



北京大学物理学丛书

*The Series of Advanced Physics  
of Peking University*

# 特殊函数概论

王竹溪 郭敦仁

北京大学出版社 PEKING UNIVERSITY PRESS



## 作者简介

王竹溪(1911-1983), 1929年入清华大学, 1935年清华大学研究院毕业, 同年入英国剑桥大学, 1938年获博士学位。1938年回国后, 先后任西南联大教授, 清华大学教授兼物理学系主任, 北京大学物理系教授, 北京大学副校长。1955年当选为中科院首批院士。曾任《中国科学》副主编、《物理学报》主编、中国物理学会副理事长、中国物理学会物理学名词审定委员会主任、教育部理科教材编审委员会主任等职。王竹溪先生在理论物理的各领域, 特别是在热力学, 统计物理学和数学物理方面具有很深的造诣。著有《热力学》(1987年获全国优秀教材特等奖)、《统计物理学导论》及《简明十位对数表》, 与郭敦仁合著《特殊函数概论》等, 发表过学术论文30余篇。其中前两种均为我国在该方面的首次自编著作。他还编有《新部首字典》, 收字近5万。



## 作者简介

郭敦仁, 北京大学物理系教授, 1917年出生。早年就读于西南联大物理系。先后在清华大学、北京大学物理系任教, 曾任教育部物理学教材编审委员会委员、中国物理学会物理学名词审定委员会委员。除长期从事数学物理方法及相关课程的教学外, 还讲授过其他多门物理学课程。著有《特殊函数概论》(与王竹溪先生合著)、《数学物理方法》(1987年获全国优秀教材奖)、《量子力学初步》及《电动力学》(与胡慧玲先生合著, 在台湾出版)等, 并有多本译著。

# 特殊函数概论

王竹溪 郭敦仁

北京大学出版社  
北 京

## 图书在版编目(CIP)数据

特殊函数概论/王竹溪 郭敦仁. —北京:北京大学出版社,  
2000.5

(北京大学物理学丛书)

ISBN 7-301-04530-1

I. 特… II. 王… III. 特殊函数-概论 IV. 0174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07216 号

书 名 特殊函数概论

著作责任者. 王竹溪 郭敦仁

责任编辑 周月梅

责任校对 于惠敏

标准书号: ISBN 7-301-04530-1/O · 464

出版者 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址 <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 62752015 发行部 62754140 编辑部 62752032

电子信箱: [zpup@pup.pku.edu.cn](mailto:zpup@pup.pku.edu.cn)

排版者. 北京高新特公司激光照排中心

印刷者. 北京大学印刷厂印刷

发行者. 北京大学出版社

经销者: 新华书店

850×1168 32 开本 22 25 印张 540 千字

2000 年 5 月第 1 版 2000 年 5 月第 1 次印刷

定 价: 34.00 元

The Series of Advanced Physics of Peking University

# Introduction to Special Function

Wang Zhuxi   Guo Dunren

Peking University Press  
Beijing

## 内 容 简 介

本书较系统地讲述一些主要的特殊函数,如  $\Gamma$  函数、 $\zeta$  函数、超几何函数、勒让德函数、合流超几何函数、贝塞耳函数、椭圆函数、楕球谐函数、马丢(Mathieu)函数等,同时也阐明一些在讨论特殊函数时常用的概念和理论,如关于函数的级数展开和无穷乘积展开,渐近展开,线性常微分方程的级数解法和积分解法等.在各章之末还附有习题,习题中包含了一些有用的公式作为本书正文的补充.

本书可供数学系、物理系的师生以及数学、物理和工程技术界的研究人员参考之用.

## 《北京大学物理学丛书》 编委会名单

主 任：高崇寿

副 主 任：（按姓氏笔画排，下同）：

刘寄星 秦旦华 聂玉昕

阎守胜 黄 涛

编 委：邹英华 邹振隆 宋菲君 吴崇试

林纯镇 俞允强 夏建白 曾谨言

韩汝珊 解思深 瞿 定

常务编委：周月梅



## 前 言

物理学是自然科学的基础,是探讨物质结构和运动基本规律的前沿学科。几十年来,在生产技术发展的要求和推动下,人们对物理现象和物理学规律的探索研究不断取得新的突破。物理学的各分支学科有着突飞猛进的发展,丰富了人们对物质世界物理运动基本规律的认识和掌握,促进了许多和物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的进步。物理学的发展是许多新兴学科、交叉学科和新技术学科产生、成长和发展的基础和前导。

为适应现代化建设的需要,为推动国内物理学的研究、提高物理教学水平,我们决定推出《北京大学物理学丛书》,请在物理学前沿进行科学研究和教学工作的著名物理学家和教授对现代物理学各分支领域的前沿发展做系统、全面的介绍,为广大物理学工作者和物理系的学生进一步开展物理学各分支领域的探索研究和学习,开展与物理学紧密相关的交叉学科和技术学科的研究和学习提供研究参考书、教学参考书和教材。

本丛书分两个层次。第一个层次是物理系本科生的基础课教材,这一教材系列,将在几十年来几代教师,特别是在北京大学教师的教学实践和教学经验积累的基础上,力求深入浅出、删繁就简,以适于全国大多数院校的物理系使用。它既吸收以往经典的物理教材的精华,尽可

能系统地、完整地、准确地讲解有关的物理学基本知识、基本概念、基本规律、基本方法;同时又注入科技发展的新观点和方法,介绍物理学的现代发展,使学生不仅能掌握物理学的基础知识,还能了解本学科的前沿课题和研究动向,提高学生的科学素质。第二个层次是研究生教材、研究生教学参考书和专题学术著作。这一系列将集中于一些发展迅速、已有开拓性进展、国际上活跃的学科方向和专题,介绍该学科方向的基本内容,力求充分反映该学科方向国内外前沿最新进展和研究成果。学木专著首先着眼于物理学的各分支学科,然后再扩展到与物理学紧密相关的交叉学科。

愿这套丛书的出版既能使国内著名物理学家和教授有机会将他们的累累硕果奉献给广大读者,又能对物理的教学和科学研究起到促进和推动作用。

《北京大学物理学丛书》编辑委员会

1997年3月

## Preface

Physics is the foundation of natural sciences, a leading discipline of studying structures of matter and basic laws of motion. For several decades, driving by the demands of developing technology, the breakthrough in the studies of physical phenomenon and the laws of physics never end. During this period, all branches of Physics grew very fast and our knowledge of the basic laws governing the motion of the physical world was highly enriched. The growing of physics accelerated the progress of many physics related areas and technologies. The development of physics provided grounds and guidance for the birth and the growth of those new branches of physics, related areas and new technologies.

In order to catch up the main stream of the modernization and to give an impetus to scientific research and to improve teaching of physics in China. We decided to publish "*The Series of Advanced Physics of Peking University*". We invited those distinguished physicists and professors who worked in the frontier of physics to give series introductions to all branches of modern physics and recent developments in these fields. This series, as a consequence, provides textbooks and references for physicists and physics students in their studies of all branches of physics, related areas and technologies.

This series is divided into two sub-series of different levels, the first sub-series includes the textbooks of undergraduate

physics written by experienced teachers in Peking University in past decades. These textbooks were written concisely with deep insights and easier expressions, which adopt essences of physics textbook classics, explain fundamental concepts, laws and methods of physics in a systematic and rigorous way. In addition, these textbooks properly introduced the new approaches and the latest developments of physics for educational purposes. This sub-series is suitable for teaching of undergraduate physics for most universities and institutes in China. The second sub-series includes graduate textbook, references and academic writings. This sub-series focuses on the latest developments and accomplishments in the active subjects of relevant research with international interests and introductions to those of fast developing research fields. The topics of academic writings mainly cover all branches of physics, but it will be generalized to closely related areas.

We wish the publication of this series could provide an opportunity for leading physicists and physics professors in China to show their fruitful accomplishments to general audience and to give an impetus to teaching and research in physics.

Editorial board of

*"The Series of Advanced Physics of Peking University"*

March 1997

# 序

## 世纪之交的物理学

20 世纪即将过去。物理学的革命,这场革命推动的整个自然科学和应用技术的伟大变革,以及这些变革对人类社会的影响,将作为这个世纪的一个重要标志而载入史册。这段令人神往的历史,给正处在世纪之交的我们以什么样的启示呢?

首先的启示是作为研究物质结构和运动的基本规律的物理学,总是生机勃勃、不断地开辟自己前进的道路的。1803 年道尔顿提出了近代的原子论,认为世间万物都是由几十种不同种类的原子(那时只认识到三十来种)组成的。经过近一个世纪多方面的研究和争论,科学界接受了和发展了这个学说。到 19 世纪 60 年代,元素的数目增到六十多种,而且还认识到不同元素的性质是有内在联系的,门捷列夫的周期律描述了这种联系。19 世纪末,物理学家们发现了电子、 $\alpha$  粒子、放射性、X 射线……发现原子是可以改变的,原子不是物质构成的最小单元。20 世纪初卢瑟福建立了原子结构的“行星”模型。探讨原子结构模型和经典物理学之间的矛盾,导致了量子力学的诞生,产生了现代原子、分子物理、凝聚态物理、原子核物理……历史也许有某种类似性。在这个世纪之交,物理学又

正在进入一个新的层次。本世纪 50 年代,人们找到作为构成物质的基石的基本粒子有三十来种,也认识到它们之间的相互作用和相互转化。探索这些“基本”粒子的更深层次的构造的努力,近三十年来取得十分辉煌的成就。三代夸克和三代轻子的粒子模型、电弱统一理论和量子色动力学,这被称作粒子物理的标准模型的建立以及它在各方面的成功,正是标志着物理学正在进入物质世界的一个更深的层次,毫无疑问这将是物理学历史上一个具有划时代意义的大事。但是,大多数的物理学家都会同意,从本质上说,目前的标准模型还是一个唯象的模型。在欢呼它取得的多方面的胜利时,也要看到同时提出了一系列带本质性的问题。也许可以说,进入这个新层次将带来的最本质的新的物理,还没有来到我们中间。19 世纪末的物理学家没能猜测到,进入比原子更深层次的探索,会在什么时候和在哪儿点上带来新的物理,20 世纪末的人们也不能奢望会比前辈高明多少!

20 世纪物理学的革命,表现出人类理性思维的伟大胜利。狭义相对论,特别是广义相对论,以它深邃的思考,严整的形式和美丽的表述,震撼着一代又一代的物理学家工作者的心灵。但是,爱因斯坦也在他那无与伦比的思考导致的宇宙模型面前困惑了。感谢近四十多年来一大批物理学家和天文学家辛勤的努力和非凡的勇气,这个难以想象的革命性的关于宇宙的概念和图象建立起来了,并得到科学界多数人的认同。在大致一百五十多亿年前,宇宙从一个具有无限大的密度和具有无限大的时空曲率的点开始了。人们猜想,在宇宙膨胀,密度和温度降低中,

到  $10^{-44}$  秒时,重力相互作用和其他相互作用分离开来;到  $10^{-36}$  秒时,强相互作用和电弱相互作用分离;直到  $10^{-10}$  秒时,弱相互作用才与电磁相互作用分离,世界变成了我们现在所处的有四种基本相互作用的世界。到  $10^{-6}$  秒时,夸克开始结合成强子,也许应当说,只有从此之后的物理才是当代物理学家可以比较有把握来谈论的。直到  $10^{12}$  秒(也就是三万多年)后,原子才开始出现。这样一个综合了亚核子尺度(小于  $10^{-14}$  厘米)的物理和宇观尺度(大于  $10^{24}$  厘米)的宇宙的演化模型的建立,可以说是人类认识史上一个最具有革命性的、划时代的伟大事件,当代人还难以全部理解它的意义。这个宇宙学的标准模型和近年来天体物理学家取得的辉煌的成就,在物理学的面前提出了十分严峻的具有本质的挑战。如何理解这样有限而无界的时空和它的奇点?什么是在这样演化中的物质和运动规律?为什么宇宙学中有那么多“巧合”?……总之,面对着如此壮观而又如此神奇的宇宙之迹,除了由衷的赞美和敬佩,人们不禁想起爱因斯坦的话:“自然界最不可理解的就是它竟然可以理解!”

本世纪物理学的发展给我们的又一个教益是:物质世界是有层次的,反映物质世界的物理学规律也是有层次的。每一层次的物理都植根于更深层次的物理学。但是,每个层次的物理都是在真实的意义上不可穷尽的。在大自然千姿百态的丰富性面前,那些断言某某学科将不会有什么发展的说法总是被事实所粉碎的。经典力学、经典电动力学并不因为量子力学、量子电动力学的发展而被排斥出物理学,近年来我们还不停地学习它们新的、有

深刻意义的进展。光学和凝聚态物理学半个世纪来的巨大的、令人应接不暇的发展提供了最能说服人的例子。也许人们常常由于赞颂它们在实际应用上的威力的同时，不够强调它们在物理学学科上的意义。但如果我们想到在当代粒子物理和宇宙学中最重要观念，如相变、对称性破缺、拓扑性缺陷、红外发散等等，都首先来自凝聚态物理学，而当代凝聚态物理又都广泛地而且本质地使用量子场论的语言和技术时，我们就会确信物理学的丰富性、多样性和统一性，“只有一个物理学”！

在 20 世纪，物理学的基本概念和技术已被应用到所有的自然科学领域。物理学与其他自然科学学科之间的边缘领域，一定意义上是当代自然科学中最富于获得丰硕成果的机遇的领域。边缘领域的发展，又反过来丰富、加深和支持了物理学本身的发展。量子力学和现代物理实验技术的应用，大大推进了现代化学的发展。对分子结构、性能和反应机理的研究，又丰富和推动了现代物理的进步。而且，如果没有现代化学的支撑，现代物理学中好些分支学科都不能产生和发展。地球科学、生命科学与物理学的边缘领域的发展，也将会是类似的情景。特别令人感到兴奋的一个新事物是近二三十年复杂性科学的发展。数学、物理学，特别是物理学与化学、地球科学、生命科学、各种应用技术科学的边缘领域研究的发展，都使人们相信，在复杂性（多维度，多组元，非线性，非平衡和开放的）系统的结构、性能和演化中，有一些具有普遍性的运动规律和运动模式。人们自然回想到，开始于上一世纪中叶的研究能量守恒和转化的热力学和分子运动论的发

展,本世纪统计物理和涨落理论的发展。有理由相信一门有重要的基础科学意义的学科,复杂性物理正在形成。它现在已经显出可能对物理学中一些最基础的问题,如必然性和随机性,无序化的倾向和有序结构的生成,不同层次的结构自相似性等,作出有深刻物理意义的回答。也许,历史会表明,这也是人类认识史上又一个划时代的事物,同时,无疑地会对化学、地球科学、生命科学、认知科学和各种应用技术发生巨大的影响。

物理学作为一门最基础的自然科学,它的发展动力是深深地植根于人类对真理的非功利的追求。但是,历史的发展将越来越有力地证明,正是这种非功利的追求给人类带来最大的收益。本世纪发生的主要源于物理学的进展的技术革命,就是最有说服力的例子。当代技术进步的主要推动力来自纯学科性的基础研究。研究室和实验室中纯学科性的研究转变为重要的应用技术,实际生产和社会发展中遇到的问题转化为有基础学科意义的研究课题,两者关系愈来愈密切,周期愈来愈短。与之相应,在现代,杰出的基础科学研究人材和优秀的应用技术开发人材在科学素质上的要求变得更加一致了。在世纪之交,无论是制造业还是服务业,也无论是材料、信息、能源、交通、环境等技术部门,都在呼唤着新的技术变革。而认真考察就会发现,多数这些变革都主要基于物理学近年的进展。21世纪物理学毫无疑问仍是技术进步的主要源泉。

物理学的发展从来就对人类社会思想、文化发生巨大影响。20世纪的物理学革命就更是这样。人类社会进步的一个主要动力便是科学精神,现代科学精神的典范和