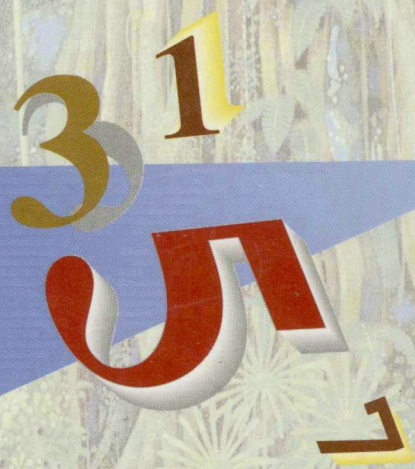


数学素质培养丛书之四

数学与美学

李铁木 著



地震出版社

数学素质培养丛书之四

数 学 与 美 学

李铁木 著

地 震 出 版 社

1999

数学素质培养丛书之四

数学与美学

李铁木 著

责任编辑：李小明

责任校对：耿 艳

北 京 出 版 社 出 版

北京民族学院南路9号

北京丰华印厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

850×1168 1/32 3.5印张 94千字

1999年1月第一版 1999年1月第一次印刷

印数 0001—3000

ISBN 7-5028-1592-9/G · 129

(2035) 定价：5.20元

前 言

摆在我面前的这套《数学素质培养丛书》，令我感慨万千。它的作者李铁木同志，论年龄比我还要晚一代人，现在正是他著书立说的黄金年华，竟然故去了。他利用业余时间创作的数学专著《分析提纲与证明》上、下两册，已于80年代由宇航出版社出版，得到数学界的好评。而这套旨在提高年轻一代乃至全民族的数学素质的丛书，编删取舍，历时十年，竟成了作者的封笔之作。想到作者生前未能见到它的出版，我不禁为之怅然。想到作者将毕生业余时间，献身于丰富我国的数学教育理论工作，作为一个从事教育工作逾半个世纪的老人，我不能不感到由衷的激动。科教兴国，全面提高中华民族的文化素质，就需要一批像李铁木同志这样执著的学者和作者。

我翻阅了李铁木同志的手稿，无论他的选题，还是他的表述，都令我赞叹不已。具体而言，本丛书中的公式树、方法论等内容是他个人独创，而将数学与哲学、尤其与美学专题相连进行深入的探讨，使原本相伴生的数学与哲学在分道扬镳多年后又在作者笔下回归合一，这样的科普著作我以为意义重大。数学具有逻辑思维的科学性，数量计算的普遍性，和运用领域的广泛性，这是一门人人要学好的基本学科，凡事都要努力做到“心中有数”，定量和定性结合。在功利主义影响日增的今天，能够静下心来，就数学的通俗化这个少人问津、无利可图的题目著书立说，没有信念的支持和热情的驱使，是不可能始有终地完成这项非常富于开拓意义的工作的。我相信读者从这套丛书中汲取到的不仅是一个数学工作者对于数学专题的心得、领悟和创见，而且还能感受

到一个淡泊名利、追求真知的灵魂的呐喊。

基于以上所感，我郑重地向各界朋友推荐这部《数学素质培养丛书》。

中国教育学会顾问 张健

一九九八年八月

目 录

| | |
|---------------------------|---------|
| 开场白 | (1) |
| 第一讲 美学概要 | (3) |
| 一、探索美的漫长道路 | (3) |
| 二、美究竟是什么 | (10) |
| 三、劳动创造了美 | (15) |
| 四、美和美感 | (24) |
| 五、美的形态 | (32) |
| 六、形式美 | (34) |
| 第二讲 数学与美学 | (38) |
| 一、科学成果的美学评价 | (38) |
| 二、数学美 | (44) |
| 第三讲 数学美的种种形式 | (47) |
| 一、简明美 | (47) |
| 二、对比美 | (51) |
| 三、对称美 | (53) |
| 四、序列美 | (70) |
| 五、节奏美 | (75) |
| 六、奇异美 | (80) |
| 七、滑稽美 | (82) |
| 第四讲 数学美再谈 | (88) |
| 一、数学美的一般特征 | (88) |
| 二、关于数学美的几点认识 | (91) |
| 尾 声 | (101) |
| 编后语 | (103) |

人 物 表

学生甲：大学数学系三年级学生

学生乙：大学数学系四年级学生

学生丙：大学数学系四年级学生

学生丁：数学硕士在读研究生

老 师：数学教员

开 场 白

老 师 这一次讲座的名称是《数学与美学》，主要是讲数学美的问题。我不是美学家，只是在学习数学的人中较喜欢美学的；我也不是数学家，只是在学习美学的人中较喜欢数学的。这样一个现实基础可能使我们在一起探讨数学中的美学问题时更富有共同切磋的气氛。的确，在这方面还没有更多的可以参考的已有成果，也缺少便于援引的现成理论。我们的任务是通过自己的更大努力，去挖掘、整理、阐述数学中的美，即数学的艺术问题。或许有人会问：玄哉，数学中还有美不美的问题么？数学既不是盆景，也不是花卉，美又从何谈起呢？可是，随着讨论的深入，不仅能消除这一疑问，还会认识到探讨数学美的重要意义。尤其是对关心方法论的诸位来说，数学美也是不可忽视的一个问题。

大家可能都有一些关于美学的起码知识。为了更自然、稳步地过渡到数学美这一中心题目的讨论，我们还是先对美学的基本知识作一个理论上的概括，使我们对现代的美学成果有一个大致的了解。在这个基础上，再去讨论数学中的美学问题就会很顺利了。相比之下，我们这一次更需要的是发散性的思维，即在大家已养成的严谨的逻辑思维能力的基础上，发挥丰富的想象力和联想力，这也正是这一次与以往各次讲座所不同的一个重要方面。但不要误以为数学美可以随意去异想天开地发挥，绝不是的，即使是纯美学，它的美也有客观性一面，何况我们谈的是数学美呢。这里要阐发的数学美是以数学的事实为依据的，所得的结论是需要说服人的，毫无根据地胡编一通怎能令人信服呢？这就要求我们始终要保持探索者的基本品质——科学的严肃性。

学生乙 我们对这一次讲座的兴趣并不亚于前几次。这不仅是由于好奇、新鲜，更重要的是既然数学的美学问题还和方法论有关，那它的重要意义也就可想而知了。

学生甲 我们虽然还没有作为一门课程学过美学，但过去总以为对具体领域里的美与丑是能够分辨出来的，如服装美、风景美、艺术美，通过感官就能判断美还是不美。现在谈起数学美，可叫人为难了，不知数学美究竟指的是什么。

学生丙 作为我们理工科学生来说，即使到大学毕业的时候也难有机会系统地学习美学。如果现在能在很短的时间里学习一点美学的基础知识，再了解数学中的美学，那当然是一举两得的美事。

老师 所见略同。这些正是我们这一次要做的事。下面就转入正题。在本次讲座中，我们将略去有关外国数学家的原名、生卒年、国籍等方面的说明。

第一讲 美学概要

老师 你们说当还没有提及数学美之前曾自以为对其他具体领域中的美与不美是有分辨力的。现在我问，鸚鵡与山鷹哪个更美？

学生甲 鸚鵡比山鷹更美。

老师 根据什么？

学生甲 色彩鲜艳，好看，还能学人说话，惹人喜欢。

老师 色泽鲜艳，好看，令人喜欢，这些通常都属于美的范畴，这是不错的。可是，你们注意过么？诗人常借喻山鷹抒情，画家多托绘山鷹寄寓。而对鸚鵡，艺术家们却很少过问了。是艺术家的审美能力不及我们么？

学生乙 也许这些艺术家们都有过坎坷的经历，加上欲超尘脱俗的清高劲儿，所以想借山鷹来比喻自己。如果让天真的儿童在鸚鵡和山鷹之间选择一个，我想多数会拿鸚鵡，他们对山鷹甚至会有几分惧怕感呢。

老师 这些问题其实已经触及到美学中的一系列专题了。在后面的恰当处，将得到关于这些问题的自然导致的合乎情理的答案。现在，首先应当搞清美究竟是什么。关于美是什么，自古有一个很著名的概括：“美是难的”。虽然 2000 多年来人们关于美学的争论一再证明着“美是难的”，但若只是停留在这样一个概括上显然是不行的。我们需要给美一个具有具体内容的阐述。

一、探索美的漫长道路

为什么美是难的呢？首先的难处就在于给美难以作出理想的定义。在人们还是把美学和哲学、艺术混为一谈的早期研究中，有不计其数的美学家试图用概括的几句话给美作出定义，可以说世界上有过多少个美学家就有过多少种美的定义。但后来发现，这

些定义都不行：有的是由于哲学观问题而给美作了歪曲的定义，有的把美和美感混为一谈，有的没有把美作为一个普遍概念而只说明了美的丰富内容的某个侧面，等等。随着人们认识的发展，尤其在美学已成为独立学科的今天，人们发现给美需要的和能够作出的是阐述而不是定义。有的美学家明确指出美是定义不了的。

在本丛书之二《杰出人物与方法论》（以下简称《方法论》）的第一讲里曾专门谈过古希腊的文明成就，提到自公元前6世纪以来的古希腊一系列学派首领如毕达哥拉斯、赫拉克利特、柏拉图、亚里士多德等人。这些人也是最早一批关心美学的人。

毕达哥拉斯学派认为美就是和谐。凡具有和谐的事物就是美的。在这标准下，事物在形式上的对称、均衡、整齐划一、节奏都认为是美的。一个人若是外形和谐、精神和谐，那就是至美无尚的；一个社会、统治者和被统治者、各行各业的人都各尽其职，和睦相处，这个社会是和谐的，因而是美的，如此等等。但他们没有进一步说明和谐的一般含义，所以这种定义是模糊的。除非把和谐当作美的同义词，否则和谐并不能囊括美之全部，至多是美的一个因素。因此，毕达哥拉斯学派的观点是认为美的概括在于客观事物中，美的产生是由于矛盾的调和、统一。毕达哥拉斯是美学史上最早的一个对美进行阐述的人，他的美学观中有唯物主义的因素，虽然从根本上看还是哲学上的唯心主义者。

赫拉克利特是古希腊唯物主义哲学家，他的哲学观是：“一切皆流，无物常在”，世界万物都在不停地变化着、运动着，使事物变化、运动的动力在于对立面的斗争。在美学观上，认为和谐不是来自矛盾的调和、统一，而在于对立面的斗争，美与丑也是相对的，不存在绝对的美和绝对的丑，美与丑是对比中存在的。他的观点比毕达哥拉斯进了一步。

柏拉图也是古希腊学者中较早研究美学的人。他认为美的本质在于“美的理念”，事物的美是把美的理念加之于客观事物上的缘故。他所谓的美的理念，说得明白一点，就是我们认为这样就

是美的那种观念，因而是先于一个个具体事物而存在于人的头脑中的先验的东西，它是永恒的，绝对的。他的这一主张的唯心主义倾向是显然的了，他是从精神领域里寻找美的根源，由于出发点有问题，所以它的理论很难贯彻到底，因而使他终于喊出了“美是难的”这一绝望的呼声，这是他在自己的一篇叫《大希庇阿斯篇》中借他的老师苏格拉底之口说出的一句古谚。但有一点值得注意，即柏拉图不是说明什么样的事物是美的，而是要说明什么是美，即把美当作一个普遍概念而探讨的，这是可取之处。

柏拉图的学生亚里士多德是反对老师的这一主张的。他认为客观事物是第一性的，称为“第一实体”，而概念是派生的，是第二性的。他批判柏拉图的“理念”，指出所谓“美的理念”是根本不存在的，美就存在于客观事物中，如存在于事物的“秩序、匀称与明确”等方面之中。在哲学上，亚里士多德是摇摆于唯心与唯物两者之间的人物。

从上述古希腊一批学者的美学思想中可看出，美学自从产生伊始，就由于哲学观的不同而大体分成了两大体系，即唯物主义的和唯心主义的美学观。由于哲学的分野而导致了近数百年来美学的两大对立体系中较有影响的代表人物及他们的美学主张。一部分人实质上继承了柏拉图的“美的理念”论，仍在精神上寻找美的根源。

欧洲古典唯心主义创始人康德说：美“只能是主观的”。他认为，美是以它的纯粹的形式，使任何人不顾任何利害关系而感到喜悦的东西。这种喜悦虽然是具体事物引起的具体的喜悦，但不是逻辑推理的结果，更与个人的利害无关，是人们都应有的、具有相通性的、普遍存在的共同感，它不存在于客观事物中，而是存在于人们的心中，因而不是客观的，只能是主观的。

著名的大哲学家黑格尔是古典唯心主义哲学的集大成者。对唯心主义辩证法有重大贡献。其哲学前提是绝对精神，是世界的本质。在这个前提下，他提出了美学一个著名的命题：“美是理念

的感性显现”。这是美学史上一个很有名的美的定义。按这定义，美仍是人头脑里固有的“理念”，绝对精神。所以，他和柏拉图有相同的出发点，也有重要区别。黑格尔是辩证法大师，他的理念不是与客观事物割裂的，而是理念“显现”于现象，使主客观统一，且这种理念也是发展的，不是永恒的、绝对的。他说：“理念不是别的，就是概念，概念所代表的实在，以及这两者的统一。”

学生丙 请问，所谓理念“显现”于现象是什么意思呢？

老师 按我的解释，黑格尔是说所谓美就是人们头脑里所固有的理念在现象中得到印证的统一。黑格尔举了一个例子：“例如一个小男孩把石头抛进河里，以惊奇的神色看水中所现的圆圈，觉得这是一个作品，在这作品中他看出自己活动的结果”，在这里，小男孩希望打破水面的平静，要观赏水波从内向外层层伸展的目的通过自己的活动实现了，小男孩以“惊奇的神色”欣赏自己的“活动结果。”黑格尔还认为，最高级的美是艺术的美，艺术中理念的显现就是意蕴，“或者说得更清楚一点，就像寓言那样，其中所含的教训就是意蕴”，他认为“意蕴总是比直观的显现的形象更为深远的一种东西”。黑格尔的辩证法是马克思主义哲学的理论来源之一，同样，他的美学理论在西方美学史上占有重要地位。

康德和黑格尔都是从唯心主义的观点去解释美，都是从绝对化了的、先于物质世界而存在的所谓永恒观念中去寻找美，所以是错的。当然其中也有合理的内容，如黑格尔的辩证法思想，概念与实在的统一、主客观的统一论等。

主观唯心主义是从人们的心灵、意志等方面去寻找美的根源，和客观唯心主义是大同小异的。

德国著名的唯心主义哲学家叔本华是个唯意志论者，他认为意志是宇宙的本质，如物体间的作用力，植物的向阳性，动物的本能，人的求生及各种欲望都是意志的表现。在美学上，他认为美是意志的暂时的休歇，艺术应是摒弃了一切欲望和实用目的的“冥想”，是“无意志的直觉”。他的这些话在这里还不好理解，但

等到我们讨论美和美感的特征之后，就会看出叔本华也抓住了美的某些特点，可惜是表面的而不是实质的。

新黑格尔主义者柯罗齐认为精神是唯一的实在，认为美的根源在于心灵，美只有直觉创造出来的价值，不存在客观的美。他的理论对西方文艺中的表现主义提供了理论根据。

在探索美的漫长历史上，另一些美学家却踏上了希望之路。他们不像客观唯心主义美学家，企图从所谓的绝对观念中寻找美；也不像主观唯心主义美学家，到人们的心灵中寻找美；而是像毕达哥拉斯、赫拉克利特、亚里士多德们那样，力求在客观事物中寻找美的根源，甚至从事物之间的关系、人们的生活中去阐述美。这样，他们的美学主张就自然地符合唯物主义的基本原则。

文艺复兴时期的意大利文化巨匠达芬奇认为，美不是神意的体现，美存在于客观生活中，是能够通过感官所能把握的东西。作为一个画家（当然也是科学家），协调和比例是他的美学观中最突出的法则，他认为人体是自然界中最美的，因为有最理想的比例。

18世纪英国经验派美学家博克以经验事实为根据，肯定美是事物的一种属性，他说：“所谓美，是指物体中能引起爱或类似情感的某一性质或某些性质，而这种性质能够引起‘爱或类似的情感’，就像水与火很有灵效地产生冷或热的感觉一样。”他不承认比例是美的一个因素，而提出了另一些美的法则，如体积小，光滑，色泽鲜明但不刺眼等等。

这些美学家们，不论是试图在哪个领域里寻找美，大都是多注目于物体的形体，所以在论述美的具体表现时总离不开形状、大小、比例、色泽等概念而未能越雷池一步。

突破这一局限性，努力从社会生活中阐述美的第一个人是德国著名启蒙思想家、唯物主义哲学家狄德罗。在哲学上，他认为物质是唯一实体，此外不存在什么超自然的“理性实体”，也不存在上帝。在认识论上，他认为“物质是我们感觉的普遍原因”，“感觉是我们一切知识的来源”。在美学上，他提出了著名的定义：

“美是关系”。

学生甲 怎样理解“美是关系”的含义呢？

老师 是的，狄德罗的“美是关系”之说如同黑格尔的“美是观念的感性显现”论一样，是需要一番解释的。狄德罗说：“一切能在我们心里引起关系的知觉的，就是美的。”他又说：“……由于我们注意它的关系而美，我并不是说由我们的想象力移植过去的智力的或虚构的关系，而是说那里的实在关系。”他为了进一步解释自己的理论，从有名的古建筑物到文学作品中的语言，举了具体的例子进行了说明。例如法国的卢浮宫的门面是美的，因为“其一切组成部分照旧有这种或那种形式，其各部分间也照旧有这种或那种安排”。像这样，一个事物由内部各部分间的关系而构成的美他叫做“实在美”。又，如果孤立地看一句话是无所谓美与不美了，但若由特定的人在特定的场合说的，就可能是绝美的。像这样，一事物在与周围的事物的相联系中所产生的美他叫做“相对美”。狄德罗试从事物之间普遍存在的关系中阐述美，这是可喜的一步。作为思想家的狄德罗，在美的探索道路上虽然表现出了胜过以往美学家们的思想的深刻性，但还没有从人类生活的发展中阐述美，所以他的定义还是宽泛模糊的。

在马克思主义产生以前的美学家中，最后一个也是达到最高水平的重要学者是俄国唯物主义哲学家、文艺评论家、作家车尔尼雪夫斯基。他从人类的社会生活中来探索美的根源，把对美的阐述植根于广阔生活的基础之上，提出了“美是生活”这一著名定义。

“美是生活”。车尔尼雪夫斯基认为：“任何事物，凡是我们在哪里看得见依照我们的理解应当如此的生活，那就是美的；任何东西，凡是显示出生活或使我们想起生活的，那就是美的。”这就是说，所有美的事物无不和人们的生活有联系，在这里，车尔尼雪夫斯基从生活的广阔角度，指出了一切美之所以美的一个共同的渊藪。

学生乙 狄德罗和车尔尼雪夫斯基对美的认识比起以往的美学家们是深刻多了。可是，他们对美的定义方式却令人费解。“美是关系”，但并非所有的关系都是美的，因为一切事物无不都处于一定的关系中，然而不是凡事物都是美的；“美是生活”，但并非所有的生活都是美的，因为生活中还有许多令人失望、憎恶、痛苦的东西。对我们学习数理的人这种定义方法很不习惯。

老师 是啊，为了给美作出定义，用了一个其外延，远可以把丑也包括在内的概念，这在逻辑上是不适宜的。但这里的定义，不能理解成在数学、逻辑学中所说的定义，而应理解成美学家们用极精炼的语言点出美的实质这样一种尝试，而且还要允许人家作进一步的解释。

学生丁 车尔尼雪夫斯基从现实生活中阐发美的根源，是现实主义的。“美是生活”经过上面一番说明后也容易被理解。可是还有一点疑问：在人们尚未开发的旷古的深山密林里，大洋中心的深层海底里，远远超出了目前人类的感知范围的宇宙太空中，毫无疑问，在那里也将有数不尽的奇丽壮美的事物，可它们与今天人类的生活却毫无关系，这又怎么解释呢？

老师 关于这一点疑问，是将随着讨论的深入会得到解决的。车尔尼雪夫斯基对美的定义的主要不足之处并不在其他方面，而仍然在于：他虽然是现实主义的，但还不是历史唯物主义的。他仍然站在历史唯物主义的门槛之外。因为，为了给“美是生活”赋予深刻的内容，首先应当作出关于生活的正确阐述。生活是发展的，它的本质是实践。但这样一个极其明白的普遍真理在马克思主义诞生以前对人们来说是那样模糊，车尔尼雪夫斯基也未能例外。他所指的生活是与死灭相对立，生活中的美是与疾病、死亡等丑的事物相对立的。按他的话说：“在人觉得可爱的一切东西中最有一般性的，他觉得世界上最可爱的，就是生活，首先是他所愿意过的、他所喜欢的那种生活；其次是任何一种生活，因为活着到底比不活好。”“假使说生活和它的显现是美，那么，很自然

的，疾病和它的结果就是丑。”固然，人首先是应当生存，然后才有种种生活，但人的生活却绝不只于生存。这种对生活的理解是成问题的。车尔尼雪夫斯基不仅是杰出的学者，而且也是伟大的革命民主主义者，不是苟且求生的懦夫。他曾被沙皇政府追捕、监禁、流放，在流放期间写出了不朽名著《怎么办？》。可是，他在美学上对生活的解释是如此的肤浅，求生的欲望成了生活的全部，人也不是社会的人，而仅只是生物学上的自然人，这简直是生物学观点，更谈不上从历史的、发展的观点去阐述生活了。尽管车尔尼雪夫斯基的美学理论有上述的不足，但它已把人们引向在一个最坚实的地基上筑起美学大厦的道路上了。

以上就是自毕达哥拉斯最早探讨美直到马克思主义诞生之前这 2000 多年间各个历史时期的重要代表人物及他们的美学主张。

学生乙 在这些五花八门的美学定义中，很难确切地说出美到底是什么。唯心主义的美学家们企图从精神、心灵里寻找美的根源，这不符合通常的哲学常识，我们不赞成，可是持唯物主义观点的美学家们对美的定义也是因人而异：毕达哥拉斯的美是和谐，达·芬奇的美是比例，博克的美是使人们产生爱和类似情感的东西，狄德罗的美是关系，车尔尼雪夫斯基的美是生活，众说不一，都有道理，都有缺陷。那么，究竟什么是美呢？我们还是很模糊。

老 师 让我们继续讨论下去。

二、美究竟是什么

在这里，我们再一次不能违背定义是研究的结果而不是出发点这样一个真理。数学是如此，美学原来也不例外。谁也不会同意 2000 多年的美学的发展史是美的定义史这一说法，但这种比喻却并不过分。人们确认“美是难的”，然而并没有被其难所慑服，而始终那样顽强地探索着。

在古代，科学与艺术没有明显的划分，美学更不是一门独立