

数学学习指导

夏国斌 施正和 主编

电子科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学学习指导/夏国斌,施正和主编.—成都:电子科技大学出版社,2004.8
ISBN 7—81094—589—0

I .数... II .①夏...②施... III .数学课—专业学校—教学参考资料 IV.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 083820 号

中等专业学校文化基础课程教改教材

数学学习指导

夏国斌 施正和 主编

出版:电子科技大学出版社(成都建设北路二段四号 邮政编码:610054)

责任编辑:张俊

发行:电子科技大学出版社

印刷:合肥育才印刷厂

开本:787mm×1092mm 1/16 印张 11.75 字数 240 千

版次:2005 年 8 月第 2 版

印次:2006 年 8 月第 2 次印刷

书号:ISBN 7—81094—589—0/O·29

定价:15.80 元

前 言

本书是与《中等专业学校文化基础课程教改教材——数学》配套的学习辅导书。

本书按照教材内容、章次对应编写,每章内容主要由“知识要点”、“学习要求”、“学习指导”、“典型例题”、“单元自测”和“参考答案”等六个部分组成。其中,“知识要求”是对课程内容进行整理与提炼,使之更加条理化、系统化,帮助学生总结、归纳、掌握各章的主要内容;“学习要求”是根据教学大纲明确指出学习各章内容的基本要求及重点和难点,具体规定学习各章内容应达到的程度,使学生有明确的学习目标;“学习指导”是围绕重点、难点具体指导学生如何正确理解基本概念,如何熟练掌握基本运算,对学习过程中容易出现的问题作进一步的分析、阐述,帮助学生突破难点掌握重点;“典型例题”是通过分析各种典型例题的求解思路,展示各种解题方法和技巧,帮助学生加深对基本概念和基本定理的理解,提高运用基本概念、基本理论和基本公式去分析问题和解决问题的能力;“单元自测”是根据教学大纲对各章知识的基本要求,参照各类考试所采用的题型搭配,拟出一份解答时间约 50 分钟的单元自测试卷,供学生在单元复习时使用;“参考答案”是为了方便学生学习和教师教学,在每一章内容的最后,为配套教材中每一小节的习题、每一章的复习题和学习指导书中每一章单元自测的所有题目提供了参考答案,并对部分稍有难度的题目给出了解答提示。

本学习指导书主要适用于中等专业学校,也可作为各类中等职业学校、成人职业学校、技工学校、职业培训学校的教学参考书。

本学习指导书由安徽机电职业技术学院夏国斌和马鞍山工业学校施正和担任主编,由安徽省第一轻工业学校李卓奇、淮南经济技术学校丁士中担任主审。参加编写的人员有安徽电气工程学校徐小伍(第 1 章)、安徽机电职业技术学院李立众(第 2 章),马鞍山工业学校赵祖林(第 3 章),安徽机电职业技术

学院姜绳(第4章)、刘传宝(第5章),滁州职业技术学院梁建国(第6章),淮南经济技术学校袁惠芳(第7章),安徽省第一轻工业学校张永胜(第8章),安徽化工学校周文龙(第9章)。

在本书编写过程中,我们得到了安徽省教育厅中专处领导以及中专数学教学研究会有关领导的热情关心和指导,得到了有关院校教师和领导的大力支持,在此一并表示衷心的感谢!

限于编者的学识和水平,学习指导书中出现的错误、疏漏和不完善之处在所难免,敬请使用本书的教师和同学予以指正。

编者
2005年5月

目 录

第 1 章 预备知识	1
一、知识要点	1
二、学习要求	5
三、学习指导	6
四、典型例题	9
五、单元自测 1	14
六、参考答案	16
第 2 章 集合与不等式	22
一、知识要点	22
二、学习要求	25
三、学习指导	25
四、典型例题	27
五、单元自测 2	30
六、参考答案	30
第 3 章 函数	33
一、知识要点	33
二、学习要求	36
三、学习指导	36
四、典型例题	38
五、单元自测 3	46
六、参考答案	47
第 4 章 三角函数	53
一、知识要点	53
二、学习要求	58
三、学习指导	59
四、典型例题	69
五、单元自测 4	77
六、参考答案	78
第 5 章 复数	86
一、知识要点	86

二、学习要求	88
三、学习指导	89
四、典型例题	92
五、单元自测 5	95
六、参考答案	96
第 6 章 直线	98
一、知识要点	98
二、学习要求	100
三、学习指导	100
四、典型例题	103
五、单元自测 6	107
六、参考答案	108
第 7 章 二次曲线	112
一、知识要点	112
二、学习要求	114
三、学习指导	115
四、典型例题	117
五、单元自测 7	127
六、参考答案	128
第 8 章 微分学初步	135
一、知识要点	135
二、学习要求	139
三、学习指导	139
四、典型例题	144
五、单元自测 8	148
六、参考答案	149
第 9 章 积分学初步	156
一、知识要点	156
二、学习要求	158
三、学习指导	158
四、典型例题	162
五、单元自测 9	168
六、参考答案	169
附录 计算器的使用技巧	177

第 1 章 预备知识

数轴是理解数的概念与运算的重要工具,数与表示数的图形(如数轴)相结合的思想是学习数学的重要思想.数、式、方程、不等式和函数等内容有着内在的联系,它们是进一步学习数学的基础,是学习和研究现代科学技术的基本数学工具.

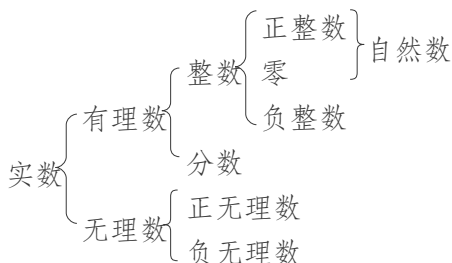
一、知识要点

(一)实数及其运算

1. 数的基本概念

能被 2 整除的整数叫做偶数;不能被 2 整除的整数叫做奇数.有限小数或无限循环小数称为有理数;无限不循环小数称为无理数.

2. 实数的分类



3. 数轴与绝对值

规定了原点、正方向和长度单位的直线称为数轴.

注:实数与数轴上的点是一一对应的.

数轴上表示数的点到原点的距离称为这个数的绝对值.

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

乘积为 1 的两个数互为倒数,0 没有倒数.

4. 运算律

$$a + b = b + a \quad (\text{加法的交换律})$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (\text{加法的结合律})$$

$$ab = ba \quad (\text{乘法的交换律})$$

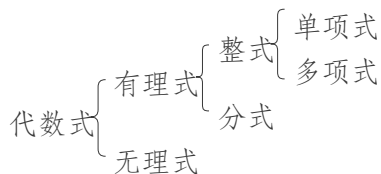
$$(ab)c = a(bc) \quad (\text{乘法的结合律})$$

$$a(b+c) = ab+ac \quad (\text{乘法对加法的分配律})$$

(二)代数式及其运算

1.代数式

用运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)把数或表示数的字母连接而成的式子叫做代数式(单独的一个数或表示数的字母也叫代数式)。



没有除法运算或虽有除法运算但除式里不含字母的有理式叫做整式.形如 $\frac{A}{B}$ 的式子叫做分式.其中 A 和 B 都是整式, B 中含有字母,且 B 的值不能为零.

2.正整数幂的运算法则

$$(1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(2) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) (ab)^m = a^m b^m$$

3.因式分解

把一个多项式分成几个整式的积的形式叫做因式分解.

因式分解的方法:提公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法.

把一个多项式分解因式,一般可按下列步骤进行:

(1)如果多项式的各项有公因式,那么先提公因式.

(2)如果各项没有公因式,那么可以尝试运用公式来分解.

(3)如果用上述方法不能分解,那么可以尝试用分组或其他方法(如十字相乘法)来分解.

(4)分解因式,必须进行到每一个多项式因式都不能再分解为止.

4.分式的运算

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}; \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

5.分式的基本性质

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times M}{B \times M}; \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div M}{B \div M} \quad (M \neq 0).$$

6.二次根式的主要性质

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0)$$

(三) 方程、方程组与不等式

1. 一元一次方程的标准形式是 $ax + b = 0$, 其中 x 是未知数, $a \neq 0$, 它有一个解为 $x = -\frac{b}{a}$.

解一元一次方程的一般步骤是去分母、去括号、移项、合并同类项和系数化为 1.

2. 一元二次方程的一般形式为: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根, 即

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

当 $b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根, 即

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a};$$

当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程无实数根.

一元二次方程的解法: 直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法.

3. 不等式

表示不等关系的式子叫做不等式

不等式的基本性质:

如果 $a < b$, 那么 $a + c < b + c$;

如果 $a < b, c > 0$, 那么 $ac < bc$;

如果 $a < b, c < 0$, 那么 $ac > bc$;

如果 $a < b, c < d$, 那么 $a + c < b + d$.

4. 一元一次不等式的标准形式是 $ax + b > 0$ 或 $ax + b < 0$ ($a \neq 0$).

(四) 函数及其图像

1. 平面直角坐标系内的点与有序实数对 (x, y) 一一对应.

2. 函数的概念

在某一变化过程中的两个变量 x 和 y , 如果对于 x 在某个范围内的每一个确定的值, y 都有惟一确定的值和它对应, 那么就称 y 为 x 的函数, 记作 $y = f(x)$, 其中 x 称为自变量.

$f(x_0)$ 表示函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 时所对应的函数值, 记为 $f(x_0) = f(x)|_{x=x_0}$.

函数的表示方法: 解析法、列表法、图像法.

3. 一次函数

如果 $y = kx + b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$), 那么 y 叫做 x 的一次函数.

特别地,当 $b=0$ 时,一次函数 $y=kx+b$ 成为 $y=kx$ (k 是常数, $k \neq 0$), 这时, y 叫做 x 的正比例函数.

一次函数 $y=kx+b$ 有下列性质:

(1) 当 $k > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

(2) 当 $k < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小.

一次函数 $y=kx+b$ 的图像是一条直线.

4. 二次函数

如果 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$), 那么 y 叫做 x 的二次函数.

二次函数的图像是一条抛物线, 它的对称轴是 $x = -\frac{b}{2a}$, 顶点坐标是

$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $a > 0$ 时, 抛物线的开口向上, 当 $a < 0$ 时, 抛物线的开口向下.

5. 反比例函数

函数 $y=\frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 叫做反比例函数. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像称为双曲线.

当 $k > 0$ 时, 双曲线两分支在一、三象限, 当 $k < 0$ 时, 双曲线两分支在二、四象限.

(五) 解直角三角形

1. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中

$$(1) \sin A = \frac{a}{c}, \cos A = \frac{b}{c}, \tan A = \frac{a}{b}, \cot A = \frac{b}{a}.$$

$$(2) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$(3) \sin(90^\circ - A) = \cos A, \cos(90^\circ - A) = \sin A,$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A, \cot(90^\circ - A) = \tan A.$$

式中 $90^\circ - A$ 可用 B 来代表.

2. 一些特殊角的三角函数值:

三角函数值 \ 角	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\cot \alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

二、学习要求

1.掌握实数的有关概念,会把给出的实数按要求进行归类;了解实数的绝对值的意义,以及实数与数轴上的点一一对应;熟练掌握实数的运算.

2.掌握正整数幂的运算性质,会用它们熟练地进行运算.

3.了解平方根、算术平方根的概念,以及用根号表示数的平方根;了解开方与乘方互为逆运算,会用平方运算求某些非负数的平方根与算术平方根.

4.掌握单项式与单项式、单项式与多项式、多项式与多项式相乘的法则以及单项式除以单项式、多项式除以单项式的法则,会用它们进行运算.

5.掌握分式的加、减与乘、除、乘方的运算法则,会进行运算.

6.了解因式分解的一般步骤,掌握提公因式法、运用公式法、分组分解法、十字相乘法这四种分解因式的方法,会用这些方法分解因式.

7.掌握二次根式的性质,能根据二次根式的性质熟练地化简二次根式;掌握二次根式的运算法则,会用它们进行运算.

8.掌握一元一次方程的解法;了解一元二次方程的概念,会用求根公式法、因式分解法解一元二次方程.

9.理解一元二次方程的根的判别式,会用根的判别式判断一元二次方程根的情况.

10.掌握二元一次方程组、一元一次不等式(组)的解法.

11.理解平面直角坐标系的概念,会根据坐标确定点和由点求点坐标.了解平面内的点与有序实数对之间一一对应.

12.了解函数概念和函数的表示法;理解一次函数、二次函数和反比例函数的概念和性质.

13.了解锐角三角函数的概念,能够正确地应用 $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ 表示直角三角形中两条边之比;熟记 0° 、 30° 、 45° 、 60° 、 90° 角的三角函数值,会计算含有特殊角的三角函数式的值.

14.掌握直角三角形的边角关系,会用勾股定理,直角三角形的两个锐角互余及锐角三角函数解直角三角形.

※ 重点

1.正整数指数幂的运算性质.

2.单项式与单项式、单项式与多项式、多项式与多项式相乘的法则以及多项式与单项式、单项式与单项式相除的法则.

3.整式与分式的运算.

4.二次根式的化简与运算.

5.平方根、算术平方根的概念及求法.

6. 锐角三角函数的概念和直角三角形的解法 .

7. 一次函数的概念、图像和性质 .

※ 难点

1. 综合运用各种方法分解因式 .

2. 分式的四则混合运算 .

3. 算术平方根的概念和实数的概念 .

4. 正确理解与运用公式 $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$.

5. 锐角三角函数的概念 .

6. 一元二次方程和一元一次不等式组的解法 .

7. 函数的概念 .

三、学习指导

1. 实数及其运算

(1) 教材中讲到, 自然数中, 如果一个数能被 2 整除, 则这个自然数称为偶数; 如果不能被 2 整除, 则这个自然数称为奇数. 注意: 偶数、奇数不一定是自然数, 负整数也可能是奇数或偶数. 如 -2 是偶数, -3 是奇数.

自然数中, 0 和 1 既不是质数, 也不是合数, 2 是最小的质数.

有理数的定义中, 有限小数包括整数. 整数也可看成分母是 1 的分数, 可以定义成分数就是有理数, 有理数可以写成 $\frac{q}{p}$ 的形式, 其中 p, q 是整数, $p \neq 0$.

(2) 数轴概念中, 重要的是三要素——原点、正方向和单位长度. 这三者缺一不可. 在数轴上表示的两个数, 右边的数总比左边的数大.

(3) 实数的混合运算顺序: 先算乘方, 开方, 再算乘除, 最后算加减. 如果有括号, 就先算括号里面的.

在运算中要注意正负号、运算顺序等, 以提高准确性, 还要注意灵活运用运算律, 以提高运算速度.

(4) 任何正数 a 的平方根有两个, 它们互为相反数, 记作 $\pm\sqrt{a}$, 任何正数 a 的算术平方根只有一个, 它就是指正数 a 的正的平方根, 记作 \sqrt{a} . 正数和零可以实施开平方运算, 但负数开平方没有意义.

2. 代数式及其运算

(1) 单项式的系数是对式中的字母来说的, 有数字系数与字母系数的不同. 如 $2xy^2$ 的系数是数字 2, ax^2y 的系数可看作是字母 a . 单项式的次数是式中所有的字母的指数的和, 而且次数仅仅与指定字母有关. 如 $3ab^3c^2$, 对字母 a, b, c 是 6 次单项式.

单独一个非零的数,也是单项式,次数是0.数0也可以看作单项式,它没有确定的次数.多项式是几个单项式的和.每个单项式是该多项式的一个项,各项都应包括它前面的符号.

(2)在合并同类项时,一定要辨明合并的项确是同类项,要按照合并同类项的法则进行运算.去括号和添括号时,特别要注意括号前的符号,括号内的多项式与一个数相乘时,要注意按分配律进行运算.

(3)学习多项式的因式分解,要知道因式分解与整式乘法的区别和联系.整式乘法是把几个整式相乘化为一个多项式;而因式分解是把一个多项式化为几个整式相乘.例如,把 $(a+b)(a-b)$ 化成 a^2-b^2 是整式乘法;把 a^2-b^2 化成 $(a+b)(a-b)$ 是因式分解.这就是说,

$$(a+b)(a-b) \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{整式乘法}} \\ \xleftarrow{\text{因式分解}} \end{array} a^2-b^2.$$

什么时候用整式乘法,什么时候用因式分解,是根据需要而决定的.例如,要把 $(x-1)(x-2)-6$ 分解因式,必须先做整式乘法,得

$$(x-1)(x-2)-6=(x^2-3x+2)-6=x^2-3x-4=(x+1)(x-4).$$

又如,计算 $(x+2)^2-(x-2)^2$ 时,通常不是先做整式乘法,而是先进行因式分解,得

$$(x+2)^2-(x-2)^2=[(x+2)+(x-2)][(x+2)-(x-2)]=2x \times 4=8x.$$

本章所说的因式分解都是在实数范围内进行的,要求因式中每个系数(包括常数项)都是实数,并且分解到不能再分解为止.

(4)在进行二次根式的化简与运算时,往往需要先将式子中的二次根式适当化简.例如,在进行除法运算时,适当化简就可能利用约分简化运算.

3. 方程、方程组与不等式

(1)在解一元一次方程时,要灵活安排各个步骤的次序(不一定每个步骤都要用到),这样往往可使计算简便.在整个求解过程中,要注意避免去分母、去括号、移项时易犯的错误.

(2)在解一元二次方程时,一般先考虑因式分解法,再考虑求根公式法.公式法对于解任何一元二次方程都适应,是解一元二次方程的主要方法.

(3)在解一元一次不等式时,要特别注意,当不等式两边同乘以(或除以)同一个负数时,不等号的方向必须改变.

(4)在解一元一次不等式组时,应先解出各不等式,在同一数轴上画出各不等式的解,它们的公共部分就是不等式组的解.

4. 函数及其图像

函数的表示方法有三种,本章学习的函数主要是用解析式表示的,解析式比例简明,并且可以根据解析式列表、画图像,进而研究函数的性质.

对于函数的意义,应该领会两点:一是有两个变量,二是一个变量的数值随着另

一个变量的数值变化而变化.

函数自变量的取值范围包括两个方面:一是自变量取值使函数解析式有意义.如反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 要求 $x \neq 0$. 二是自变量取值使实际问题有意义. 如周长是 60 的矩形, 它的面积 S 与一边长 l 的关系 $S = l(30 - l)$, 自变量 l 应满足 $0 < l < 30$.

函数是由定义域和对应关系两个要素确定, 用什么字母表示变量无关紧要. 例如 $y = x^2$ 与 $s = t^2$ 并无本质区别, 二者可表示同一函数.

(1) 一次函数 $y = kx + b$ (k, b 是常数, $k \neq 0$)

当 $b = 0$ 时, 一次函数 $y = kx + b$ 就成为正比例函数 $y = kx$ ($k \neq 0, k$ 是常数).

当 $k = 0$ 时, 可得到 $y = b$ (b 是常数), 这样的函数叫做常数函数, 它不是一次函数, 它的图像是一条水平直线.

画一次函数的图像, 只要描出与 x 轴, y 轴的交点, 把这两点连成直线即可.

(2) 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像画法, 一般分为三步:

第一, 利用配方把二次函数化成 $y = a(x - h)^2 + k$ 的形式.

第二, 确定抛物线开口方向, 对称轴及顶点坐标. 如 $a > 0$, 则开口向上; $a < 0$, 开口向下, 对称轴是 $x = h$, 顶点坐标是 (h, k) .

第三, 利用对称性描点画图.

通过学习函数及其图像的知识, 可以进一步体会数形结合的思想在研究、解决问题时的作用.

5. 解直角三角形

本章所研究的锐角三角函数, 所涉及的角都是锐角, 它们都是 0° 与 90° 之间的角. 研究这样的角, 可以与直角三角形直接联系起来. 容易得出:

$$\sin(90^\circ - A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A,$$

$$\tan(90^\circ - A) = \cot A, \quad \cot(90^\circ - A) = \tan A.$$

解直角三角形时, 要弄清楚直角三角形中三边之间关系, 两锐角之间的关系以及边之间关系. 正确选用这些关系是正确、迅速地解直角三角形的关键.

三边关系: $a^2 + b^2 = c^2$ (勾股定理)

两锐角之间关系: $\angle A + \angle B = 90^\circ$

边角之间关系: $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\tan A = \frac{a}{b}$, $\cot A = \frac{b}{a}$.

利用这些关系, 知道其中的 2 个元素(至少有 1 个是边), 可求出其余的 3 个未知元素.

例如: 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$, 斜边 $c = 10$, $\angle A = 60^\circ$, 解直角三角形.

解 在 $\text{Rt}\triangle ABC$, 已知 $\angle A = 60^\circ$, $c = 10$,

$$\text{则 } \angle B = 90^\circ - \angle A = 30^\circ,$$

$$b = c \cdot \cos A = 10 \times \cos 60^\circ = 5,$$

$$a = c \cdot \sin A = 10 \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$$

$$(\text{或 } a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}).$$

四、典型例题

例 1 已知实数 a, b, c , 在数轴上的对应点如图 1-1 所示, 化简: $|a-b| + |b-c| - |a-c|$.



图 1-1

分析 本题的关键是根据 a, b, c 在数轴上对应点的位置判断 a, b, c 的大小, 进而判定 $a-b, b-c, a-c$ 的正负, 正确的去掉绝对值符号后再化简.

$$\begin{aligned} \text{解 } |a-b| + |b-c| - |a-c| &= -(a-b) - (b-c) + (a-c) \\ &= -a + b - b + c + a - c = 0. \end{aligned}$$

例 2 计算: $-2^2 + (-2)^2 - (-1)^3 \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \frac{1}{6} - |-1|$.

分析 实数运算应在掌握有关运算法则的基础上注意符号, 运算中能运用简便方法计算的, 应尽量用简便方法, 式中应注意 -2^2 和 $(-2)^2$ 的区别.

$$\text{解 原式} = -4 + 4 + 1 - 1 = 0.$$

例 3 某商店上月的营业额是 a 万元, 本月比上月增长 15%, 那么本月的营业额是().

A. $(a+1)15\%$ 万元

B. $15\% a$ 万元

C. $(1+15\%)a$ 万元

D. $(1+15\%)^2 a$ 万元

分析 本题考查列代数式技能. 它是一个有关增长率的列代数式问题, 与实际问题密切相关, 是列方程解应用题的重要基础. 此外, 还有工程、行程等列代数式问题. 复习时要适当做些练习, 掌握相关量的代数关系式.

解 选 C.

例 4 (1)若单项式 $3a^3b^{2x}$ 与 $\frac{1}{3}a^3b^{4(x-7)}$ 是同类项, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2)已知代数式 $x^2 + 3x + 5$ 的值为 7, 则代数式 $3x^2 + 9x - 2$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

分析 第(1)题除考查同类项的定义外, 还考查了方程的知识, 利用定义解题的关键是准确的理解定义. 第(2)题是求代数式值的问题. 若利用定义来解, 需先求出 x , 再代入代数式中求值, 计算较复杂. 事实上, 由条件可得 $x^2 + 3x = 2$, 因此 $3x^2 + 9x - 2 = 3(x^2 + 3x) - 2 = 3 \times 2 - 2 = 4$, 这是整体代入的思想方法.

解 (1) $x = 1$; (2) $3x^2 + 9x - 2 = 4$.

例5 (1)下列计算正确的是().

A. $(a^2)^3 = (a^3)^2$

B. $3y^2 \cdot 5y^4 = 15y^{12}$

C. $(-c)^4 \div (-c)^2 = -c^2$

D. $(ab^5)^2 = ab^{10}$

(2)计算 $(a-b-c)(a+b+c)$ 的结果为().

A. $a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$

B. $a^2 + b^2 + c^2 - 2bc$

C. $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$

D. $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$

分析 第(1)题考查幂的运算法则,虽然题小,但却考查多个知识点.第(2)题可以用多项式乘以多项式进行计算,也可以应用乘法公式简化计算.利用乘法公式进行计算时,不仅要正确合理的选用公式,还要注意灵活运用.

解 (1)A; (2)D.

例6 把下列各式分解因式:

(1) $81 - 3y^3$;

(2) $16x^2 - (x^2 + 4)^2$.

分析 因式分解的一般步骤可概括为:“一提、二套、三分、四查”.“一提”指是否有公因式可提;“二套”指能否套用公式;“三分”指当上述两步分解不了时考虑分组分解;“四查”指查因式分解是否彻底.在多数情况下,还要结合多项式的项数确定采用哪种方法.

解 (1) $81 - 3y^3 = 3(27 - y^3) = 3(3^3 - y^3) = 3(3 - y)(9 + 3y + y^2)$;

(2) $16x^2 - (x^2 + 4)^2 = (4x - x^2 - 4)(4x + x^2 + 4) = -(x - 2)^2(x + 2)^2$.

例7 (1)当 x 为何值时,分式 $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ 有意义;

(2)当 x 为何值时,分式 $\frac{x^2 - x - 6}{|x| - 2}$ 的值为零.

分析 本题考查了分式 $\frac{A}{B}$ 在什么情况下有意义、无意义和值为零的问题.当 $B \neq 0$ 时分式 $\frac{A}{B}$ 有意义;当 $B = 0$ 时分式 $\frac{A}{B}$ 无意义;当 $A = 0$ 且 $B \neq 0$ 时,分式 $\frac{A}{B} = 0$. 解这类问题需要用因式分解和解一元二次方程等有关知识.

解 (1) $x^2 + 2x - 3 \neq 0$ 即当 $x \neq -3$ 且 $x \neq 1$ 时,分式有意义.

(2)
$$\begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ |x| - 2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x = 3 \text{ 或 } x = -2 \\ x \neq 2 \text{ 且 } x \neq -2 \end{cases}$$

所以 $x = 3$ 时,分式值为零.

例8 求值:(1)已知 $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 求 $(a - b + \frac{4ab}{a - b})(a + b - \frac{4ab}{a + b})$ 的值.

(2)已知 $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$ ($x \neq 0, y \neq 0$), 求 $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} - \frac{x^2 + y^2}{xy}$ 的值.

分析 求代数式的值一般先化简再求值,有时还必须对条件进行适当的变形和

运算. 如(2)中可先求出 $\frac{x-a}{y} - 1$ 或 $\frac{x-2}{y-3}$ 后再求代数式的值;也可先求出 $x = -y$ 或 $x = \frac{2}{3}y$ 后,再求代数式的值.

解 (1)原式 = $\left[\frac{(a-b)^2 + 4ab}{a-b} \right] \left[\frac{(a+b)^2 - 4ab}{a+b} \right] = \frac{(a+b)^2 (a-b)^2}{(a-b)(a+b)}$
 $= (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

∴ 当 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时,原式 = $\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = -1$.