随 机 数 学 引 论

林元烈 、梁宗霞 编 著

清华大学出版社

内 容 简 介

本书的前身是清华大学自动化系、计算机系开设“随机数学引论”课程时所使用的讲义,此次出版对其做了系统的修改.书中包括:随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、数字特征、独立随机变量序列的极限定理、泊松信号流、随机游动与马尔可夫链、布朗运动、参数估计、假设检验共 10 章内容.

本书可供高等院校(特别是信息类专业)的学生作为教材使用,也可供教师和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

随机数学引论/林元烈,梁宗霞编著.—北京:清华大学出版社,2003

ISBN 7-302-06346-X

Ⅰ.随… Ⅱ.①林… ②梁… Ⅲ.①随机过程 ②概率论 Ⅳ.O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 010099 号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研大厦,邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑:刘 颖
印 刷 者: 印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开 本:850×1168 1/32 印张:13.125 字数:326 千字
版 次:2003 年 3 月第 1 版 2003 年 3 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 7-302-06346-X/O·285
印 数:
定 价: 元

序　　言

随机数学涉及 4 个主要部分:概率论、随机过程、数理统计与随机运筹,概率论是后 3 者的基础 .本书主要介绍初等概率论、统计推断及几个典型随机过程的基本概念、理论、方法及应用 .随机数学是研究随机现象统计规律性的一个数学分支,大约在 17 世纪欧洲的数学家们就开始探索用古典概率来解决赌博提出的一些问题 .后来,关于诸如人口统计,天文观测,产品检查和质量控制,以及天气、水文与地震预报等社会问题和自然科学问题的研究,大大促进了随机数学的发展 .在 17～19 世纪,经过伯努利(Bernoulli),拉普拉斯(Laplace),马尔可夫(Markov)等著名数学家的努力,随机数学有了长足的发展,但它严格的数学基础却是在 20 世纪 30 年代由前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)发表了名著《概率论的基本概念》(1933 年)以后建立的 .在这本著作中,他用近代测度论的思想,总结了前人的成果,提出了概率论的公理化体系,从而为近代概率论奠定了严密的理论基础 .此后,随机数学的理论研究与广泛应用获得了飞速的发展,至今它的基本理论与思想已渗透到现代科学技术、经济、管理等各个领域 .例如:

(1) 概率论与随机过程论的研究为统计物理学奠定了数学基础,为布朗(Brown)运动、热噪声、物理现象、信息科学、现代金融等提供了数学模型 .

(2) 泊松(Poisson)信号流、马尔可夫过程、时间序列、数理统计在信息科学、生物医学、控制与预测等领域均有广泛的应用 .

(3) 随机运筹与数理统计已成功地应用于管理科学、通信、生

产与销售、随机环境与竞争条件中的决策优化等方面.

(4) 随机数学与其他数学分支有愈来愈明显的相互渗透,例如随机分析在偏微分方程、复杂性计算、运筹优化中成为强有力的前沿工具.

(5) 在金融与经济领域中,随机微分方程与数理统计已在期权定价、投资风险分析与优化等金融数学中扮演主角.

总之,在现实中所遇到的系统与对象避免不了随机性与噪声的干扰,所以研究的对象本身就需要随机模型,这样就必须掌握和运用随机数学的理论与方法.可以预期,在人类社会面对以信息科学与生物科学为标志的新时代,以及知识更新愈来愈快、竞争环境愈来愈激烈(在某种意义下)的未来,随机数学的理论与方法将会更为迅速地发展与普及,随机数学的应用将愈来愈广泛地渗透到人类活动的各个方面.这样,我们就应该对高等学校的同学(特别是重点高等学校)掌握随机数学基础提出更高的要求.

基于上述考虑,本书注重以下诸点:

(1) 着眼于引发兴趣,使读者领悟其思想、魅力与威力.

(2) 揭示概念的来源及背景、模型的提炼与特性以及它们的应用和发展的踪迹.

(3) 对于随机事件的表示、转化与分解(特别是用随机变量表示的事件及分解)等重要基本功予以足够的重视.

(4) 突出全概率公式(及其推广)中所蕴含的基本思想与方法,把它作为贯穿本书的主导线索之一,并加以阐明和应用.

(5) 条件数学期望作为随机数学最基本的概念之一,本书力求用初等的、便于直观确切理解的方法描述它的定义与重要性质.这是因为现代随机数学及其应用常常更关心的是随机变量之间的各种关系,而条件数学期望是刻画不同随机变量之间各种关系的最佳工具.

(6) 着重用概率的观点与方法去讨论与领略若干最基本的,

且至今仍有活力与潜力的随机过程的主要特征与风采.

(7) 着力描述统计推断的直观依据、原理,品尝其独特的思维韵味.

(8) 选择几个最简单且至今仍具无穷魅力与威力的典型随机过程,阐明其由来与背景,提炼主要特性及其应用与推广.这些模型既是初等概率论理论与方法的综合运用与发展,又是读者深入复习、检验与巩固初等概率论的极好素材.

请读者注意,对书中有些较抽象的概念,初学者可以先跳过这些内容(特别是目录中加“*”的部分),这样做不会影响掌握后面的基本内容.

本书是在第一作者编写的讲义《随机数学引论》的基础上修改而成的本科生教材,亦可作为研究生、教师、工程技术与管理人员的参考书.本书的编写得到清华大学数学科学系同仁,自动化系及计算机科学系的教师及学生的鼓励、帮助与支持.李敬逸、康波大、司良省、石春华、林映侠参与本书的打印、整理与校对.作者在此对他们表示衷心的感谢!

限于作者水平,不妥与错误难免,敬请指正.

编　者

2002.8

目　　录

第 1 章

随机事件与概率

1.1　样本空间与随机事件

1　随机现象

自然界中有许多现象在一定条件下必然会发生.例如:同性电荷必然互相排斥;在标准大气压下,水加热到 100℃必然沸腾等,这类现象称为确定性现象.在一定条件下,必然出现的结果称必然事件,必然事件的对立面是不可能事件.

然而自然界中还存在大量的非确定性现象.例如,观察某一商店每天来的顾客数与销售商品的数额都不是确定的;正在放射 α 粒子的放射性物质,每天在规定的同一时间内放射的粒子数,事先无法确定.这类现象的共同点是:在基本条件保持不变的情况之下,时而出现这样的结果,时而又出现那样的结果,而且事先无法断言出现的究竟是哪一种结果,这类现象就称为随机现象.

2　随机试验

直观地讲,观察(或量测)在一定条件下随机现象出现的结果,即称做随机试验(简称试验).进行一次试验就是在特定条件实现一次并观察其结果.在一次试验中,某个结果是否出现具有一定的偶然性.比如说,我们掷一次骰子,就可以看成是一次试验,因为掷骰子出现的点数是无法预先确定的,即试验的结果是偶然的、随机的.但许多实践早已证明:当进行大量的重复试验时,其结果就会

出现某种固有的规律性.

例如,在投掷一枚质地均匀的硬币时,只投掷一次时,投掷的结果是正面还是反面是无法确定的,但当大量重复投掷硬币,就可以看到出现正面的次数约占总试验次数的一半.又如某人打靶射击,若射击次数不多,靶上的弹着点似乎是随意分布的,但倘若进行大量的重复射击时,弹着点的分布就逐渐呈现规律性:大体上它们关于靶中心对称,靠近靶心的弹着点密,偏离靶心越远弹着点越稀少,且弹着点落在靶内任意指定区域的次数与射击次数 n 之比(频率)大体上保持稳定,且 n 越大,其频率稳定性就愈加明显,这种在大量重复试验中随机现象所呈现的固有规律,通常称之为统计规律.

为了研究方便,有时也会把具有固定结果的试验,看成是随机试验的极端情形.有时,又需要把几次试验作为一个整体合起来看成一次随机试验,例如:可以把连续掷3次骰子看成是一次随机试验.

若试验具有下列共同特征:

(1) 在相同的条件下,试验可重复进行;

(2) 试验的一切可能结果是预先可以明确的,但每次试验前无法预先断言究竟会出现哪个结果.

则称之为随机试验,简称试验,记作 E 或 E_1, E_2 等.例如:

E_1: 掷一枚硬币,观察正面或反面出现的情况.

E_2: 记录某一个服务台在时间为8:00～9:00之间到来的顾客数.

E_3: 在有噪声干扰的条件下,测量线路某一终端电压.

3　样本空间

对于随机试验 E,以 ω 表示它的一个可能出现的试验结果,称 ω 为 E 的一个样本点.样本点的全体称为样本空间,用 Ω 表示.

即 $\Omega=\{\omega\}$.

从集合论的观点看,样本空间 Ω 是由一切可能结果所构成的集合,而每个样本点 ω 是集合 Ω 中的元素 .对于上面的随机试验有:

E_1: 掷一枚硬币一次,观察出现正、反面的情况,则 E_1 的样本空间为 $\Omega=\{\omega , \omega\}$,其中 ω 表示出现的是正面,ω 表示出现的是反面,ω 与 ω 分别为 Ω 的样本点 .

E_2: 服务台在时间为 8:00～9:00 之间到来的顾客数,则 $\Omega=\{n \mid n=0,1,2,\cdots\}$.可见 Ω 包含可列无穷多个样本点 .

E_3: 在有噪声干扰下,测量某终端电压,则 $\Omega=\{x \mid x\in \mathrm{R}\}$,其样本点有不可数无穷多个 .

注　在同样的试验条件下,由于试验的考察侧重点与目的不同,可能选择不同的样本空间,这是初学者必须要注意的 .例如:

E_4: 一枚硬币投掷两次观察出现正面的次数(注意此时投掷两次硬币才算完成一次实验) .$\Omega_4=\{0,1,2\}$,其中,0,1,2 分别表示出现正面的次数,共有 3 个样本点 .

E_5: 一枚硬币投掷两次观察出现正、反面的次序,则 $\Omega_5=\{\omega\omega, \omega\omega', \omega'\omega, \omega'\omega'\}$(其中:ω代表出现正面,ω′代表出现反面),包含 4 个样本点 .

4　随机事件

通常,对于某个随机试验,在一次试验中可能出现也可能不出现的事件,就称为随机事件 .用大写英文字母 A, B, C, A_i 等来表示 .例如:

在实验 E_1 中,$A_1=\{\omega\}$表示出现正面这一事件,$A_2=\{\omega\}$表示出现反面这一事件 .A_1, A_2 都是事件 .

在 E_2 中,$A=\{n \mid 0\leq n\leq 10\}$表示在时间为 8:00～9:00 之间出现的顾客数不超过 10 人这一事件 .

在 E_5 中, $A=\{\omega\omega,\omega\omega'\}$表示掷第二次出现的是正面这一事件.

从集合论的观点看:粗略地说,所谓随机事件就是样本空间 Ω 中人们感兴趣的某些子集.

对于事件 A　Ω,若 Ω 中的某一样本点 $\omega(\in A)$在本次实验中出现了,则称该次试验中事件 A 发生;若 $\omega\notin A$,即 ω 在本次实验中没有出现,则称该次试验中 A 不发生.

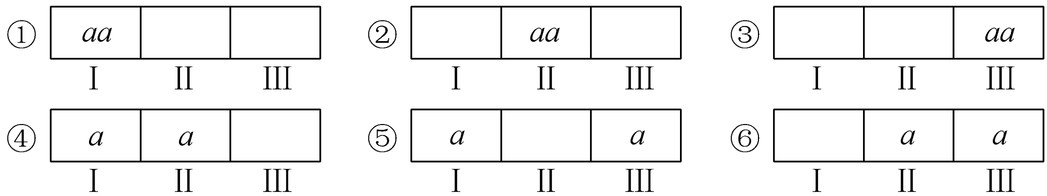
从随机事件的定义可以看出随机事件包含着两个极端情形.其一是在任何一次试验中必然出现的事件,称为必然事件.由于样本空间 Ω 在每次试验中必定出现(无论哪一个 ω 出现,均有 $\omega\in\Omega$),故 Ω 是必然事件.另一种是在固定的试验条件下不能发生的事件,称为不可能事件,用空集　表示不可能事件.

例 1.1　将一个红球 a,一个白球 b,随机地放在编号分别为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ的盒子中,观察两个球放置的所有可能结果,如下图用竖线表示盒壁,全部结果表示如下:

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
①	ab			②		ab		③			ab
④	a	b		⑤	a		b	⑥		a	b
⑦	b	a		⑧	b		a	⑨		b	a

若用记号 $\omega_k(1\leq k\leq 9)$表示上面第 k 个结果(样本点).记:
A = 至少有一个盒放入两球, B = 第一盒有球, C = 第二盒无球, D = 每盒恰有一球, E = 至少有一盒是空的;则 $A=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $B=\{\omega_1,\omega_4,\omega_5,\omega_7,\omega_8\}$, $C=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5,\omega_8\}$, $D=$　, $E=\Omega$.

例 1.2　若将两个不可辨的球(例如两个同样的红球),随机地放在编号分别为Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ的盒子中,观察其放置的可能结果,若球用 a 表示,则其样本点为:



若用 $\omega_k (1\leq k\leq 6)$表示上面第 k 个样本点,记: A = 至少有一盒有 2 球, B = 第一盒有球, C = 第二个盒是空的,则相应的事件可以表示为:

$$A = \{\omega_1 ,\omega_2 ,\omega_3 \}, \quad B = \{\omega_1 ,\omega_4 ,\omega_5 \}, \quad C = \{\omega_1 ,\omega_3 ,\omega_5 \} .$$

再如: 上一例中球与盒都是不可区分的,则上例中 $\omega_1 \sim \omega_3$ 3 个样本点不再区别,同样 $\omega_4 \sim \omega_6$ 3 个样本点也不再区别 .于是上例中的 6 个样本点,在本例中就分为两类,即“ 两个球放在同一盒中”和“ 两个球放在不同盒中”,即本例应当有两个样本点: ω= 两球放在同一盒中, ω'= 两球放在不同盒中 .

对于给定的一个随机试验,如何确切而恰当地建立与表示其样本空间,是建模和解决问题的重要一环,这一点在讨论古典概型时务请读者注意 .

5 事件的关系与运算

从集合论的观点看,事件既然是一些集合,就必然存在着事件之间的关系,以及由若干事件来定义(或表示)的新事件——即事件的一些运算及其规则 .在以下的叙述中,设 Ω 是给定的样本空间, A, B, C, A_i , B_i ,…均表示为其中的事件 .

事件有如下关系 .

(1) 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $A \subset B$(或 $B \supset A$) .由于事件 A, B 均是 Ω 的子集,因此从集合论的观点看来,若 " $\omega\in A$ 有 $\omega\in B$,则 $A \subset B$.

(2) 等价关系

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 等价,或称 A 等于 B,记作

$A=B$.即" $\omega\in A$,必有 $\omega\in B$,而且 " $\omega\in B$,必有 $\omega\in A$.$A=B$ 表示 A 与 B 是同一事件 .在概率论中,对同一事件给出不同的等价表示形式是一种重要的技巧 .

(3) 事件的交

定义 $A\cap B$ 为事件 A,B 同时发生,称 $A\cap B$ 为 A 与 B 的交,简记作 AB .即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

推广到 n 个事件:定义 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交,即

$$\bigcap_{k=1}^{n}A_k=\{\omega\mid\omega\in A_k,1\leq k\leq n\}.$$

记 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为事件 $A_1,\cdots,A_k,\cdots$ 同时发生,称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为 $A_1,\cdots,A_k,\cdots$ 的可列交,即 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\{\omega|\omega\in A_k,k\geq1\}$.

(4) 互不相容

A,B　Ω,如果 A,B 不可能同时出现,即 $AB=$　,则称两事件互不相容(或称互斥、互不相交) .

(5) 事件的并

定义 $A\cup B$ 为事件 A,B 中至少有一事件发生,称 $A\cup B$ 为 A 与 B 的并 .即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

推广到 n 个事件:记 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为事件 $A_k(k=1,\cdots,n)$ 至少有一个事件发生,则称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并,因此

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\{\omega\mid\omega\in A_1,\text{或}\ \omega\in A_2,\cdots,\text{或}\ \omega\in A_n\}.$$

同样,定义 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并 .

若 A,B 互不相容时,记 $A\cup B=A+B$,称为 A 与 B 的和 .若

$A_1, \cdots, A_k, \cdots$ 互不相容,则记

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \quad \overset{\text{def}}{} \quad \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \overset{\text{def}}{} \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k .$$

(6) 对立事件

定义 $\overline{A}$ 为 A 不发生的事件,称事件 $\overline{A}$ 为事件 A 的逆, 或称 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件 .即 $\overline{A} = \{\omega | \omega \in \Omega$, 但 $\omega|\quad A\}$.若记 $B = \overline{A}$,则

$$B = \overline{A} \qquad \begin{aligned} A \cup B &= \Omega, \\ AB &= \quad . \end{aligned}$$

(7) 事件的差

“ 事件 A 发生,但事件 B 不发生 ”也是一个事件,记为 $A \setminus B$,称 $A \setminus B$ 为事件 A 与 B 的差 .即 $A \setminus B = \{\omega | \omega \in A$ 且 $\omega|\quad B\}$. 若 $B \quad A$,记 $A \setminus B \quad \overset{\text{def}}{} \quad A - B$.

事件的运算规则如下 .

① 交换律: $A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$;

② 结合律: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A(BC) = (AB)C$;

③ 分配律: $A(B \cup C) = AB \cup AC, (A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$, $A(B \setminus C) = (AB) \setminus (BC)$;

④ 德 · 摩根(De Morgan)定律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

以上公式可以推广到有限个事件及可列个事件:

$$A \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \quad = \bigcup_{k=1}^{\infty} (AB_k), \qquad A \cup \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \quad = \bigcap_{k=1}^{\infty} (A \cup B_k),$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}, \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} .$$

我们只证明分配律和德 · 摩根定律,其余留给读者作为练习 .

分配律: $A(B \cup C) = AB \cup AC$

证明　$\omega \in A(B \cup C) \quad \omega \in A$ 且 $\omega \in (B \cup C)$,

而 $\omega \in (B \cup C) \quad \omega \in B$ 或 $\omega \in C$,

从而得

$$\omega \in A(B \cup C) \quad \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B \text{ 或 } \omega \in C,$$

即 $\omega \in AB$ 或 $\omega \in AC \quad \omega \in AB \cup AC$, 故 $A(B \cup C) = AB \cup AC$.

德 · 摩根定律: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

证明 对于 $\omega \in \overline{A \cup B} \quad \omega | \ A \cup B \quad \omega | \ A$ 且 $\omega | \ B \quad \omega \in \overline{A}$, 且 $\omega \in \overline{B} \quad \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$, 故 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

6 事件序列

设 $A_k \quad \Omega(k = 1, 2, \cdots)$, 称 $\{A_k, k \geq 1\}$ 为事件序列. 若 " $n = 1, 2, \cdots, A_n \quad A_{n+1}$, 则称之为单调增序列, 定义 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n \overset{\text{def}}{\quad} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 称 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ 为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的极限. 若 " $n = 1, 2, \cdots, A_n \quad A_{n+1}$, 则称之为单调减序列, 定义 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n \overset{\text{def}}{\quad} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 称 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ 为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的极限. 单调增(事件)序列和单调减(事件)序列统称为单调事件序列.

对于一般事件序列 $\{A_n, n \geq 1\}$, 令 $B_n = \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $C_n = \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 显然 $B_n \quad B_{n+1}$, $C_n \quad C_{n+1}$, 因此 $\{B_n, n \geq 1\}$ 和 $\{C_n, n \geq 1\}$ 有极限.

令 $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n \overset{\text{def}}{\quad} \limsup\limits_{n} A_n = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n$ 称之为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的上极限, 它由属于无穷多个 A_n 的样本点构成.

令 $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n \overset{\text{def}}{\quad} \liminf\limits_{n} A_n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} A_n$, 称之为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的下极限, 它由自某个 m 后属于所有 $A_n(n \geq m)$ 的样本点构成, 易证恒有 $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n \quad \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$.

当 $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$ 时, 称 $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} A_n$ 为 $\{A_n, n \geq 1\}$ 的极限.

例 1.3 设事件 $A, B \quad \Omega$, 令 $A_{2n+1} = A$, $A_{2n} = B \ (n \geq 1)$, 则

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n = A \cup B, \quad \underline{\lim_{n \to \infty}} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n = AB.$$