1. 用什么信号与外星人联系

有没有外星人？这是地球人非常关注的问题，随着很多不可思议的事物相继出现，人们的疑惑越来越大了。例如埃及的金字塔，人们从一开始就存有疑问：这么大的石块几千年前人们是用什么方法搬来并垒上去的，进而发现工程极其精细，两块巨石间的缝隙连薄薄的刮脸刀片都插不进，人们在惊叹之余，着实怀疑是否是外星人所为。当在巨石中发现动物的毛发后，这种怀疑就进一步加深了。随着科技的迅猛发展，宇宙飞船的升空，人们自然就想到应该主动发出信息与外星人联系，那么用怎么样的语言与信息才能使他们听懂和看懂呢？

人们首先想到了数学与音乐，因为数学与音乐都是高级动物的共同语言。这里仅说说数学，人们可以语言不同、文字不同，但是一个数学公式却可以立即把人们的思想沟通起来。不过这里也有一些约定俗成的符号，如何克服这些障碍呢？换句话说，选择数学中哪些东西最容易被没有共同语言的外星人理解呢？人们不约而同地想到了勾股定理，因为勾股定理有以下几点优势：

(1) 勾股定理的发现早在 4 000 多年前(我国最早发现)，当时各方面科学知识都非常少，这就是说它很少依赖于其他知识，反过来它却是很多其他知识的基础。

(2) 4 000 多年来不同的时期、不同的国家、不同的民族往往都独立地发现了勾股定理，就是说人们的认识发展到一定阶段时，自然而然地就会发现勾股定理。

(3) 它的内容比较简单、图形非常直观，往往不需要作什

么解释就一目了然。

因此世界各国都有人建议，把勾股定理的图形作为光线信号，发射给外星人。由此开始逐步探索与外星人的共同语言。我国数坛巨星华罗庚先生也曾设想过用两个图形来作为信号。一个是河图洛书，一个就是勾股图。

2. 勾股定理史话

勾股定理是我国最早发现的。4 000 多年前已有这方面的传说。最早的正式记载则是《周髀算经》，其中谈到古人商高(约公元前 1120 年)说“勾广三、股修四、径隅五”。翻译成今天的语言是：勾三股四弦五。据此我国曾有一段时间把这个定理称为“商高定理”。不过认真地说商高发现的只是 $3^2+4^2=5^2$，也就是对于一些特殊的值有此结论，而要作出一般的结论还有一个质的飞跃。商高连一个“猜想”也没留下，贸然冠以他的名字，实在是有欠考虑的。在以后很长一段时间里，虽然人们逐渐认识到这是一个普遍的结论，但由于我国古代数学一直重视实践而忽略理论，重视计算而忽视证明，所以直到公元三世纪三国时代的吴国人赵爽才用割补法证明了勾股定理。而欧洲早在公元前 500 多年就由毕达哥拉斯（公元前 572—公元前 497）证明了这个定理，因此冠以毕达哥拉斯定理，一直到现在欧洲各国仍沿用此名。

毕达哥拉斯是一位废寝忘食的大数学家。一次他到朋友家做客，稍稍寒暄后，朋友们高谈阔论，他却一言不发，一个人望着地上的方砖出神，并不时地弯下腰在方砖上画起线段。不久他发现以一个等腰直角三角形的直角边为一边构成的正方形，其面积恰等于这个等腰直角三角形面积的两倍，而以斜边为边长的正方形，其面积等于这等腰直角三角形的面积的四倍，那么以斜边为边的正方形面积等于以两直角边为边的正方形面积之和，也就是说斜边的平方等于两直角边的平方和。他立即想到这个结论对于任意直角三角形是否成立呢？很快他想到了边长分别是 3、4、5 的直角三角形，此时有 $3^2+4^2=5^2$。由

此他猜测到：对于任意直角三角形都有 $a^2+b^2=c^2$,其中 a、b、c 分别是两直角边和斜边，并且很快证明了它。这时毕达哥拉斯万分激动地说：“我找到了一个出色的定理并证明了它，我要感谢缪斯(科学艺术之神)的保佑!”为此他举行了祭牛仪式，向缪斯敬献了 100 头公牛，这就是历史上有名的“百牛大祭”。

毕达哥拉斯的发现得益于“方砖”。设想一下,如果是“矩形砖”，由于没有特殊情况的过渡，增加了难度，毕达哥拉斯的发现不知要推迟多少时日，说不定还让别人捷足先登，冠以别人的名字呢！

从特殊情况入手猜出结果，再加以证明，这也可算是数学定理发现的途径之一吧。可惜我国古代数学由于认识上的片面性，所以虽然在很多方面都有领先于世界的成就，甚至在宋元时期形成了世界数学大国的地位，但是由于没有坚实的理论基础，加之政治体制的原因，所以到近代就衰落了。

关于勾股定理的证法非常之多，鲁米斯在《毕达哥拉斯定理》一书中,收集了 370 种证法。值得一提的是赵爽的割补法证法，至今仍是世界上最常见最直观的一种证法，称之为勾股图。现在初中平面几何中的证法，则是欧几里德证明的。

3. 无理数“无理”吗

人们习惯地称呼两个整数之比 $m/n(n\neq0)$ 为有理数，想当然地认为这类数存在是合理合法的。在人类早期文明史中，有理数是衡量事物大小多寡的惟一数量。当 2 000 多年前，古希腊数学家发现了 $\sqrt{2}$一类与有理数根本不同的数时，希腊大地如同发生一场大地震，人们难以接受这个事实。自然认为这个怪物的出现是非理非法的。于是给它扣上“无理数”的帽子。

其实，“有理数”、“无理数”名称的由来并不是这么回事，是翻译出了问题，或者说翻译错了。 rational number 是有理数的名称，而 rational 是多义词，含有“比的”、“有理的”意思。而词根 ratio 来自希腊文，完全是“比”的意思。rational number 正确的翻译应是“比数”。这个名称正确反映了这类数是两个整数之比的内涵，名副其实。在东方，最早把 rational number 翻译过来的是日本人。可能是那位日本人英文不太好，数学又不太懂，把它翻译成“有理数”。而东洋文字与汉字相似，于是中国人把这三个字照搬过来，沿用至今，形成习惯。

如果正确地把两个整数之比叫做“比数”，那么 $\sqrt{2}$一类的数称“非比数”，不仅顺理成章，而且名副其实。因为古希腊人在证明 $\sqrt{2}$为“无理数”时用的是反证法。先假设 $\sqrt{2}$是两个整数之比，然后导出矛盾。实际上是在证明 $\sqrt{2}$不是比数。

可见，“有理数”、“无理数”的本意不是合理的数、不合理的数，而是比数、非比数。其本质区别是一种可表示为两个整数之比，另一种则不能。

4. 芝诺悖论

芝诺(zeno，约公元前 496一公元前 430)，是古希腊人。他的悖论是科学史所记载的形形色色的悖论中最早的。由于他不是数学家，所以他的悖论往往被数学史学家所忽视，其实他的悖论对数学思想的发展有着一定的影响，例如数学中常用的反证法就是他使用的方法，也是有文字记载的对反证法的最早运用。又如他的“二分法”所反映的思想也是西方最早的潜无穷思想之一，在此基础上相继产生了“割圆术”和“穷竭法”，从而为极限理论的产生作了准备。

芝诺悖论的产生有其一定的社会背景，在公元前五世纪前后的 200 年内，希腊社会民主气氛浓厚，人们思想活跃，学派众多，形成希腊科学文化的繁荣时代。希腊民族笃信神创造并主宰世界的神话。但是神用什么东西把世界创造出来的呢？对于这个世界的本原问题就有了不同的解释，如“水”、“火”及“气”等等。

埃利亚(Elea）学派的创始人巴门尼德（Parm Neides)认为只有‘存在’(即神)是不生不死的,它是完整、惟一和不动的。但是世界怎么可能是不动的呢？这就引起了同时代人的反对。巴门尼德的继承人芝诺为他的老师辩护，他力图证明，如果承认‘多’和‘运动’就会导致‘更加可笑的后果’陷入更大的矛盾，他列举了大量的论据。在他的论证中有四个是最著名的，人们称之为“芝诺悖论”。由于芝诺悖论的著作已失传，现流传的引文都来自亚里士多德（Aristotle)的《物理学》,而亚里士多德引他的话是为了要批评他，所以不同的书中在写法上就有所不同。

(1) 二分法

一个物体想从 A 地到 B 地是永远不可能的。因为想从 A 到 B,则首先要通过道路的中点 C,而要到达 C 点又要通过 AC 中点 D……这样分下去，永无止境，也就是有了无穷多个点，这个物体不可能在有限时间中，一个一个地接触无穷多个点。

(2) 阿基里斯追龟

阿基里斯(Achilles)是荷马史诗《伊里亚特》中的英雄,希腊的神行太保。芝诺说，阿基里斯永远追不上乌龟。因为他首先必须到达乌龟出发的地点，这时乌龟已向前走了一段路，当阿基里斯又赶上这段路时，乌龟又向前走了一段路，这样他虽是越追越近，但是始终追不上它。

(3) 飞矢不动

飞行的箭是静止的。因为每一件东西在占据一个与其自身相等的空间时是静止的，而飞着的东西在任何一定的瞬间，总是占据了一个与它自身相等的空间，那么它就不能动了。

(4) 运动：一段时间等于它的一半

为便于说明起见，我们可以假定有三条均等于 $4d$ 的线段,开始时 a、b、c 首尾对齐。如果 c 不动,而 a、b 等速向相反方向运动，经过时间 t 之后,b 上的 B_1 与 c 上的 C_2 对齐的,而原先 B_1 是与 C_1 对齐的,故 B_1 通过了距离 d,另一方面 A_5 原先是和 B_5 对齐的，现在和 B_3 对齐，可见 A_5 通过了 $2d$ 的距离，要想 A_5 通过 d 的距离(即和 B_4 对齐)，只要一半时间就够了。这就表示一半时间与全部相等。如图 1 所示。

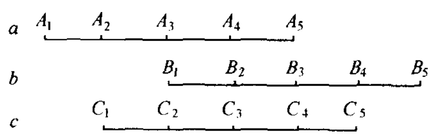

图 1 飞矢不动

这四个悖论可以分成两类，前两个问题是对时空能作无限分割观点的质疑。后两个问题是对时空不能作无限分割，合起来则表示，芝诺既反对时空能无限分割的观点，又反对不能无限分割的观点，这就自相矛盾。无怪乎古希腊的历史学家普罗塔克说：大哉芝诺，鼓舌如簧，无论你说什么，他总认为荒唐。

恩格斯曾指出：“运动本身就是矛盾，甚至简单的机械位移之所以能够实现，也只是因为物体在同一瞬间既在一个地方又在另一个地方，既在同一个地方又不在同一个地方，这种矛盾的连续产生和同时解决正好就是运动。”

5．对策论的始祖

在第二次世界大战时出于战争的需要，形成了对策论，它是以 1944 年诺伊曼（1903—1957）与摩根斯特恩合著的《对策论与经济行为》一书为标志。

对策论是关于斗争策略的数学，它主要是用数学方法去研究在斗争中是否存在制胜对方的最优策略以及如何找到它。从这一观点出发，那么对策论的始祖当推我国的孙膑。

孙膑（约公元前 390一公元前 330）是我国古代一位杰出的军事家。他运用对策论去取得胜利，其中最出名的一例就是田忌赛马。

田忌常和齐威王进行赛马赌博，在比赛中田忌屡战屡败，原因是田忌的上、中、下等三匹马比齐威王的上、中、下等三匹马分别都差一些，但差距不大。一次齐威王又找田忌赛马，由于每次均以千金为赌注，所以田忌不愿参加，孙膑是田忌收养的门客，献计说：“我有办法让你赢。”比赛那天第一场齐威王出上等马，孙膑让田忌出下等马，当然必输无疑。第二场齐威王出中等马，孙膑让田忌出上等马，结果田忌赢了；第三场齐威王只能出下等马，田忌出中等马，结果田忌又赢了一场，总分为 2∶1，田忌净赢一千金。齐威王从未输过，对这次田忌竟以总体水平不如自己马的马大为惊讶。详细了解后，齐威王任命孙膑为军师。

孙膑出任军师以后，为齐威王出谋划策，取得了一系列以少胜多、以弱胜强、出奇制胜的辉煌战例，如围魏救赵、庞涓之死等。

6. 几何面前人人平等

欧几里德（公元前 330一公元前 275)是希腊亚历山大大学的数学教授，他总结了前人的实践经验和研究成果，把当时人们所掌握的相当丰富但又杂乱无章的几何知识熔于一炉，铸成一个空前完整的科学体系。他从公理、定义和定理出发，用演绎法叙述几何学，写出了著名的《几何原本》共 13 卷(后来被别人增加了 2 卷共 15 卷），这是世界上最早的公理化的数学著作，他也因此被人称为“几何学之父”,2 200 多年来这本书一直成为中学几何课本的主要内容。据说它是世界上除了《圣经》之外,再版次数最多、流传最广的书了。

欧几里德不但有完整的理论知识，而且也具有运用几何知识解决实际问题的高超本领。例如，古埃及人建造了高大的金字塔，可是当时的建筑并不是按照标有尺寸的图纸施工的，所以造好之后，竟然不知道金字塔究竟有多高，有人甚至怀疑金字塔是外星人所造，否则怎么会连高度是多少都没有流传下来？在经过很多人努力之后，这个难题还无法解决。有人就说：要想测量金字塔有多高，比登天还难。这话传到欧几里德的耳朵里，他立即笑着对别人说：“这有什么难的？当你的影子与你身高一样长时，那金字塔影子的长度便是金字塔的高度。”

由于欧几里德的声望越来越高，所以当时人们把学习几何学作为一种时尚，以至亚历山大国王托勒密也想赶时髦，学点几何学，谁知刚学了一点，国王就被一连串的公理、定义、定理弄得晕头转向了，就问欧几里德：“学习几何学，有没有便捷一点的途径,一学就会?”欧几里德答道“:陛下,很抱歉,在学

习科学的时候，国王与普通老百姓是一样的。科学上没有专供国王行走的捷径，学习几何，人人都要独立思考，就像种庄稼一样，不耕耘就不会有收获的。”

7. 如何证明素数是无穷个

自然数 0、1、2、…是连小学生都已经十分熟悉的数，可是一些大数学家却还在研究它，令人不可理解。原来自然数中有一些数叫做素数（也称质数），由它们相乘可以得出其他的数，这里面就有很多问题可以研究了。从古希腊开始二千多年来，许多著名的数学家倾注了毕生精力对它们进行研究，得到了很多成果。首先是关于它的分布：从 1 到 100 有 25 个，101 到 200 有 21 个，201 到 300 有 16 个……由此看出分布越来越稀，那么是否到相当大以后就没有了呢？多少数学家煞费苦心，又一个个被难倒，最后欧几里德用反证法巧妙地证明了素数是不会消失的，也就说素数有无穷多个，这个证明构思巧妙、通俗易懂，一直被人们所推崇，他的证明是这样的：

假如素数是有限个，则必定存在一个最大的素数设为 p，把所有的素数相乘，并记

$$q=2\times3\times5\times7\times\cdots\times p+1$$

现在来观察 q，这时有二种可能

当 q 是素数，则由 $q>p$ 与 p 是最大素数矛盾；

当 q 是合数，由于 q 不能被 2、3、5、…、p 这些素数整除，则 q 一定含有一个比 p 大的素因数，这与 p 是最大素数矛盾。所以定理得证。

这个证明的关键是构造了 q，这是一般人想像不到的。从解题思路上说，它给人们一个启迪即：要证明结论不存在，只要千方百计找出一个反例即可。当然现在举反例是数学系学生的常识了，但在 2 000 多年前要这样做确是难能可贵的。

当然这个证明不是构造性的，所以如何去找的问题仍然没

有解决,数学家们先是一个个具体去找,到目前为止,找到的最大的素数是 $2^{216\,091}-1$,它有 65 050 位数字。后来觉得既然是无穷个,那么要把它们全部找出来,只有找到公式才有可能。为此数学家们费尽心机。法国数学家费马在 1640 年宣布他得出素数公式:$f(n)=2^{2^n}+1$,但 100 年后被瑞士数学家欧拉否定，因为当 $n=5$时 $f(n)=2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297=641\times 6\,700\,417$ 是合数。欧拉提出的素数公式是 $f(n)=n^2+n+41$,由于 $f(40)=40^2+40+41=41^2$ 也被否定。其他还有很多如：

$f(n)=n^2-n+17$

$f(n)=n^2-n+72\,491$

$f(n)=n^2-n+p$(p 为素数)

$f(n)=1/3(2^p+1)$(p 为奇素数)

等，但都先后被否定了。

直到前不久，终于得出了能算出素数的公式，解决了这一世界难题。

8."欧几里德滚蛋"

对几何头痛的人，远不止托勒密国王一人。除了少部分学生，由于被它那生动直观的图形与严密的论证相结合的习题，激起了高度兴趣，从而产生废寝忘食的热情，对于大部分学生,都对几何'头痛"。其实,何止是学生,即使是数学教师，当学生不知从哪弄来一道几何题来问时，教师也往往是忐忑不安的。初中学生的成绩分化也往往是从几何开始的。因此，希望找到一条学习几何的捷径几乎是每一个学几何的人的愿望，所以托勒密国王也多少有点冤枉，因为他提出问题，并不是想利用国王的特权，而仅仅是作为一个学生很自然的想法。至于欧几里德，根本解决不了这个问题，其实何止欧几里德不能解决，2 000 多年来，一直无人能够解决。

那么，这个问题为什么难解决呢？因为《几何原本》是一种串联式的结构，一环紧扣一环，每一环都那么重要，但是它缺少一个核心，没有一个以它为中心的多条通道，这样在某一环节上掌握不好，再往前学习，就很困难了。

另外,几何题目丰富多彩,从易到难,琳琅满目,但是却很难找到它们之间的内在联系，也就是没有一些通用的有力的解题方法。几何不像算术，学会了加法法则，就会算所有的加法题；几何不象代数，学会了一元二次方程的解法，则不但能解所有的一元二次方程题，而且还能解大量有关的应用题，即使有些题做不出来，也往往不至于一点思路都没有。几何呢？即使你学完了几何课本上的定理，当你遇到一道未见过的几何题，不见得有把握做出来。原因也很简单：没有一个现成的公式可套，而往往要通过联想，也就是要把这道题与已经学过

的定理和做过的习题联系起来，这时往往需要添加辅助线，而这就需要创造性，当然是一个棘手的问题。

如何改进几何的学习，近百年来成千上万的教育工作者进行了探索，写出来的关于初等几何的学习方法、教学方法、解题方法的论文与参考书籍洋洋大观，足可以堆成一座山！但收效甚微。

在改革教法、学法方面没有显著的突破之后，一部分有识之士，开始考虑如何改造平面几何，这就成为中学数学改革中争论最大的焦点之一。在 20 世纪 60 年代，国外有一批热心改革的数学家和数学教育家，发起了轰轰烈烈的“新数学”运动，例如著名的法国数学家狄东尼（Diendonne）提出了“欧几里德滚蛋”的口号！他的想法是用向量运算来取代欧氏几何。但是他们失之于简单，一厢情愿地希望中学生从上一代人的终点开始，尽快地吸取近代甚至现代数学的成就，结果受到了挫折。由于新数学运动遭到了挫折，“回到基础”的口号又提出来了，欧几里德的一套经过不太大的裁剪修补，依然屹立在几何殿堂里。

9."等一下杀我的头。"——阿基米德

阿基米德(Archimedes,约公元前287—公元前212年)洗澡时得到启发而发明"阿基米德定律"大约是每个中学物理教师必讲的故事，所以几乎是人人皆知的。但是阿基米德又是一个伟大的数学家，知道的人就不太多了。著名的考证专家胡适，1959年1月7日晚，应台湾大学华侨同学会邀请，作了一个题为'一个人生观'的演说，在这篇报告中，胡适说到":古希腊有一个数学家阿基米德……"（以下即是那洗澡的故事）在这里胡适称阿基米德是数学家而没有称物理学家，可能是他考证出阿基米德对数学的贡献大于对物理的贡献吧！其实近代数学史家倍尔（Bell,1883—1960）曾说过：任何一张列出有史以来三位伟大的数学家的名单中，必定会包括阿基米德，另外两个则通常是牛顿和高斯。普利尼（Pling,23—79)甚至称阿基米德为"数学的神"。

阿基米德有深厚的数学功底，他是欧几里德的学生的学生（承上启下的是卡农），他酷爱数学，常常废寝忘食，有时一边吃饭，一边在火盆的灰烬中画着各种几何图形，思索着求解难题的方法，以至连饭冷了都不觉得。那时候人们有一种用油擦身的习惯，阿基米德由于一边在思考，一边在擦油，所以擦着擦着竟用油在身上画起三角形来。

在第二次布匿战争时期，叙拉古和迦太基缔结同盟，由此成为罗马的仇敌。马塞拉斯率领罗马大军围攻叙拉古，阿基米德利用杰出的科学技术为祖国效劳。传说他用起重机抓起敌人的船只高举起来，摔得粉碎。又用奇妙的机器，射出大石锥，如同暴雨，使罗马士兵心胆俱裂。又传说，他用平面小镜

子组成巨大的抛物面镜子，反射日光，使敌船涂满油脂的风帆焚烧。

由于长期被围，粮食耗尽，在公元前 212 年的一天黎明，罗马军队偷袭成功，闯进叙拉古城。虽然统帅马塞拉斯出于敬佩阿基米德的才能，下命令不准伤害这位学者，但部分官兵知道阿基米德足智多谋，又富有爱国热情，不把他杀掉，休想征服叙拉古王国，所以他们惧怕阿基米德胜过惧怕叙拉古国王亥厄洛，进城后不急于进攻王宫而直奔阿基米德的住处。他们一脚踢开房门，只见床上空荡荡的，而地上一动不动地蹲着一个两腮长着长长花白胡子的老人，原来这位 75 岁的数学家，通宵未眠，正用双手托着下巴，聚精会神地看着画在地上的几何图形，当罗马士兵的利剑碰到阿基米德的鼻尖时，他才从数学王国里回过神来，毫无惧色，用手推开了剑，平静地说："等一下杀我的头，再给我一会儿功夫，让我把这条几何定理证明完，可不能给后人留下一道还没有证出来的难题呀！"说完又沉思起来，继续研究着地上的几何图形。残暴而又愚蠢的士兵不由分说，一剑砍过去，这一剑不仅砍下了一位伟大数学家的脑袋,也砍掉了一条没有问世的"阿基米德定理"。

对于阿基米德的死，马塞拉斯非常悲痛，除了将士兵当作杀人犯处理外，并为阿基米德立墓，大墓碑上刻着球内切于圆柱的图形以资纪念，因为阿基米德曾发现球的体积及表面积都是外切圆柱体积及表面积的 2/3。