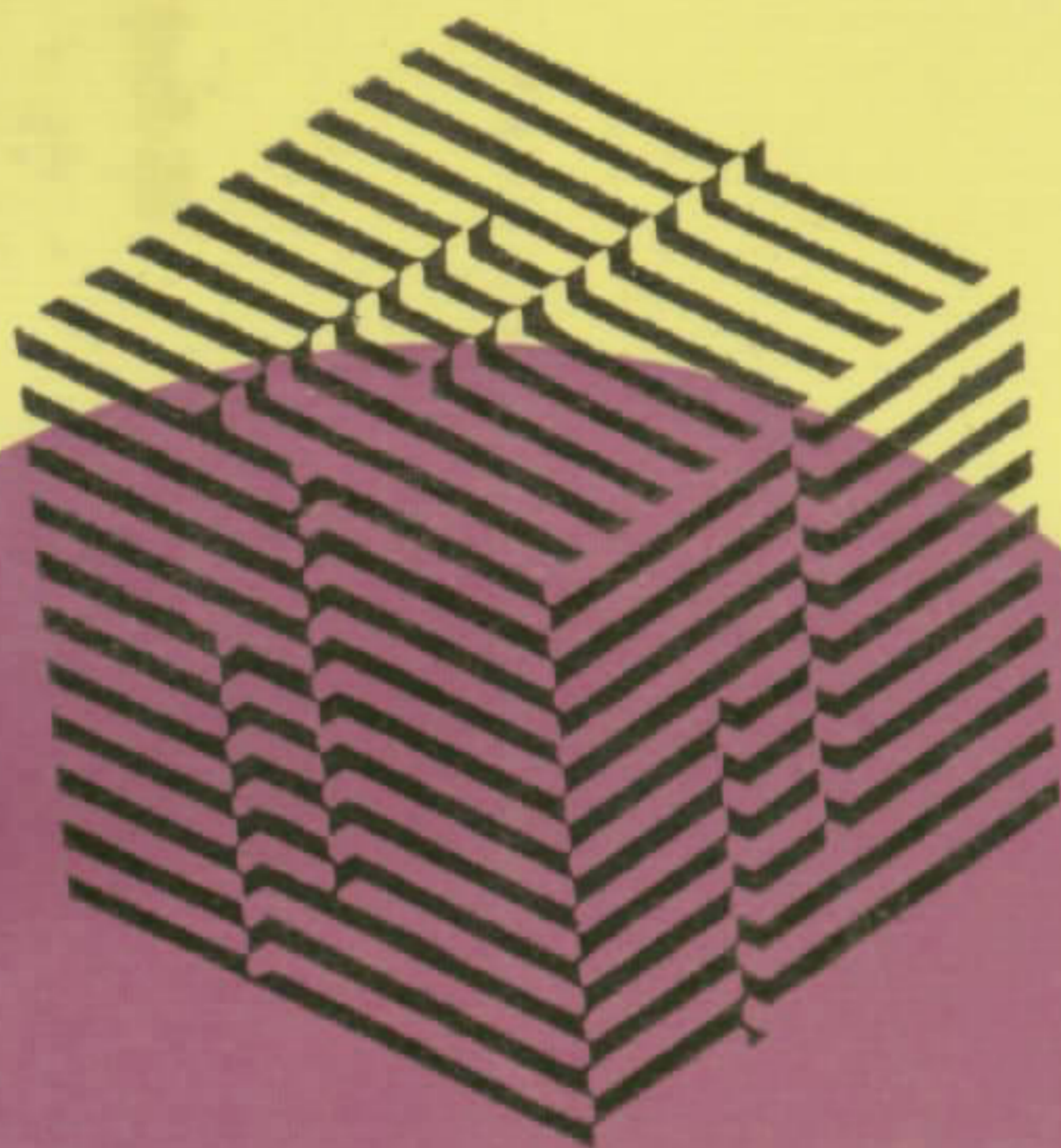


北京大学科学与社会丛书



# 数学与文化

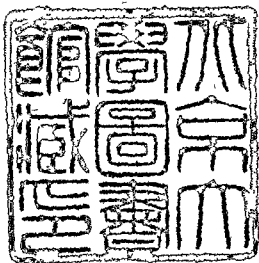
邓东皋 孙小礼 张祖贵 编

北京大学出版社

北京大学科学与社会丛书

# 数学与文化

邓东皋 孙小礼 张祖贵 编



北京大学出版社

## 内 容 简 介

本书选编了国内外一些著名的数学家和哲学家对数学进行哲学和文化探索的文章 19 篇。这些文章阐发了各种观点和对所谈问题的深刻理解，其中大多是影响深远、被引为经典的名作。本书分两部分。第一部分讨论数学的本质，着重介绍近代数学哲学研究的基本问题以及一些有代表性的观点；第二部分是近代数学的一些介绍。全书从各个侧面阐发了数学在文化中的地位。

### 数 学 与 文 化

邓东皋 孙小礼 张祖贵 编

责任编辑：李怀玺

北京大学出版社出版

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\* -

850×1168 毫米 32 开本 11.5 印张 290 千字

1990 年 5 月第一版 1990 年 5 月第一次印刷

印数：0001-3,000 册

ISBN 7-301-01013-3/B·076

定价：4.95 元

## 献 词

科学——人类的智慧、理性和文明。就象人类的生存离不开太阳，社会的进步离不开科学。科学好比是人类创造出来的一轮“精神的太阳”，也给我们光和热，照亮人的思路，激发人的才能。然而科学毕竟不是宇宙的太阳，如果没有社会的哺育，科学就不能成长，难以放射光芒。

马克思、恩格斯曾把科学誉为“历史的有力杠杆”，“最高意义上的革命力量”。在科学以空前的规模和速度突飞猛进的今天，从各种角度、各种层次来考察和探讨：科学给人们提供什么样的观念、怎样革新人的思想？科学怎样推动社会前进？社会又怎样有效地发挥科学的功能和促进科学的发展？都是十分有意义的研究课题。

北京大学科学与社会研究中心组织编辑的这套丛书就是为这些课题的研究提供一块学术园地。希望编者、著者们在这里辛勤耕耘、开花结果。严肃的、持之有据的研究成果必定会有不同的声音和色调，相信都是可以本着科学的精神互相讨论和借鉴的。我们期望在这个园地上出现“百花齐放，百家争鸣”的局面，以迎接更加绚丽多彩的学术繁荣前景。

孙小礼

1987年7月



## 序

每个人都要学数学,而且随着科学的发展、技术的进步,数学的作用愈来愈大。近四十年来,由于计算机的出现和飞速发展,数学应用的范围大大地扩大了。反映在各门学科的教学计划中,则是数学课程的比重日益增大。这些现象是人们容易看到也不难理解的。但是,我们认为数学作为一门科学,作为人类整个文化中的一部分,她的特殊重要性并没有为多数人所认识。这个问题在今天要实行四个现代化,要大大提高我国的教育水平,提高人民的文化素质,更具有重要的意义。

《数学与文化》的编者精选了一批国内外著名的数学家以及研究数学的哲学家的文章,从各个侧面来说明数学在整个文化中的地位,我认为是非常有意义的。特别是,我认为用编选的办法来说明数学与文化的关系是一个好方法。因为要解决的问题是个很大的课题,不少方面也还有待于进一步研究,目前人们的看法也不完全相同。所以录编各家之言不但可以帮助读者对问题的了解避免片面性,同时也会促使有兴趣的读者进一步思考与研究,推进认识的深化。

编者所选的文章是好的,大多数甚至于是很重要的。

孙小礼、邓东皋同志的“后记”有独特作用,它概述了近四十年来北京大学在这方面的研究的“简史”,给大家一个概括性的了解,也很有价值。

丁石孙

1989年2月26日



# 目 录

数学与善 .....	A. N. 怀特海(1)
略论数学真理及真理性程度	
——兼评怀特海的《数学与善》	
.....	徐利治 郑毓信(19)
论数学 .....	冯·诺依曼(28)
数学与文化	
——是与非的观念 .....	M. 克莱因(39)
数学的几个哲学问题	
——《数学哲学文选》导言	
.....	P. 比拉色诺夫 H. 普特南(49)
数学的理论与实践 .....	王 浩(77)
数学模型	
——对数学哲学的一个概述 .....	S. 麦克莱恩(107)
数学中的直觉和逻辑 .....	H. 彭加勒(123)
数 学	
——艺术与科学 .....	A. 波莱尔(136)
应用数学是坏数学 .....	P. R. 哈尔莫斯(157)
切合实际的数学观 .....	F. F. 波塞尔(172)
关于数学哲学的研究	
——访胡世华教授 .....	张 凭 张祖贵 孙小礼(184)
数学问题	
——在 1900 年巴黎国际数学家	
代表会上的讲演 .....	大卫·希尔伯特(191)

纯粹数学的当前趋势	让·迪多内(237)
信息时代的数学	胡世华(262)
计算机与逻辑	唐稚松(276)
分形和分维	郝柏林(301)
概率概念的发展和争论	
——以及它对实践的指导意义	张尧庭(322)
微积分的理论是怎么来的?	舒立(334)
后记	孙小礼 邓东皋(344)
人名索引	(350)
名词索引	(358)

# 数 学 与 善\*

A. N. 怀特海

## (一)

约在两千三百年前,举行了一次著名的演讲。听众都很有名,包括亚里士多德和色诺芬。这次演讲的题目是“善的概念”。演讲者是权威人士:他是柏拉图。

这篇演说,就其对题目的阐述而论,是失败的;这是由于演讲者主要是献身于数学的。自从柏拉图和他的直接门徒以后;善的概念就与数学脱离了关系。就是在现代,著名的柏拉图学者,除了很少例外,都竭力避免表现出对数学的兴趣。柏拉图的一生中,一直意识到数学对于探求理想的重要性。在他最后的一篇著作里,他把对这种重要性的无知形容为象“猪一般”。如果柏拉图复生,他就会用这样的词来刻划上世纪大多数柏拉图学者。这个形容词是他给的,不是我给的。

但是,毫无疑问,他的演讲是失败的;因为他没有使后人弄明白:如何根据他对数学的直觉来阐述善的概念。许多数学家曾是善人——例如,帕斯卡和牛顿。还有许多哲学家曾是数学家。但是,

---

\* 本文原是怀特海 1939 年 12 月在哈佛大学的演讲。保罗·阿瑟·斯基尔普在编辑《怀特海的哲学》这本论文集(1941 年第一版,1951 年第二版)时,请怀特海教授写一篇“答复”收入本书,怀特海因病未写,把本文作为代表他“最终哲学观点”的两篇文章之一文给编者,以答复他的评论家和批评家。怀特海的这篇文章精辟地阐述了数学同善的概念,同理想之间的联系,这对于研究数理哲学的广大哲学工作者和数学工作者具有重要参考价值。为了帮助读者阅读本文,校者加了一些注释,附于本文后面。胡世华教授对部分译文提了宝贵的修改意见,校者在写注释的过程中也曾得到胡世华教授的指导,谨在此深表谢忱!由于校者水平有限,错误在所难免,竭诚希望读者指正。——校者

数学与善的特有联系，仍是未加展开的课题；自从它由柏拉图首先提出以来，就是如此。这个课题，作为柏拉图思想的重要特征，有人曾作过研究。但是，这个理论作为哲学的基本真理，自柏拉图时代以来，就从活跃的思想中消逝了。在欧洲文明的各个时代，伦理学和数学分属于大学不同的系。

本文的目的是，根据我们现代的知识，研究这个课题。思想的进步和语言的扩充，使得我们对于那些由柏拉图只能用模糊的语句和使人迷惑的神话所表达的思想，能比较容易地加以阐述了。然而，你们应当明白：我在这里不是论述柏拉图。我的题目是现代数学和善的概念之间的联系。我们根本不涉及任何详细的数学定理。我们所要讨论的是，现在处于发展过程中的这门科学的一般性质。这是哲学方面的探讨。许多数学家知道他们所研究的东西的细节，但对于表述数学科学的哲学特征却毫无所知。

## (二)

在距今六、七十年前的时期中，欧洲人的进步文明经历了人类历史上最深刻的一种变化。整个世界受到了影响；这一变革起源于西欧和北美。这是观点的变化。约有四个世纪（即十六、十七、十八和十九世纪），科学思想以一致的步伐向前发展。在十七世纪，伽利略、笛卡儿、牛顿和莱布尼茨，精心构造了一套数学的和物理的概念；整个科学思想借助于这些概念得到迅速发展。顶峰可能在从1870~1880的十年中。在那个时代，赫尔姆霍茨、巴士得、达尔文和麦克斯韦做出了他们的发现。这个时代就以这样的胜利而告结束。这个变化影响着各个思想部门。我在这里主要强调的是，在数学知识领域中所发生的变动。在对这次变革具有影响的发现中，许多是我们所说的顶峰的十年之前的一百年中作出的。但是，广泛认识到它们的总的影晌，则是1880年之后的五十年内的事。作为题外话，我还想说，在数学和善这个主题之外，要举例说明：从一

个时代到一个时代，科学思想是如何缓慢地、不太明显地向前发展的？没有这样的知识，你就不能理解柏拉图，也不能理解其他哲学家。

### (三)

为了理解上述变化，让我们设想：一个有智力的生命在 1870 年左右开始成长，那时他大约九岁或十岁。整个故事可当成柏拉图对话（比如，《泰阿泰德篇》或《巴门尼德篇》）的今译来读。这小孩在他的智力生活开始时，已经知道直到  $12 \times 12$  的乘法表。他已经掌握加、减、乘、除。简单的分数是他熟悉的概念。在往后的二三年内，还增加上小数的记法。这样，整个算术基础不久就被这个小学生熟练地掌握了。

在同一个时期，他学习了几何和代数。在几何中，点、线、平面和其它表面的概念是作为起点的。按照这个程序，他就会引进这些实体的某种复杂的模式，而这一模式是由各个组成部分之间的某些关系所确定的；然后，就要研究在这样的模式中有什么其它关系隐含于这些假定中。例如，他引进了直角三角形。然后要证明的是：在假定欧氏几何的情况下，斜边上的正方形等于其它两边上正方形的和。

这个例子是有趣的。因为一个小孩能容易地观看由他的老师画在黑板上的直角三角形的图形，但在他的意识中并没有各边上正方形的概念。换言之，一个确定的模式（例如直角三角形）并不把它的各种错综复杂的性质直接显示给人的意识。

理性意识的这个奇特的局限性，是认识论的基本事实<sup>[1]</sup>。小孩知道，老师所讲的是，用粗粉笔线在黑板上十分清楚地画出的直角三角形。但是，这小孩并不知道隐含于其中的无限多的性质。

在这个小孩对他在黑板上看到的直角三角形所产生的概念中，主要因素是：点、线、线的直性、角、直角。离开无所不包的空间，

所有这些概念都没有什么意义。点在空间中有确定的位置,但是并不具有任何空间的广袤性。线和直线有位置,在明确的限制下,也具有空间的广袤性。角是直线之间的某些空间关系。因而,离开所涉及的那个空间体系,与直角三角形的概念有关的任何概念都是没有意义的。

#### (四)

在那个时代,甚至著名的数学家总要假定:对空间的概念,只有一个一致的理解;换言之,如果要对空间诸关系的意义的每一细节作出充分的分析,那么谈论空间的任何两个人就必须指称同样的关系体系。根据数学家的信念,根据柏拉图的信念并且根据欧几里得的信念,数学的目的就是对这个唯一的、一致的空间概念作出恰当的表述。这个观点在大约两千四百年中,作为任何物理科学的必要基础曾占统治地位;现在我们知道,它是错误的,但这是一个有伟大意义的错误。因为要是没有把这个简化了的假定作为科学思想的基础,我们的现代物理学就会没有一个大家都承认的简化,可是现代物理学正是借助于这种简化才能表达自己。

这样,上述错误把学术向前推进,直到十九世纪末。可是在十九世纪末,它却成了恰当表达科学思想的障碍。数学家们(至少有一些人)幸运地超越了有理性的科学家们的朴素思想,并且,发明了各种奇异的与传统几何不同的几何。在世纪交替的时候,即在1890~1910年之间,人们发现:这些不同类型的几何,对于表达我们现代的科学知识有重要意义<sup>[2]</sup>。

从几何学在埃及和美索不达米亚初步发端到现在,延续了差不多四千年的时间。这种“只有一种几何学”的错误曾盛行于整个时期。我们今天的看法,大约有一百年到一百五十年的历史。我们可以深感满意地说:“现在我们知道了”。如果我们对于在每一时代中流行的各种类型的学术,不去考查它们与“现在我们知道了”这

种情感之间的关系,那么我们就决不会理解精确的科学知识的历史。这种情感总是以这种或那种形式在保存和推进文明的一群卓越人物之中表现出来的。在事业上取得成功的想法对于任何事业的继续前进来说是十分重要的,可是上述情感却歪曲了这种想法。能否详细地说明这种歪曲的特征呢?我们可以用一个副词把“现在我们知道了”这句话写完全。我们可以说:“现在我们部分地知道了”;或者我们可以说:“现在我们完全地知道了”。就柏拉图和亚里士多德对于后人的影响而言,两句话之间的区别标志柏拉图和亚里士多德之间的差别<sup>[3]</sup>。对有限知识中的任何一次感到完全自我满足是犯了独断论的根本错误。每一项知识与无限宇宙这一背景有不可分割的联系,各项知识的真实性及其意义就是由此导出的。甚至算术的最简单概念也逃避不了这个没法逃避的存在条件。我们是宇宙中的因素,并且对我们的经验的每一细节来说要依赖于这个宇宙,我们的知识的每一片断就是从上述事实导出其意义的。一个彻底的怀疑论者就是一个独断论者。他迷恋于完全无益的东西。凡自我感到满足、完善的地方,就有错误的独断论的胚芽。并没有这样一种实体;它具有孤立的、自我感到满足的存在。换句话说,有限不是自身的根据。

对上述讨论可作如下的小结:各个时代所研究的几何学是模式原理的一章;并且,模式为有限的识别力所知道,它又部分地揭示了与宇宙背景的本质联系<sup>[4]</sup>。“几何”这个词指的是模式的一个属,这个属包括各种各样的种<sup>[5]</sup>。

## (五)

现在我们来讨论数学的基本概念——数。这一节可以简化,因为许多有关的见解,已经在前面考察几何学时讲过了。

自希腊时代以来,数的学说总包含一些奇异的小矛盾;它们往往被许多思想家所忽略。在十九世纪的最后二十五年中,德国和奥

地利的康托尔、弗雷格，意大利的皮亚诺和皮耶里，以及英国的符号逻辑研究者们，对整个学科开始进行更加全面的研究，揭示了许多棘手的问题。最后，罗素提出了日常推理中的一个突出的自相矛盾<sup>[6]</sup>。我记得很清楚：他在给弗雷格的一封私人信件中解释了它。弗雷格的复信，一开始就惊讶地说：“哎呀！算术动摇了！”

弗雷格是正确的：算术动摇了，并且仍在动摇。但是，罗素能随机应变。后来我们合作写了《数学原理》，罗素引进了实体的“类型”的概念。根据这个学说，数的概念只应当使用于一种同类型的实体<sup>[7]</sup>。这样，数“三”在应用于某一类型的实体时，与应用于另一类型的实体的数“三”，有不同的意义。例如，如果我们考虑两种不同的类型，那么就有数“三”的两种不同的意义。

罗素是完全正确的。把数的推理限定在某一类型内，所有的困难就被克服了。他发现了一个安全的规则。但很不幸，这个规则如果不预设在该规则限制外所使用的数概念，它就不能被表达。因为在每一类型中的数“三”，它本身属于不同的类型。每一类型本身又是与其它类型有区别的一种类型。这样，根据该规则，两个不同类型的想法是毫无意义的，数三的两种不同意义的想法也是毫无意义的。因而，我们理解该规则的唯一方式是毫无意义的。因而，该规则必须理解为只是一个安全的规则；要完全解释数就要理解事物的多样性与无限性的概念之间的关系。甚至在算术中，你们也不能不下意识地涉及无限的宇宙。你们是从总体中抽象出细节，并且对这种抽象强加上各种限制。请记住，拒绝思考并不意味着所思考的实体不存在。我们有意识的思想，是以实体存在为背景对实体所进行的抽象。这思想只是强调的一种形式。

## (六)

在概述数学概念时，最后我们来谈谈代数。是谁发明了代数？是“在阿拉伯”，还是“在印度”发明的，请你们都要告诉我。在一种

意义上,对于代数概念有用的符号体系创始于这两个国家中的一个或另一个,或二者,这都是真的。但是,还有一个进一步的问题,我确信,如果柏拉图有代数方面的知识,这个问题一定会引起柏拉图的兴趣。它就是:加以符号化这个基本思想,是谁发明的?

什么是代数的基本概念呢?这就是:“给定的同类东西中的任何一个例子,这是从这个特例或那个特例抽象得来的”。

## (七)

在地球上,即使片刻具有上述概念的第一个动物,也是第一个有理性的生物。你能看到动物在这东西和那东西之间进行选择。但是动物的智力要求具体的实例。人类的智力能从实例中抽象出某一类型东西来。人类这个特性的最明显的表现就是数学概念和善的理想,这种理想超出了任何直接的认识。

有关认识精确性的任何实践经验,人类是不承认的<sup>[8]</sup>;而数学和完善的理想,正是与精确性相联系。这是实践与理论之间的差别。所有理论要求精确的概念,而不管它隐藏在什么地方。在实践中,精确性消失了:只剩下一个问题,“它起作用了吗?”但是,实践的目的,只能靠使用理论来确定;所以,“它起作用吗?”这个问题是与理论有关的。理论的重要性在于它与实践的关系。实践的模糊性,被清晰的理想经验加强了。

在实践中,没有人遵循着任何一个精确的数学概念。请考虑上述在学习几何时的那个小孩吧。他决不会看到一个精确的点或一条精确的线,或精确的线的直性,或一个精确的圆。这样一些事物,是在那个孩子的思想中不能实现的理想。很多这样的理想将被有理性的人所承认。但是,当我们转到算术上时,这样的人就要陷入泥潭。你们可以听到他说(也许你们自己就这么说):“我能见到一把椅子、两把椅子、三把椅子、四把椅子和五把椅子,并且,我能观察到:两把椅子和三把椅子,当归到一起时,构成五把椅子的一

组。”这样，我们的聪明朋友已经精确地观察到算术概念和一条算术定理的实例。

现在，问题是：他已经精确地观察到了吗？或者，他是否有了从其概念性的经验中引出的精确观念？在什么意义上，他精确地观察到一把椅子？他观察到，他的视觉经验的一般范围内的模模糊糊。但是，假定我们把他限定在一兆分之一英寸的范围内，那么椅子在哪里终止，其余的东西又在哪里开始呢？哪个原子属于椅子，哪个原子属于周围的空间？椅子在不断地得到和失去原子。它既不是恰好和环境区分开；当时间不知不觉逝去时，它也并不恰好保持自我同一。再则，让我们长期地考察椅子。它逐渐变化，甚至遍及其坚实的木质部分。在窑洞里放了一百万年之后，它变成易损坏的，并且，一触就散了。缓慢的、感觉不到的变化总是在进行。

我们要记住：人类一英寸长的概念，一秒钟时间的概念，作为合理的基本数量，是仅仅与人类生活相联系的。此外，物理学家和天文学家的现代发现向我们揭示了微小的事件和极巨大的事件同人类生活的联系。我们的精确的概念性的经验是强调的一种方式。理想使现实的事件受到鼓舞，而概念性的经验使理想活跃。这种概念性的经验对感性经验的单纯变化增添了价值观和美感。日落显示了天空的光辉，这正是由于概念的刺激。这么说，并不意味着一系列明显无力的思想创造出非凡的奇迹，而是意味着从现实经验过渡到它的理想领域<sup>[9]</sup>。我们的存在受到概念性的理想的鼓舞，转变着模糊的知觉<sup>[10]</sup>。

如果我们不能认识到构成我们人类经验的不断变动由于强调方式的各种相继的类型（这些类型产生出有限聚集物的能动能力）因而并不是无价值的无限性，那么我们就不能理解这种变动。由迷信引起的对无限的畏惧曾是哲学的祸根。无限没有特性。全部价值都是有限的赐物，这是能动性的必要条件。能动性还意味着：创造聚集物的模式；而数学就是对模式的研究。在这里，我们发现把数学与善的研究和恶的研究相联系的重要线索<sup>[11]</sup>。