数学物理方法简明教程

郭玉翠　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是为高等工科院校本科数学物理方法课程而编写。依据是高等工业学校数学教学大纲(草案)及编者多年来在北京邮电大学教授本课程的经验和体会。

全书共分8章。第1章是数学物理定解问题的提出;第2章讲述分离变量法;第3、4、5章是分离变量法的深入,分别讲述正交曲线坐标系下的分离变量法,二阶常微分方程的级数解法,本征值问题及作为本征函数引出的两个特殊函数(贝塞尔函数和勒让德函数)的性质及应用;第6、7章分别介绍行波法、积分变换法及格林函数法。为了体现科学的最新进展,在第8章中介绍积分方程和非线性方程的基本解法。

本书可作为高等工科院校的本科生教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法简明教程 郭玉翠编著 . —北京:北京邮电大学出版社,2002
ISBN 7-5635-0664-0

Ⅰ. 数… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 数学物理方法—高等学校—教材 Ⅳ. 0411 .1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 099159 号

出 版 者: 北京邮电大学出版社(北京市海淀区西土城路10号)
邮编:100876 发行部电话:(010)62282185 62283578(传真)
E-mail:publish@bupt .edu .cn
经 销: 各地新华书店
印 刷: 北京源海印刷厂
开 本: 850 mm×1 168 mm 1/ 32 印 张: 7 .25
印 数: 1—4 000 册 字 数: 182 千字
版 次: 2002 年 12 月第 1 版 2002 年 12 月第 1 次印刷

ISBN 7-5635-0664-0/ O·40 定价:12.00 元

前　　言

本书为高等工科院校通讯电子类本科学生学习数学物理方法这门课程而编写。参考高等工科院校工程数学教学大纲并结合编者在北京邮电大学讲授这门课程的经验和体会而完成。与同类教材相比,这本教材的特点是:

(1) 根据通讯电子类专业的特点,在确保基本概念准确和理论体系完整的前提下,加强实际背景的阐述,突出数学物理方法作为数学应用于物理与工程科学的桥梁作用,以培养学生综合应用数学知识解决实际问题的能力。

(2) 在讲法上,先从有实际背景的问题导出基本方程和定解条件,然后按照数学物理方程的各种解法逐步展开,以分离变量法为主,讨论了三类基本方程在直角坐标系、极坐标系、柱坐标系和球坐标系下的分离变量法的一般步骤及其边界条件的处理。“特殊函数”部分,将特殊函数方程的解法与特殊函数方程从求解数学物理定解问题中的引出分开来讲,突出层次,这样不但使学生易于接受,也便于学生再进一步学习本书以外的其他特殊函数。因为无论是数学物理方程还是特殊函数,内容都是非常丰富的,作为一本工科院校的工程数学教材,不可能将如此丰富的所有知识都吸收进来。但我们尽量使本书起到引论的作用,为学生打开一扇门。像在实际应用中很重要的格林函数法一章也是分层次处理,讲清问题的基本概念,为深入学习与研究打下基础。

(3) 为了适应现代物理中大量求解非线性偏微分方程的需要,在第 8 章中对非线性偏微分方程和积分方程作了初步介绍,体现了教材的现代化精神。

本书的编写与出版得到闵祥伟教授的热情鼓励与帮助，得到北京邮电大学理学院及北京邮电大学出版社的大力支持，在此一并表示深深的感谢。

由于编者水平有限，书中一定存在不少的缺点甚至错误，望读者不吝赐教。

编　者

2002 年 12 月

目　录

第 1 章　数学物理定解问题——典型方程和定解条件的导出

在这一章中将介绍数学物理方程的基本概念、典型方程的推导、定解条件的给出、定解问题的提法以及二阶线性偏微分方程的分类与化简.

所谓数学物理方程,是指物理学和工程科学与技术中导出的,反映物理量之间关系的偏微分方程和积分方程.本章主要介绍一些典型的二阶偏微分方程:波动方程、热传导方程、拉普拉斯方程、泊松方程和亥姆霍兹(Helmholtz)方程.下面以实例说明.

1.1　典型方程的推导

1.1.1　波动方程

1. 均匀弦的微小横振动

设有一根均匀柔软的细弦,平衡时沿直线拉紧,而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外,不受外力影响.下面研究弦作微小横向振动的规律.所谓"横向"是指全部运动出现在一个平面上,而且弦上的点沿垂直于 x 轴的方向运动(图 1.1.1).所谓"微小"是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小,以致它们的高于一次方的项都可略而不计.

设弦上具有横坐标为 x 的点,在时刻 t 时的位置为 M,位移 NM 记作 u,显然,在振动过程中位移 u 是变量 x 与 t 的函数

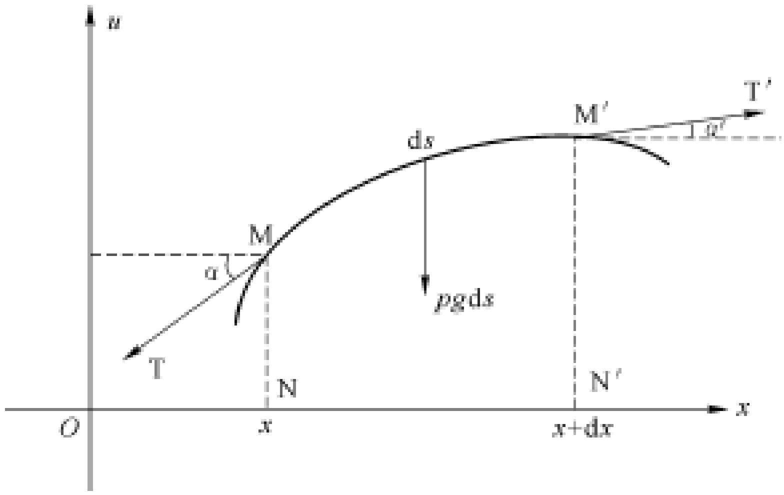

图 1.1.1

$u(x, t)$ 现在来建立位移 u 满足的方程.把弦上点的运动先看作小弧段的运动,然后再考虑小弧段趋于零的极限情况.在弦上任取一弧段 MM',其长为 ds,设 ρ 是弦的线密度,弧段 MM'两端所受的张力记作 T, T'.由于假定弦是柔软的,所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向.现在考虑弧段 MM'在 t 时刻的受力情况.用牛顿运动定律,作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度.

在 x 轴方向弧段 MM'受力的总和为 $-T\cos\alpha + T'\cos\alpha'$,由于弦只作横向振动,所以

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0. \tag{1.1.1}$$

按照上述弦振动微小的假设,可知在振动过程中弦上 M 点与 M' 点处切线的倾角都很小,即 $\alpha\approx 0$, $\alpha'\approx 0$,从而由

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \cdots$$

可知,当我们略去 α 与 α'的所有高于一次方的各项时,就有

$$\cos\alpha \approx 1, \quad \cos\alpha' \approx 1,$$

代入(1.1.1)式,便可近似得到

$$T = T'.$$

在 u **方向弧段** MM' **受力的总和为** $-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s$, **其中** $-\rho g\mathrm{d}s$ **是弧段** MM' **的重力.又因当** $\alpha\approx 0$, $\alpha'\approx 0$ **时**

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \approx \tan\alpha = \frac{u(x,t)}{x},$$

$$\sin\alpha' \approx \tan\alpha' = \frac{u(x+\mathrm{d}x,t)}{x},$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1+\left[\frac{u(x,t)}{x}\right]^2}\,\mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x,$$

且小弧段在时刻 t **沿** u **方向运动的加速度近似为** $\frac{^2u(x,t)}{t^2}$, **小弧段的质量为** $\rho\mathrm{d}s$, **所以**

$$-T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s \approx \rho\mathrm{d}s\frac{^2u(x,t)}{t^2}$$

或

$$T\left[\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)}{x} - \frac{u(x,t)}{x}\right] - \rho g\mathrm{d}x \approx \rho\frac{^2u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}x, \tag{1.1.2}$$

上式左边方括号内的部分是由于 x **产生** $\mathrm{d}x$ **的变化而引起的** $\frac{u(x,t)}{x}$ **的改变量,可用微分近似代替,即**

$$\frac{u(x+\mathrm{d}x,t)}{x} - \frac{u(x,t)}{x} \approx \frac{}{x}\left[\frac{u(x,t)}{x}\right]\mathrm{d}x = \frac{^2u(x,t)}{x^2}\mathrm{d}x$$

于是
$$\left[T\frac{^2u(x,t)}{x^2} - \rho g\right]\mathrm{d}x \approx \rho\frac{^2u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}x$$

或
$$\frac{T}{\rho}\frac{^2u(x,t)}{x^2} \approx \frac{^2u(x,t)}{t^2} + g.$$

一般说来,张力较大时弦振动速度变化很快,即 $\frac{^2u}{t^2}$ **要比** g **大得**

多,所以又可以把 g 略去,经过这样逐步略去一些次要的量,抓住主要的量,在 $u(x,t)$关于 x,t 都是二次连续可微的前提下,最后得出 $u(x,t)$应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1.1.3}$$

这里的 $a^2 = \frac{T}{\rho}$.(1.1.3)式称为一维波动方程.

如果在振动过程中,弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力,且假定在时刻 t 弦上 x 点处的外力密度为 $F(x,t)$,显然,在这时(1.1.1)及(1.1.2)分别为

$$T'\cos\alpha' - T\cos\alpha = 0,$$

$$F\mathrm{d}s - T\sin\alpha + T'\sin\alpha' - \rho g\mathrm{d}s \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的重量,可得弦的强迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \tag{1.1.3$'$}$$

其中 $f(x,t) = \frac{1}{\rho}F(x,t)$,表示 t 时刻单位质量的弦在 x 点处所受的外力.

方程(1.1.3)与(1.1.3)′的差别在于(1.1.3)′的右端多了一个与未知函数 u 无关的项 $f(x,t)$,这一项称为自由项.包含有非零自由项的方程称为非齐次方程.自由项恒等于零的方程称为齐次方程.(1.1.3)为齐次一维波动方程,(1.1.3)′为非齐次一维波动方程.

2. 传输线方程

对于直流电或低频的交流电,电路的基尔霍夫(Kirchhoff)定律指出同一支路中电流相等.但对于较高频率的电流(指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况),电路中导线的自感和电容的效

应不可忽略,因而同一支路中电流未必相等 .

今考虑一来一往的高频传输线,它被当作具有分布参数的导体(图 1 .1 .2),下面来研究这种导体内电流流动的规律 .在具有分布参数的导体中,电流通过的情况,可以用电流强度 i 与电压 v 来描述,此处 i 与 v 都是 x, t 的函数,记作 $i(x, t)$与 $v(x, t)$.以 R, L, C, G 分别表示下列参数:

R——每一回路单位的串联电阻;

L——每一回路单位的串联电感;

C——每单位长度的分路电容;

G——每单位长度的分路电导 .

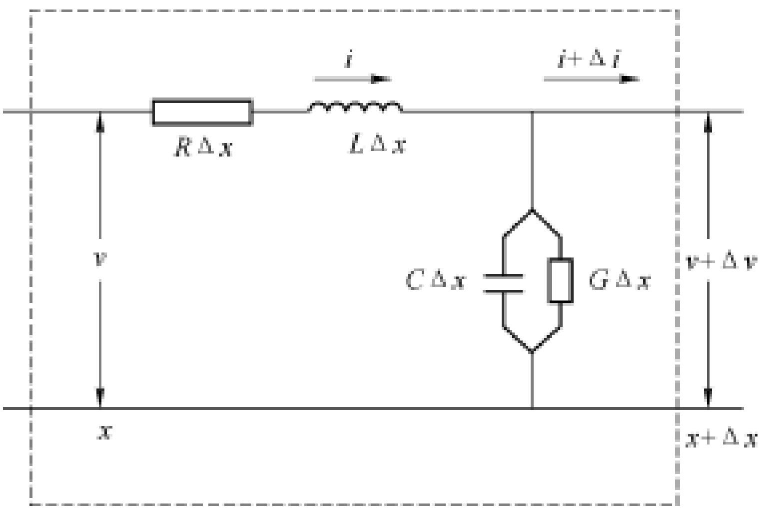

图 1 .1 2

根据基尔霍夫第二定律,在长度为 Δx 的传输线中,电压降应等于电动势之和,即

$$v - (v + \Delta v) = R\Delta x \cdot i + L\Delta x \cdot \frac{i}{t} .$$

由此可得

$$\frac{v}{x} = - Ri - L\frac{i}{t} . \qquad (1 .1 .4)$$

另外,由基尔霍夫第一定律,流入节点 x 的电流应等于流出该节点的电流,即

$$i = (i + \Delta i) + C\Delta x \cdot \frac{v}{t} + G\Delta x . v,$$

或

$$\frac{i}{x} = - C\frac{v}{t} - Gv . \qquad (1.1.5)$$

将方程(1.1.4)与(1.1.5)合并,即得 i, v 应满足如下方程组

$$\begin{cases} \dfrac{i}{x} + C\dfrac{v}{t} + Gv = 0, \\ \dfrac{v}{x} + L\dfrac{i}{t} + Ri = 0 . \end{cases}$$

从这个方程组消去 v(或 i),即可得到 i(或 v)所满足的方程.例如,为了消去 v,将方程(1.1.5)对 x 微分(假定 v 与 i 对 x, t 都是二次连续可微的),同时在方程(1.1.4)两端乘以 C 后再对 t 微分,并把两个结果相减,即得

$$\frac{^2 i}{x^2} + G\frac{v}{x} - LC\frac{^2 i}{t^2} - RC\frac{i}{t} = 0,$$

将(1.1.4)中的$\frac{v}{x}$代入上式,得

$$\frac{^2 i}{x^2} = LC\frac{^2 i}{t^2} + (RC + GL)\frac{i}{t} + GRi, \qquad (1.1.6)$$

这就是电流 i 满足的微分方程.采用类似的方法从(1.1.4)与(1.1.5)中消去 i 可得电压 v 满足的方程

$$\frac{^2 v}{x^2} = LC\frac{^2 v}{t^2} + (RC + GL)\frac{v}{t} + GRv, \qquad (1.1.7)$$

方程(1.1.6)或(1.1.7)称为传输线方程.

根据不同的具体情况,对参数 R, L, C, G 作不同的假定,就可以得到传输线方程的各种特殊形式.例如,在高频传输的情况下,电导与电阻所产生的效应可以忽略不计,也就是说可令 $G = R = 0$,

此时方程(1.1.6)与(1.1.7)可简化为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 i}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

这两个方程称为高频传输线方程.

若令 $a^2 = \frac{1}{LC}$,这两个方程与(1.1.3)′完全相同.由此可见,同一个方程可以用来描述不同的物理现象.一维波动方程只是波动方程中最简单的情况,在流体力学、声学及电磁场理论中,还要研究高维的波动方程.

3. 电磁场方程

从物理学中已知,电磁场的特性可以用电场强度 E 与磁场强度 H 以及电感应强度 D 与磁感应强度 B 来描述.联系这些量的麦克斯韦(Maxwell)方程组为

$$\mathrm{rot}\, H = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \tag{1.1.8}$$

$$\mathrm{rot}\, E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \tag{1.1.9}$$

$$\mathrm{div}\, B = 0, \tag{1.1.10}$$

$$\mathrm{div}\, D = \rho. \tag{1.1.11}$$

其中 J 为传导电流的面密度,ρ 为电荷的体密度.

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$D = \varepsilon E, \tag{1.1.12}$$

$$B = \mu H, \tag{1.1.13}$$

$$J = \sigma E. \tag{1.1.14}$$

相联立,其中 ε 是介质的介电常数,μ 是导磁率,σ 为导电率.假定介质是均匀而且是各向同性的,此时 ε, μ, σ 均为常数.

方程(1.1.8)与(1.1.9)都同时包含有 E 与 H,从中消去一个

变量,就可以得到关于另一个变量的微分方程.例如先消去 H,在(1.1.8)式两端求旋度(假定 H, E 都是二次连续可微的)并利用(1.1.12)与(1.1.14)式得

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\, H = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\, E + \sigma \mathrm{rot}\, E,$$

将(1.1.9)与(1.1.10)式代入上式得

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\, H = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t},$$

而 $\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\, H = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\, H - \nabla^2 H$,且 $\mathrm{div}\, H = \frac{1}{\mu}\mathrm{div}\, B = 0$,所以最后得到 H 所满足的方程为

$$\nabla^2 H = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t};$$

同理,若消去 H,即得 E 满足方程

$$\nabla^2 E = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t};$$

如果介质不导电($\sigma = 0$),则上面两个方程可简化为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2 H, \qquad (1.1.15)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla^2 E, \qquad (1.1.16)$$

(1.1.15)与(1.1.16)式称为三维波动方程.

若将三维波动方程以标量函数的形式表示出来,则可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\nabla^2 u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (1.1.17)$$

其中 $a^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$, u 是 E(或 H)的任意一个分量.

式中∇^2(或写成 Δ)称为拉普拉斯算符,在直角坐标系中,一、二、三维拉普拉斯算符分别为

$$\Delta_1 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ \Delta_3 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

在研究某些物理系统时，它们的边界形状可能是圆周、球面或圆柱面，这时取正交曲线坐标系比较合适，但要写出泛定方程，就得知道拉普拉斯算符在这些坐标系中的表达式，这里将它们列出，详细的推导见附录 A .

平面极坐标(ρ, ϕ)，$u = u(\rho, \phi)$，

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2};$$

球坐标(r, θ, ϕ)，$u = u(r, \theta, \phi)$，

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\gamma^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}.$$

柱坐标(ρ, ϕ, z)，$u = (\rho, \phi, z)$，

$$\Delta_3 u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

1.1.2 热传导和扩散方程

1. 热传导方程

一块热的物体，如果体内每一点的温度不全一样，则在温度较高点处的热量就要向温度较低点处流动，这种现象就是热传导 .由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化而变化 .所以，解决传热问题都要归结为求物体内温度的分布，现在来推导均匀且各向同性的导热体在传热过程中温度所满足的微分方程 .与上例类似，不是先讨论某一点处的温度，而应该先考虑某个区域的温度 .为此，在物体中任取一闭曲面 S，它所包围的区域记作 V(图 1 .1 .3) .假设在时刻 t 区域 V 内点 $M(x, y, z)$ 处的温度为 $u(x, y, z, t)$，n 为曲面元素 ΔS 的法向(从 V 内指向 V 外) .

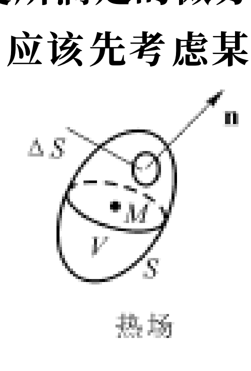

图 1 .1 .3

由传热学中傅里叶(Fourier)实验定律可

知,物体在无穷小时间段 dt 内,流过一个无穷小面积 dS 的热量 dQ 与时间 dt,曲面面积 dS,以及物体温度 u 沿曲面 dS 的法线方向的方向导数$\frac{u}{n}$三者成正比,即

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}Q &= -\ k\frac{u}{n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\
&= -\ k(\mathrm{grad}\ u)_n\mathrm{d}S\mathrm{d}t \\
&= -\ k\ \mathrm{grad}\ u\cdot\mathrm{d}S\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

其中 $k = k(x, y, z)$称为物体的热传导系数,当物体为均匀且各向同性的导热体时,k 为常数 .

上式中的负号是由于热量的流向和温度梯度的正向,即 grad u的方向相反而产生的 这就是说$\frac{u}{n} = \mathrm{grad}\ u\cdot n > (<)0$ 时,物体的温度沿 n 的方向增加(减少),而热流方向却与此相反,故沿 n 的方向通过曲面的热量应该是负(正)的 .

利用上面的关系,从时刻 t_1 到时刻 t_2,通过曲面 S 流入区域 V 的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left[\ {}_{S}\ k\ \mathrm{grad}\ u\cdot\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t .$$

流入的热量使 V 内温度发生了变化,在时间间隔[t_1, t_2]内区域 V 内各点温度从 $u(x, y, z, t_1)$变化到 $u(x, y, z, t_2)$,则在[t_1, t_2]内 V 内温度升高所需要的热量为

$${}_{V}\ c\rho[u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)]\mathrm{d}V .$$

其中 c 为物体的比热,ρ 为物体的密度 对均匀且各向同性的物体来说,它们都是常数 .

由于热量守恒,流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的热量,即

$$\int_{t_1}^{t_2}[\ {}_{S}\ k\mathrm{grad}\ u\cdot\mathrm{d}S]\mathrm{d}t$$