的); 如何可以用对称性来替不变式下定义; 接下来, 对称性如何替守恒的自然性质下定义 (无论发生什么变化, 这些性质都不变)。在艺术及音乐领域诉诸于感官的美感, 与自然的形态如雪花及星系, 都具有同样的对称性。最基础的真理都是基于对称性的, 而在这些当中自有一种深奥的美。

旅程就从这里开始了。

第一部

心灵与数学相会的 地方

这些数字能向上爬、而
我们却不知不觉，原因来自
我们头脑的构造。

数学不是突然从虚无缥缈之处出现的——不像有些宇宙学家认为宇宙是如此出现。数学是被人类创造出来的，或者是被人类发现的（如果你宁愿这么想的话）。就因为如此，数学反映出许多人文的面向，包括体质特性、心理及文化的面向。我们头脑和身体运作的方式塑造了数学的研究，还塑造了我们每日经历的如何认识数量的意识。毕竟用来揭示出弯曲时空及夸克，引导出从电脑到基因疗法的发明，这些最精致高雅的数学，就最广义的心理、生理意义而言，还是被人性所创造出来的。可是，同样的人性也限制了我们的能力，限制了我们去了解和人类这物种的延续攸关的现象，包括危机、人口的成长及国家的预算。

生理构造限制了数学能力

在人类演化中再次出现的主题里，那些我们当做寻求真理的踏脚石的策略，居然变成了在搜索不同脉络的真理时的绊脚石。

数学被人类的生理塑造就是一个很明显的例子：在不同社会中的数字系统多是建立在 10 的倍数上，这是因为几乎所有的人，生下来时都有 10 根手指及 10 根脚趾。（有些文化把数字系统扩充，加入手腕、肘、肩及胸脯。）

比较不明显的是，我们脑袋里的标度似乎就像地震强度的量度，一个小小数值的增加，例如从规模七级到

八级，就代表一个极大的毁损力的增幅（约 10 倍左右），这可能就能说明，为什么人们没有能力去识别百万及十亿之间的真正区别，无论他的数学能力有多好。

再者，我们身体以外的物理世界是被“产生出无所不在的数学物体的力”所塑造的：几何真的是长在树上的；由于重力、电力及核力的作用，每个比月亮大的物体都呈球形，或近乎球形；从喷泉射出的水以抛物线下落；肥皂泡相交的角度是 120 度，而水分子中的两个氢原子和氧原子的相交角为 105 度，因而产生了水泡和雪花的外形；树枝和血管及河流的分枝方法的相像程度，实在令人惊奇不已。

以同样的理由，我们对时间的量度及观念是基于地球的自转及绕太阳公转的时间。在空间中，我们把我们的方向和地球的自转轴及地磁的轴方向对齐（南北方向）。我们认定了“下”是一个固定的方向，虽然对我说来，我的“下”是某些住在地球另一面的人的“上”。其实，“下”就是重力牵引最大的方向。如果你单独在太空中，就没有所谓的上、下、东或西。

许多数学的运算，如加或减，直接来自我们的体验：把两个苹果加起来，或者把一个圆饼分成三份，或者从一个圆的直径算出周长。

数学观念可超越经验

可是数学的观念是远超过经验的。几何学家喜用的完美的圆和直角，在自然界中并不存在。数学还可以做到物体做不到的事，有一个古老的故事是这样说的：一

个人站在街角求乞，手中持了一个牌子，上面写着“两次大战，一条腿，两个妻子，三个小孩，两次受伤。总数：10。”而也有物体可以做到、而数字做不到的事。如果你把氢和氧按 2:1 的比例混在一起，在适当的条件下，你得到的不是三个单位的气体，你得到的是一单位的水。

但是，几乎所有把数字延伸到经验之外的尝试，经常会遇到极端文化性的阻力。当负数第一次引入时，人们认为它极为荒谬。因为不可能有两个负的苹果，那么到底 -2 的意义是什么？引入零的观念时遇到的阻力，不在引入哥白尼的“以太阳为中心的太阳系”的观念所遇到之下。而如果关于毕达哥拉斯派学者的故事是正确的话，人们真的曾经因为发现了无理数（如圆周率 π 这些不能以分数表示的数字）而送命。说真话，我们用的“无理”（irrational）这词，意思是完全没有道理及不按惯例的，还真是相当传神地反映出人们对这些数字刚引入时的感觉。

今日的数学家依赖着许多奇怪的物件。有一阵子人们认为这些物件落在常理之外，例如不同级的无穷大、虚数及超越数（transcendental number）、高维空间的几何等等①。

可是无论数学离开人类的经验有多远，我们的实体世界，包括自身的组成，在我们继续不断意识到数学观念时，仍然起了关键的作用。

译注：关于不同级的无穷大，请先想一下整数级的无穷大：1、2、3……到无穷大，再与一条线上的点的数目来比：不管两点的距离有多么近，当中还是可以放入一点，因此不管这条线有多小，点的数目还是无大的。这两种无穷大显然属于不同级。



第二章 指数式放大

人种的最大缺陷是：我们无能为力了解指数函数。

——物理学家巴特列特（Albert A. Bartlett）

请回想一下，我们对于了解极大或极小的数目，有多么困难。任何搞不清楚 10 亿及 1 兆的人都知道，所有的大数字看上去都差不多。每日我们都被不可思议的总额数字所轰击：

美国的国债已成长到以兆为计算单位了。银河系中有 2000 亿枚星球，而在宇宙中有 2000 亿的其他星系。供应从人体到火……等每一物体能量的化学反应时间为飞秒级（ 10^{-15} 秒、或毫微微秒、千兆分之一秒）。自生命出现以来，演化到现在的时间约为 40 亿年。

我们对于了解这些数字，又曾做过哪些尝试？令人不安的回答是，不多。看来我们的大脑可能不是设计来

了解极大和极小数目的。霍夫史达特^①造了这个词语“number numbness”（对数字的麻木）来描述这个综合病症。毕竟有许多美国人常把 million（百万）和 billion（10 亿）搞混；这两个英文字之间只差一个讨厌的字母^②。可是，million 是 billion 的 1‰，几乎可说是“不足道”的一小片。

很显然，没有一个人不受到这个（对大数目无知）影响的。在《华尔街日报》中，戈德施密特（Donald Goldsmith）指出，克林顿总统在一场有关保健的演讲中，在报告看医生的次数时，不慎少算了 90 000 次。他把 500 位儿童乘以 200 位医生，得到 10 000 看医生的次数，而少算了 90 000 次。

我们所有的人都不太容易掌握数字的成长：每年 5% 的通货膨胀，在约 10 年内就可以把收入减半，或者即使只有 2% 的人口增加率，人类也可以很快就占满地球上的每一寸空间。从愈来愈贬值的美元，到核弹的爆炸威力，物体增值的方法是人们很难去掌握的。可是，这些与生俱有的“数盲”的后果其大无比。

如果我们不能掌握到一千、一百万、十亿、一兆之

译注：霍夫史达特（Douglas Hofstadter），现代电脑学家兼科普作家，著有《哥德尔、艾雪与巴哈——一条永恒的金带》及《后设魔法主题》（Metamagical Themes）。哥德尔（Kurt Gödel, 1906 - 1978），20 世纪最伟大的数学家之一，证明在数学及逻辑中有些不能证明是对的或是错的公理，请见第十三章。艾雪（Maurits Cornelius Escher, 1898 - 1972），荷兰籍版画家，以现实的题材画出光学上的幻觉及不可思议的效应，巴哈（Johann Sebastian Bach, 1685 - 1750），为中古时代大音乐家，创西方音乐的体系。

译注：其实还不止于此。“b”在英文中的发音是所谓的破裂音（如 b、p），发音如爆炸声，只发一次，不连续下去，如果不仔细听就易混淆。在拼成词时就如爆炸时的音前声。从物理来说，这些音前声的频率都很高，在 4000 赫兹以上。普通的麦克风对频率的反应都不太高，而差一点的扬声器（如廉价电视机中用的）的频率也不行。因此，在音响中（包括电话）peter 和 beter 往往搞不清，因此有些广播员在说 billions 要强调“这是个有 b 字的 billion”。