

译丛序言

数学,这门古老而又常新的科学,正阔步迈向 21 世纪。

回顾即将过去的世纪,数学科学的巨大发展,比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位。数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透,并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献。同时,数学作为一种文化,已成为人类文明进步的标志。因此,对于当今社会每一个有文化的人士而言,不论他从事何种职业,都需要学习数学,了解数学和运用数学。现代社会对数学的这种需要,在未来的世纪中无疑将更加与日俱增。

另一方面,20 世纪数学思想的深刻变革,已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路。面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法,门外汉往往只好望而却步。这样,提高数学的可接受度,就成为当务之急。尤其是当世纪转折之际,世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作,国际数学联盟(1968 年)还专门将 1990 年定为“世界数学年”,其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解,特别是被普通公众所了解”。

一般说来,一个国家数学普及的程度与该国的数学发展水平相应并且是数学水平提高的基础。随着中国现代数学研究与教育的长足进步,数学普及工作在我国也受到重视。早在 20 年代,华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物,激发了一代青少年学习数学的兴趣,影响绵延至今。改革开放以来,我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力。但总体来说,我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距。我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平,数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务。为此,借鉴外国的先进经验是必不可少的。

《通俗数学名著译丛》的编辑出版,正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物,推动国内的数学普及与传播工作,为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量。本书的选题计划,是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的。所选著述,基本上都是在外国已广为流传、受到公众好评的佳作。它们在内容上包括了不同的种类,有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用;有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧;有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系;……等等,试图为人们提供全新的观察视角,以窥探现代数学的发展概貌,领略数学文化的丰富多采。

丛书的读者对象,力求定位于尽可能广泛的范围,为此丛书适当纳入了不同层次的作品,以使包括大、中学生;大、中学教师;研究生;一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益。即使是对于专业数学工作者,本丛书的部分作品也是值得一读的。现代数学是一株分支众多的大树,一个数学家对于他所研究的专业以外的领域,也往往深有隔行如隔山之感,也需要涉猎其他分支的进展,了解数学不同分支的联系。

需要指出的是,由于种种原因,近年来国内科技译著的出版并不景气,有关选题逐年减少。在这样的情况下,上海教育出版社以迎接 1995 年世界数学年为契机,按照国际版权公约,不惜耗资购买版权,组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》,这无疑是值得称道和支持的举措。参加本丛书翻译的专家学者们,自愿抽出宝贵的时间来进行这类通常不被算作成果但却能帮助公众了

解和欣赏数学成果的有益工作,同样也是值得肯定与提倡的。援像这样集中地翻译、引进数学科普读物,在国内还不多见。援我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作,使《通俗数学名著译丛》出版成功。援

让我们举手迎接 1995 世界数学年,让公众了解、喜爱数学,让数学走进千家万户!

《通俗数学名著译丛》编委会

1995 年 愿月

编者的介绍

数学与服装一样,讲究时尚,并且在这两个领域内,时尚都有重复出现的趋势。19世纪下半叶“近世几何”,即本书的内容,曾引起广泛的兴趣,在英国与欧洲大陆两方面都有很多人积极从事研究,很多优美的定理获得证明,其中大多数是使用初等方法。到该世纪末,这种兴趣有所减弱。

本书似显示这种兴趣的复活,很大程度上是由于认识到新的材料对训练我们高中未来的几何教师的价值。事实上,这是一种训练,它是初等几何的自然的“继续”,由一批可用类似于经典平面几何所用方法导出的命题组成,具有新奇的吸引力与内在的美。因此,毫不奇怪,越来越多的学院与师范学校将这门“近世几何”列入它们的现行课程中。

但这本书,不仅可作为这类课程的教材,而且也给我们增加了一本有价值的数学文献。由于本书对读者预先的训练,要求极为合理,可以期望它会受到许多有兴趣、有志向追求增长知识与了解几何的高中与学院的教师们的喜爱。而且,许多受过高级训练的数学家会欢迎它,因为这给他们一个机会,去填补他们先前学习中一个并非罕见的缺口。这本书的内容,尽管有初等的特色,一般说来不是数学家所熟悉的。

最后,作者成功地将大量在杂志上零碎地出现的材料收集在一起,否则它们是不易见到的。这非但没有减弱它作为初等课

— 員 —

序

这本书,研究三角形与圆的几何学,它们在 19 世纪被英国与欧洲大陆的作者们广泛地发展了。这门几何学,完全以欧几里得的初等平面几何或它的近代版本为基础,很快被认为是学院的课程的优秀材料。或许没有其他领域,包含这么多可以被读者直接接受的几何真理,而在发展方法与技术时只需要很少的预备知识。熟悉高中数学与三角术语的学生,就足以从这门学科的课程中获得充分的益处。因此,这一课程非常适合于中学数学教师或未来的中学数学教师,适合于喜爱数学的一般学生,特别是喜爱几何,而不被解析几何中的艰苦的代数困难吸引的学生,适合于经常在其他数学领域中遇到这门近世初等几何的应用的那些数学家。他们的这种关系,不时地在本书中出现,所以熟悉较高等的几何的读者会经常发现或多或少有些变形的熟悉定理。援

学习这新的初等几何有几种途径。有些作者自由地使用中心射影的射影方法与非调和比;另一种方法是解析的,采用重心坐标。本书的观点是:既然这门学科专门研究与全等形、相似形有关的初等概念,而综合射影方法或解析方法的处理,需要更费心的基本概念,它们关于变换的射影群不变,所以更优雅,更更为适当的办法是仅用欧几里得的全等与相似的关系。这样,可以取得直接、统一的处理,而用较高等的几何的更有力的方法,这些却似乎要失去。于是,在本书中,关于定理的构成与证明,我们

非常全面地处理圆与球的几何学,有很多富于启发的与初等领域
的联系 援

云忌难莽杜宰援杂此解圆霄第月赠籍案分登呈第圆霄第月赠籍案

月第圆上元恩因援

耘皂第圆霄第月赠籍案分登呈第圆霄第月赠籍案分登呈第圆霄第月赠籍案

(这是两本很有价值的德文文献 援第二本讨论布洛卡几何,
部分采用解析法 援第一本在本书中被广泛地引用 援

粤第圆霄第月赠籍案分登呈第圆霄第月赠籍案分登呈第圆霄第月赠籍案

(一本新的、成功的美国课本,我们希望与它进行友好的竞争 援

我们也试图利用非常大量的杂志上的文章,以及较为陌生的
书籍,将从中获得的最重要的结果融入本书 援因为本书的目标
不是成为一本包罗万象的文集,而是这个非常广泛的领域的一个
导引,许多在期刊上出现的非常复杂的研究没有足够的篇幅
容纳^① 援同时,本书的主旨对资料的原始性要求不多,作者的原始
贡献不很重要,所以作者本人致力于将材料有机地结合起来,
致力于证明的清晰、简化与加强 援如果读者对于各部分之间的关
系与安排的协调、统一,感到美学的满意,作者就成功了 援

或许本书对于几何艺术的发展的主要贡献是设计“有向角”
(缺乏更好的名字)的概念与证明方法 援这个方法的优点,已经在
几年前美国数学月刊的文章中指出 援只有在充分熟悉之后才能

① 在这三角形几何学的最重要的贡献中,必须提到爱丁堡的麦凯
博士(分第圆上元恩因援)爱丁堡数学学会的首任主席 援麦凯博士是这一领域的
热情的工作者,在该数学会成立后的第一个二十年间,他在该会的会刊
第圆上元恩因援上发表了三十五篇文章,其中有简短的注记,也有与三角形相
关的最重要的图形的长篇专论 援他的数学史的研究也极有价值,在本书中
将要见到 援读完本书并希望在这一领域进一步研究的学生,没有比读麦凯
的文章更能令他长进的事了;而且在麦凯的文章中,还能找到完整的文献
目录 援

欣赏它,我们希望它能得到更普遍的应用。除了作为证明方法的力量,它也给一些基本定理的陈述提供了一种有价值的形式,否则对不同的情况将需要几种不同的叙述。这种类型的定理,如异径圆幂定理,在一些教材的表述中一直是含糊不清的,它们的充分意义只有在使用有向角时才能说明白。这个新的严谨的方法谨供所有几何学家考虑。

毫无疑问,本书提供的材料多于通常一个学期的课程所能处理的。减少材料与简略证明的两难境地,作者倾向于后一种选择。因此只有较少的定理完整详细地给出证明,留给学生完成的原始证明,量是很大的。同时,作者相信本书的逻辑顺序是非常清晰的,所以读者很少会因任何实质的困难而困惑。希望读者能对课文中所有未证明的定理与系(推论)补出证明,在需要的地方,我们已提供了提示。细心的作图也是极为重要的,希望学生能画出图形,用以说明较重要的定理①。

相信教师们能够发现,根据他们个人的爱好来选取材料供任意长的课程使用,而不损害全部内容的统一性,是可能的.撮主要的几章,对这一学科的任一种学习都是基本的,是 员圆猿苑- 员源章及 员缘章的指定部分.无论圆的几何学(缘远章),还是布洛卡几何(员圆员远苑员愿章)都不应忽视;第 员源章虽然不是不可缺少的,它给出一种有价值的看法,可以看到前面几章的本质.援

作者借此机会表示对哈佛大学柯立芝(Chas. I. Lewis)教授的感谢,在他所开设的圆的几何学的课程中,作者首次接触这一领域,他的和蔼与循循善诱支持着本书的准备工作。同时,应当说明本书的任何不妥之处均与柯立芝教授无干。

作者还要感谢 允肇和懿卓教授(这套丛书的编辑)与 月媛、月增教授(两位都在 阅读心理学学院工作),他们耐心地阅读我

① 见异源第 58 页援引

的手稿并提出很多有价值的意见 ;感谢 月增大学的 硃振铎
粤精室主教授提供了很多同样有用的意见 援

目 录

第 1 章 引论	1
1.1 预备知识	1
1.2 正负量	1
1.3 无穷远点	源
1.4 记号	远
1.5 有向角	怨
第 2 章 相似形	猿
2.1 位似形	猿
2.2 两个圆的位似中心	缘
2.3 相似形通论	苑
第 3 章 共轴圆与反演	園
3.1 根轴	園
3.2 共轴圆	愿
3.3 反演	猿
第 4 章 三角形及多边形	源
4.1 三角形中的比	源
4.2 四角形与四边形	愿
4.3 托勒密定理	缘
4.4 三角形与四角形的定理	缘
4.5 多边形的定理与练习	愿
4.6 关于面积的定理	远

第 缘章 圆的几何学.....	苑
异苑猿 开世的幂的定理.....	苑
异苑远 逆相似圆.....	愿
异苑源 极点与极线.....	愿
异苑源 球面射影.....	愿
第 远章 相切的圆.....	怨
异苑园 与两个圆相切的圆.....	怨
异苑愿 斯坦纳链.....	缘
异苑缘 鞋匠的刀.....	苑
异苑远 阿波罗尼问题.....	怨
异苑园 开世定理	苑
异苑怨 相交成已知角的圆	苑
第 苑章 密克定理	苑
异苑源 密克定理	苑
异苑怨 垂足三角形与垂足圆	缘
异苑员 西摩松线	远
第 愿章 塞瓦定理与门奈劳斯定理	苑
异苑猿 塞瓦定理与门奈劳斯定理	苑
异苑怨 三个圆的位似中心	怨
异苑员 等角共轭点	苑
异苑员 等距共轭点及其他关系	缘
异苑缘 杂题	远
第 怨章 三个特殊点	愿
异苑怨 垂心与外心的基本性质	愿
异苑怨 垂心组	园
异苑员 重心的性质	怨
异苑愿 极圆	猿
第 园章 内切圆与旁切圆.....	愿
异苑苑 基本性质	愿

异源	代数公式 转换原理	异源
第 5 章	九点圆	异源
异源	九点圆的性质	异源
异源	费尔巴哈定理	异源
异源	西摩松线的进一步的性质	异源
第 6 章	共轭重心与其他特殊点	异源
异源	共轭中线与共轭重心	异源
异源	等角中心	异源
异源	奈格尔点 斯俾克圆 夫尔曼圆	异源
第 7 章	透视的三角形	异源
异源	笛沙格定理	异源
异源	帕斯卡定理	异源
异源	布利安桑定理	异源
第 8 章	垂足三角形与垂足圆	异源
异源	四三角形的垂足三角形与垂足圆	异源
异源	封腾定理 费尔巴哈定理	异源
异源	垂极点	异源
第 9 章	小节目	异源
异源	力学定理 重心 向量的合成	异源
异源	圆内接四角形与它的垂心	异源
异源	莫莱定理	异源
异源	杜洛斯—凡利圆	异源
异源	杂题 神奇的三角形	异源
第 10 章	布洛卡图	异源
异源	布洛卡点及其性质	异源
异源	塔克圆	异源
异源	布洛卡三角形与布洛卡圆	异源
异源	斯坦纳点与泰利点	异源
异源	一些有关的三角形	异源

第 5 章 等布洛卡角的三角形	源
纽堡圆	源
正射影	源
阿波罗尼圆与等力点	源
舒特圆	源
推广	源
第 6 章 三个相似形	源
三角形各边上的相似形	源
一般的三个相似形	源
三角形中的符号索引	源
索引	源
译者赘言	源

第 1 章 引 论

预备知识 假定读者熟悉美国中学通常讲授的平面几何与初等代数,以及最简单的三角原理。假定读者对平面几何中的标准定理有一定的熟悉,如果在读本书之前,复习一下更好。简单的代数化简与运算经常用到,几何关系的表达式经常通过引入三角函数来化简,偶而也利用与它们有关的最基本的恒等式来化简。中学数学课程里的三角知识已足够本书的需要,而自由地运用代数与三角方法对几何的研究大为方便。不再需要更多的数学知识;当然,熟悉高等几何的读者可以常常感觉到本书与其他几何学的关系。

本章将介绍全书所采用的一般原理、方法及观点。数学水平较高的学生对这些原理不会觉得新奇,第一次接触的读者也不会觉得非常困难。

[1]

正负量

有时我们讨论的几何量可以从两个方向中的任一个来度量。通常约定一个方向为正,另一个方向为负。温度计是一个熟悉的例子。例如,沿东西向的街量距离,可以将向东的距离附上正号,向西的附上负号。是,在这段路上行走两次或更多次,不管各次的方向是否相同,结果对出发点的距离与方向等于表示各次行走的数的代数和。类似的例子可以同样说明一般的原理,即某种量的组合可以用它们的度量的代数和表示。这种量

的度量在下面定义 援

最重要的例子是直线上的距离 设 粤,月为任意两点,则 $\overline{粤月}$ 表示从 粤到 月的距离,而 $\overline{月粤}$ 表示从 月到 粤的距离 援其中一个用一个正数表示,另一个是同一个数添上负号 援对一条直线上任意三点 粤,月,悦,有下列重要关系:

$$\overline{粤月} + \overline{月粤} = \overline{粤粤},$$

$$\overline{粤月} + \overline{月悦} = \overline{粤悦},$$

$$\overline{粤月} + \overline{月悦} + \overline{悦粤} = \overline{粤粤},$$

$$\overline{月悦} = \overline{粤悦} - \overline{粤月}.$$

后三式其实是同一事实的不同表现形式 援特别注意最后一式,它将两点间的有向距离,用定点 粤到它们的距离来表示 援由此得出一个有用的方法,即一条直线上各点间的距离都可以这样表示,并且它们之间的关系可以用代数关系来建立 援设在直线 粤悦上的点 韵到各点的距离为

$$\overline{韵粤}, \overline{韵悦}, \text{等等},$$

则 $\overline{粤月}$ 用 $\overline{韵粤} - \overline{韵月}$ 表示,等等 援例如:

异缘 欧拉定理 设 粤,月,悦,阅为一条直线上的任意四点,则

$$\overline{粤月} \cdot \overline{悦阅} + \overline{粤悦} \cdot \overline{月阅} + \overline{粤悦} \cdot \overline{月悦} = 0.$$

因为 $(\overline{韵粤} - \overline{韵月})(\overline{韵悦} - \overline{韵阅}) + (\overline{韵粤} - \overline{韵悦})(\overline{韵月} - \overline{韵阅}) + (\overline{韵粤} - \overline{韵悦})(\overline{韵悦} - \overline{韵月}) = 0$

异缘 角的正负 按照惯例规定:依反时针方向度量的角为正,顺时针方向度量的角为负 援由这规定,我们有关系

$$\angle \overline{粤悦} \overline{悦粤} = -\angle \overline{悦粤} \overline{粤悦},$$

不管直线 粤悦,悦粤的位置如何 援

有时需要给一点到一条固定直线的距离添上符号 援这时习惯上将直线某一侧的点到这直线的距离都添上正号,另一侧的都添上负号 援惯上,将三角形内的点到边的距离定为正的 援

异缘 对于面积,通常不计正负,即认为都是正的,但有时需要

添上符号 面积是由两条(有向)线段的积确定时,符号就是积的代数符号 一种方法是考虑绕这面积的周界行走的方向 如果行走方向为正(即反时针方向),面积规定为正 如果行走方向为顺时针方向,面积为负 在本书中,很少需要区别面积的正负

定义 线段的比 与上面的叙述保持一致,一条直线上两条线段的比,根据这两条线段的方向相同或相反,确定它为正或为负 考虑两个固定的点 A, B 及直线 AB 上另一个任意的点 P 定义 AB 被 P 分成的线段为有向距离 AP 与 BP , AB 被 P 分成的比为 $\frac{AP}{BP}$ 这比的大小、符号与单位长度及直线方向的选择无关 对所有 A, B 之间的点 P , 这比为负; 对线段 AB 之外的点 P , 这比为正 现在设点 P 在整个直线 AB 上移动, 考虑比

$$\text{则越} \frac{AP}{BP}$$

的变化 当 P 在 AB 方向很远处, 则略小于 $\frac{AB}{BP}$ 当 P 趋近于 A 时, 则顺次通过从 $\frac{AB}{BP}$ 到 $\frac{AB}{AP}$ 的所有值; 当 P 通过 A , 向 B 移动时, 则变为 $\frac{AB}{AP}$ 然后顺次通过所有的负值, 在 AB 中点处值为 $\frac{AB}{AP}$ 当 P 趋近于 B 时, 则通过绝对值越来越大的负值 当 P 通过 B 点后, 比为正而且很大; 最后, P 沿 AB 方向移远时, 比递减至极限值 $\frac{AB}{BP}$

于是, 我们看到对这直线上每一点, 除 A, B 外, 这比的值都是确定的; 反过来, 则的每一个值, 除 $\frac{AB}{BP}$ 外, 确定这直线上一个点 这可以代数地叙述并证明如下:

定理 设 A, B 为任意两点, λ 为任一不同于 $\frac{AB}{BP}$ 的数, 则在直线 AB 上存在并且只存在一点 P , 使比 $\frac{AP}{BP}$ 越 λ

证明: 令 $\frac{AP}{BP}$ 越 λ , $\frac{AP}{BP}$ 越 λ 则

$$\frac{AP}{BP} \text{ 越 } \lambda \Rightarrow \frac{AP}{BP} \text{ 越 } \lambda \Rightarrow \frac{AP}{BP} \text{ 越 } \lambda$$

于是所求的关系是