21 世纪大学课程辅导丛书

数学物理方法典型题

（复变函数、积分变换、数理方程与特殊函数）

解法·技巧·注释

李惜雯

西安交通大学出版社

·西安·

内容提要

本书是根据理工科数学物理方法的教学大纲要求进行编写的，包含复变函数、积分变换、数学物理方程与特殊函数三部分内容。全书共分9章，收集了200道（大）题。

每章、节均有基本要求、内容提要及例题解析三部分；每道例题后带有注释，对所用知识及解题思路进行分析和讨论；并在每章最后给出一定量练习题及答案。

本书可作为全日制理工科各专业，电大、函授等各类大学相关专业学生，学习数学物理方法课程，及机类、化工、材料、结构工程等专业硕士研究生学习应用数学基础课程的参考书，也可供从事本类课程教学的中青年教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方法典型题／李惜雯.—西安：西安交通大学出版社，2001.9
ISBN 7-5605-1464-2

Ⅰ.数…　Ⅱ.李…　Ⅲ.数学物理方法—高等学校—解题　Ⅳ.O411.1—44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第064823号

*

西安交通大学出版社出版发行
（西安市兴庆南路25号　邮政编码：710049　电话：(029)2668315）
西安交通大学印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本：787 mm×1 092 mm　1/16　印张：16　字数：385千字
2001年9月第1版　　2001年9月第1次印刷
印数：0 001～5 000　　定价：19.00元

发行科电话：(029)2668357，2667874

前　言

数学物理方法是大部分理工科专业的必修课程，课程目的在于培养学生运用数学方法分析、解决物理问题的能力。由此决定的本课程特点为：第一，涉及到的数学知识广泛；第二，涉及到的物理概念多；第三，计算较繁。除此之外，一般来说，本课程计划内学时不含习题课。因此，多数学生在学习本课程时感到较微积分等数学课困难。为了帮助学生掌握本课程的基本内容，掌握用数学方法分析、解决物理问题的基本方法，作者根据自己多年的教学经验，精心挑选了200道(大)题，并全部亲自推导演算，分析讨论，编成本书。本书力图突出数学概念和物理意义，突出解题思路的分析和知识的内在联系与灵活运用。

在每章、节的前面提出本章、节的基本要求和主要内容，并对每个例题给出注释，对解题的方法与思路进行分析、讨论，以加深读者对知识的深入理解。

本书共分9章，第1～4章为复变函数部分，与其内容体系大体一致的教材是西安交通大学编写的《复变函数》；第5章为积分变换部分，第6～9章为数理方程与特殊函数部分，与其内容体系大体一致的教材为原南京工学院编写的《积分变换》、《数学物理方程与特殊函数》。但为了例题编写的方便、集中，本书在内容的组织上作了适当的调整与增减。

为了方便读者，本书在每章编入了一定量的练习题，并附有答案或提示。

由于时间仓促，编写中定有不少错误与不足，敬请读者批评指正。

在本书的编写过程中得到西安交通大学出版社的大力支持，在此致以谢意！

编　者

2001年6月于西安交通大学

目　　录

第 3 章 解析函数的幂级数表示

第 4 章 留数定理及其应用

第 5 章 Fourier 变换与 Laplace 变换

第 6 章 数学物理方程定解问题

第 1 章　复数与复变函数

1.1　复数的表示与代数运算

1.1.1　基本要求

1. **掌握复数与复平面点的一一对应概念,认识复数的无序性.**
2. **掌握复数的三种表示形式及模与辐角概念、共轭复数概念.**
3. **掌握复球面与无穷远点的概念.**
4. **熟练掌握复数的代数运算、共轭运算及其几何意义.**

1.1.2　内容提要

1. **平面点** (x,y) **与复数** $x+\mathrm{i}\,y=z$ **一一对应.无穷远点记作** ∞.

2. **复数的三种表示**

代数式　$z=x+\mathrm{i}\,y$

指数式　$z=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$

三角式　$z=\rho(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$ **称为** z **的模,记作** $|z|$,θ **称为** z **的辐角,记作** $\mathrm{Arg}\,z$,**将满足** $-\pi<\theta_0\leqslant\pi$(**或** $0\leqslant\theta_0<2\pi$)**的** θ **值称为** $\mathrm{Arg}\,z$ **的主值,记为** $\arg z$. 0 **与** ∞ **无辐角.** $|z|=0\Leftrightarrow z=0$. $|z|=+\infty\Leftrightarrow z=\infty$.

当取 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ **时,有关系**

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & x>0\\[2mm] \dfrac{\pi}{2} & x=0\ \text{且}\ y>0\\[2mm] -\dfrac{\pi}{2} & x=0\ \text{且}\ y<0\\[2mm] \pi+\arctan\dfrac{y}{x} & x<0\ \text{且}\ y\geqslant0\\[2mm] -\pi+\arctan\dfrac{y}{x} & x<0\ \text{且}\ y<0\end{cases}$$

3. **代数运算规则**

1) $(x_1+\mathrm{i}\,y_1)\pm(x_2+\mathrm{i}\,y_2)=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}\,(y_1\pm y_2)$

2) $(x_1+\mathrm{i}\,y_1)(x_2+\mathrm{i}\,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}\,(x_1y_2+x_2y_1)$

或 $z_1z_2=\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]=\rho_1\rho_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$

3) $\dfrac{x_1+\mathrm{i}\,y_1}{x_2+\mathrm{i}\,y_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

或 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}\qquad(|z_2|\neq 0)$

4) $z^n=\rho^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=\rho^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta}$

特别地，$\rho=1$ **时有** De Moivre **公式**

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$$

5) $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\qquad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$

4. **距离不等式**

1) $|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

2) $|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$

5. **共轭复数性质**

1) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$　　4) $(\bar{\bar{z}})=z$

2) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$　　5) $z\bar{z}=|z|^2$

3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$　　6) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,(z)$

$z-\bar{z}=2\,\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(z)$

1.1.3 例题解析

1-1　给出 $z_0=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ 的三角式与指数式表示.

解　**这里给出的是 z_0 的代数式表示. 为求得其他两种表示式，首先应求出其模与辐角.**

∵　$|z_0|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\arg z_0=\pi+\mathrm{arc}\tan(\dfrac{\sqrt{3}}{-1})=\dfrac{2}{3}\pi$

∴　$z_0=2(\cos\dfrac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{2}{3}\pi)$　　**（三角式表示）**

$z_0=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}$　　**（指数式表示）**

注　本题的关键在于求出所给复数的模与辐角，并且注意点位于第二象限. 故

$\arg z_0=\pi+\mathrm{arc}\tan\dfrac{y_0}{x_0}$.

1-2　给出复数 $z_0=\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}$ 的代数式. 三角式及指数式表示.

解　**化简原式，得到 z_0 的代数式表示**

$z_0=\dfrac{2\mathrm{i}}{-1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\,\mathrm{i}(-1-\mathrm{i})}{(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$　　**（代数式表示）**

∵　$|z_0|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，　$\arg z_0=\mathrm{arc}\tan(\dfrac{-1}{1})=-\dfrac{\pi}{4}$

∴　$z_0=\sqrt{2}\left[\cos(-\dfrac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{4})\right]$　　**（三角式表示）**

$$z_0 = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{（指数式表示）}$$

注　本题的关键在于简化原表达式，同时注意点位于第四象限. 故　$\arg z_0 = \arctan \dfrac{y_0}{x_0}$.

1-3　设 $z_0 \neq 0$，用 z_0 表示下列点：

1）z_0 关于原点的对称点.

2）z_0 关于实轴的对称点.

3）z_0 关于虚轴的对称点.

解　注意到复数 $z = x + \mathrm{i}\,y$ 与平面点 (x, y) 的一一对应关系及平面点的对称点知识，设 $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\,y_0$. 由 (x_0, y_0) 关于原点的对称点为 $(-x_0, -y_0)$，关于实轴的对称点为 $(x_0, -y_0)$，关于虚轴的对称点为 $(-x_0, y_0)$，得：

1）z_0 关于原点的对称点为 $-x_0 + \mathrm{i}(-y_0) = -z_0$；

2）关于实轴的对称点为 $x_0 + \mathrm{i}\,(-y_0) = \bar{z}_0$；

3）关于虚轴的对称点为 $-x_0 + \mathrm{i}\,y_0 = -(x_0 - \mathrm{i}\,y_0) = -\bar{z}_0$.

注　1. 本题应用复数与平面点的一一对应关系，将问题转化为初等数学已知知识；

　　2. 当 $z_0 = 0$ 时，上述各对应点为 z_0 本身.

1-4　设 $|b| < 1$，$|a| = 1$，证明 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$.

证　**证法一**　$\because$　$\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = \dfrac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}$，故只要证明 $|a-b| = |1-\bar{a}b|$ 即可.

$\because$　$|a-b|^2 = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) = |a|^2 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$

由 $|a| = 1$，得 $|a|^2 = 1$

$\therefore$　$|a-b|^2 = 1 + |b|^2 - \bar{a}b - \bar{b}a$

又 $|1-\bar{a}b|^2 = (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b}) = 1 + |a|^2|b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b} = 1 + |b|^2 - \bar{a}b - a\bar{b}$

$\therefore$　$|a-b|^2 = |1-\bar{a}b|^2$. 由模的非负性知 $|a-b| = |1-\bar{a}b|$. 且

$\because$　$|a| = 1, |b| < 1$. 知 $a \neq b$. 从而 $|1-\bar{a}b| \neq 0$.

$\therefore$　$\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$

证法二　$\because$　$|a| = 1$　$\therefore$　$\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = \dfrac{|a-b|}{|a|\,|1-\bar{a}b|} = \dfrac{|a-b|}{|a-a\,\bar{a}b|} = \dfrac{|a-b|}{|a-b|} = 1$

$\because$　$|a| = 1, |b| < 1$　$\therefore$　$a \neq b$. 即　$|a-b| \neq 0$.

故上述分式有意义.

证法三　$\because$　$|a| = 1$. $\therefore$　$a\bar{a} = 1$. 且 $|\bar{a}| = 1$. 则有

$$\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|a\,\bar{a} - \bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|\,\bar{a}\,| \cdot |a-b|} = \frac{|a-b|}{|a-b|} = 1$$

（同证法二，$|a-b| \neq 0$）.

注　1. 证法一中用复数与其共轭之积表示模的方法是一基本的方法；

2. 证法二采用模之积等于积之模性质；

3. 证法三将原式中的 1 用 $a\bar{a}$ 代换，再用积之模等于模之积性质；

4. 虽证法一略繁于其它二方法，但具有一般性.

1-5 设 $|a|<1, |b|<1$，证明：$\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1$.

证 证法一 只要证 $|a-b|<|1-\bar{a}b|$ 即可.

$\because$ $|a-b|^2=(a-b)(\bar{a}-\bar{b})=|a|^2+|b|^2-\bar{a}b-\bar{b}a$

$|1-\bar{a}b|^2=(1-\bar{a}b)(1-a\bar{b})=1+|a|^2|b|^2-\bar{a}b-\bar{b}a$

由 $|a|<1, |b|<1$，得 $(1-|b|^2)|a|^2<1-|b|^2$

即
$$|a|^2+|b|^2<1+|a|^2|b|^2$$

$\therefore$ $|a-b|^2<|1-\bar{a}b|^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|a-b|^2}{|1-\bar{a}b|^2}<1$

即
$$\frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}=\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|<1$$

证法二 只要证 $|1-\bar{a}b|^2-|a-b|^2>0$ 即可.

$\because$ $|1-\bar{a}b|^2-|a-b|^2=(1+|a|^2|b|^2-\bar{a}b-a\bar{b})-(|a|^2+|b|^2-\bar{a}b-a\bar{b})$

$=1+|a|^2|b|^2-|a|^2-|b|^2=(1-|a|^2)(1-|b|^2)$

由 $|a|<1, |b|<1$. 得 $|a|^2<1, |b|^2<1$

$\therefore$ $|1-\bar{a}b|^2-|a-b|^2>0$

注 1. 这两种证法采用了 1-4 题证法一的一般方法；

2. 由上述证明立即可推出，当 $|a|<1, |b|>1$（或 $|a|>1, |b|<1$）时，有 $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|>1$.

1-6 设 z_1, z_2, z_3 满足 $z_1+z_2+z_3=0$. 且 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$.

证明：z_1, z_2, z_3 为内接于单位圆的正三角形三顶点.

证 由条件，z_1, z_2, z_3 均位于以 0 为心，1 为半径的单位圆周上. 不失一般性，可设 $z_1=1$，$z_2=\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2, z_3=\cos\theta_3+\mathrm{i}\sin\theta_3$. 则为证结论，只要证 $\theta_2=\dfrac{2}{3}\pi, \theta_3=-\dfrac{2}{3}\pi$ 即可.

由 $z_1+z_2+z_3=0$ 得

$$1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0 \qquad ①$$

$$\sin\theta_2+\sin\theta_3=0 \qquad ②$$

故得 $\sin\theta_2=-\sin\theta_3=\sin(-\theta_3)$ $\quad\therefore\quad \theta_3=-\theta_2$ 代入①得

$$1+\cos\theta_2+\cos(-\theta_2)=1+2\cos\theta_2=0$$

$$\therefore\quad \cos\theta_2=-\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \theta_2=\frac{2}{3}\pi,\quad \theta_3=-\frac{2}{3}\pi$$

注 本题的关键在于对问题的恰当转化，否则较为麻烦. 这里的假定不失一般性，即一般情况下，作旋转变换 $z'=z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_1}$（$\theta_1$ 为 z_1 的辐角）可变为 $z_1=1$ 的情形.

1-7 设复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$. 证明

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|$$

证 令：$\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\alpha$.（可设 $\alpha\neq 0$，否则有 $z_1=z_2=z_3$. 结论自然成立.）只要证 $|\alpha|=1$ 即可.

对原式取模有

$$|z_1-z_3|^2=|z_2-z_1||z_2-z_3| \tag{1}$$

在原式两端同时减 1 并取模得

$$\frac{|z_2-z_3|}{|z_3-z_1|}=\frac{|z_1-z_2|}{|z_2-z_3|}$$

故有

$$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_2||z_3-z_1| \tag{2}$$

(1) ÷ (2) 得

$$\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|^2=\left|\frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}\right|$$

对比原式即得 $|\alpha|^2=\dfrac{1}{|\alpha|}$ ∴ $|\alpha|^3=1$，于是 $|\alpha|=1$. 由此得证.

注 此题结论说明若三复数满足所给比例等式，则该三点为等边三角形顶点.

1-8 设 $z=x+\mathrm{i}\,y$，证明：$\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$.

证 由 $|z|=|x+\mathrm{i}\,y|\leqslant|x|+|\mathrm{i}\,y|=|x|+|y|$. 第二个不等式成立. 现证第一个不等式，即要证 $\sqrt{2}\,|z|\geqslant|x|+|y|$.

∵ $|z|^2=x^2+y^2=|x|^2+|y|^2\geqslant 2|x||y|$

∴ $2|z|^2\geqslant|x|^2+|y|^2+2|x||y|=(|x|+|y|)^2$

于是得

$$\sqrt{2}\,|z|\geqslant|x|+|y|$$

注 1. 证明中用到三角不等式.

2. 第一个不等式的等号当且仅当 $x=y$ 时成立. 即 $z=x(1+\mathrm{i})$ $(x\in\mathbf{R})$ 时等号成立；

第二个不等式的等号当且仅当 $xy=0$ 时成立. 即 z 为一实数或纯虚数时成立；

3. 此不等式提供了一个对一般复数模的估计式.

1-9 由等式 $\dfrac{x+1+\mathrm{i}(y-3)}{5+3\,\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$ 确定实数 x,y 之值.

解 解法一 化简等式左端为代数式表示

$$\frac{[(x+1)+\mathrm{i}(y-3)][5-3\mathrm{i}]}{5^2+3^2}=\frac{5x+3y-4}{34}+\mathrm{i}\,\frac{5y-3x-18}{34}$$

则由复数相等的概念可得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{5x+3y-4}{34}=1\\ \dfrac{5y-3x-18}{34}=1\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}5x+3y=38\\ -3x+5y=52\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases}x=1\\ y=11\end{cases}$$

解法二　所给等式左端为两复数之商,由复数的四则运算可得等式

$$(x+1)+\mathrm{i}(y-3)=(1+\mathrm{i})(5+3\,\mathrm{i})=2+8\,\mathrm{i}$$

可得方程组

$$\begin{cases}x+1=2\\ y-3=8\end{cases}\qquad \text{即得}\qquad \begin{cases}x=1\\ y=11\end{cases}$$

注　解法二显然比解法一简便,这种方法既考虑到复数相等的概念,同时也利用了商为积的逆运算这一性质,而解法一仅用了复数相等的概念.

1-10　将下列坐标变换写成复数形式

1) 平移变换 $\begin{cases}x=x_1+a_1\\ y=y_1+b_1\end{cases}$　　2) 旋转变换 $\begin{cases}x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta\\ y=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta\end{cases}$

解　令 $z=x+\mathrm{i}\,y$,　$z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1$,　$\alpha_1=a_1+\mathrm{i}\,b_1$,利用复数 $z=x+\mathrm{i}\,y$ 与平面点 (x,y) 之间的一一对应关系可得

1) 平移变换的复数形式为

$$z=z_1+\alpha_1$$

2) 旋转变换的复数形式为

$$\begin{aligned}z&=(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)+\mathrm{i}\,(x_1\sin\theta+y_1\cos\theta)\\ &=(x_1+\mathrm{i}\,y_1)\cos\theta+(x_1+\mathrm{i}\,y_1)\mathrm{i}\sin\theta\\ &=(x_1+\mathrm{i}\,y_1)(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=z_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\end{aligned}$$

注　1. 由此题可见,平面上的平移变换与旋转变换公式在复数形式下是极简单的;

2. 由此结果可知,两复数和 $z_1+\alpha$ 的几何意义是对 z_1 施行平移变换(沿点 α 决定的矢量方向平移 $|\alpha|$ 距离). 而一复数与任一个模为 1 的复数相乘,即等于对该复数对应的矢量施行旋转变换(旋转角度即为模为 1 复数的辐角 θ).

1-11　证明恒等式

1) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

2) $|z_1|+|z_2|=\left|\dfrac{z_1+z_2}{2}-\sqrt{z_1z_2}\right|+\left|\dfrac{z_1+z_2}{2}+\sqrt{z_1z_2}\right|$

证　1)　**证法一**　设 $z_1=x_1+\mathrm{i}\,y_1$,　　$z_2=x_2+\mathrm{i}\,y_2$

则

$$|z_1|^2=x_1^2+y_1^2,\qquad |z_2|^2=x_2^2+y_2^2$$

$$|z_1+z_2|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2$$
$$|z_1-z_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$
$$\therefore\quad |z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

证法二

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2+\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_1$$
$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=|z_1|^2+|z_2|^2-\bar{z}_1z_2-\bar{z}_2z_1$$

二式相加得 $$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

2）**即要证** $|z_1+z_2-2\sqrt{z_1z_2}|+|z_1+z_2+2\sqrt{z_1z_2}|=2(|z_1|+|z_2|)$

令 $\sqrt{z_1}=w_1,\ \sqrt{z_2}=w_2$

则 $$|w_1|^2=|z_1|,\qquad |w_2|^2=|z_2|$$

于是 $$|z_1+z_2-2\sqrt{z_1z_2}|=|w_1^2+w_2^2-2w_1w_2|=|(w_1-w_2)^2|=|w_1-w_2|^2$$
$$|z_1+z_2+2\sqrt{z_1z_2}|=|w_1^2+w_2^2+2w_1w_2|=|(w_1+w_2)^2|=|w_1+w_2|^2$$

故由 1)**即得**

$$|z_1+z_2+2\sqrt{z_1z_2}|+|z_1+z_2-2\sqrt{z_1z_2}|=2(|z_1|+|z_2|)$$

注 1. **恒等式** 1)**有明显的几何意义：它表明平行四边形两对角线平方和等于各边平方和.**

2. 2)**为** 1)**的直接推论.** 1)**的证法二较证法一简单些. 证法一由模的定义出发. 证法二用了共轭复数性质.**

1-12　已知某正三角形之两顶点 $z_1=1,\ z_2=2+\mathrm{i}$，**求另一顶点.**

解　解法一　如图 1.1 **所示. 为得到另一顶点** z_3，**只要将连接** z_1 **与** z_2 **的线段绕** z_1 **点旋转** $\frac{1}{3}\pi$（**或** $-\frac{1}{3}\pi$）**即可. 注意连接** z_1 **与** z_2 **的向量为** z_2-z_1，**故有**

$$z_3-z_1=(z_2-z_1)e^{\pm i\frac{1}{3}\pi}$$
$$\therefore\quad z_3=z_1+(z_2-z_1)e^{\pm i\frac{1}{3}\pi}$$

将 $z_1=1, z_2=2+\mathrm{i}$ **代入，得**

$$z_3=\frac{3\mp\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

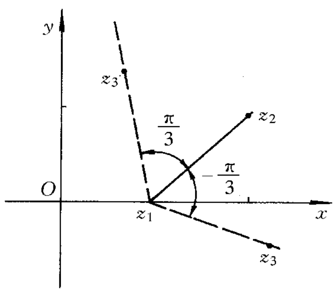

图 1.1

解法二　利用 1-7 **题的结果，如果** z_3 **满足关系**

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

则 z_3 **即为所求. 将** z_1, z_2 **值及** $z_3=x+\mathrm{i}\,y$ **代入，得**

$$\frac{1+\mathrm{i}}{(x-1)+\mathrm{i}\,y}=\frac{(1-x)-\mathrm{i}\,y}{(2-x)+\mathrm{i}(1-y)}$$

注意由 1-7 题知
$$\left|\frac{1+\mathrm{i}}{(x-1)+\mathrm{i}\,y}\right|=\left|\frac{(1-x)-\mathrm{i}\,y}{(2-x)+\mathrm{i}(1-y)}\right|=1$$
$$\therefore\quad \begin{cases}(x-1)^2+y^2=2\\(1-x)^2+y^2=(2-x)^2+(1-y)^2\end{cases}$$
解之得
$$x=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2},y=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$$
故
$$z_3=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1-\sqrt{3}}{2}\quad 和\quad z_3=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$
均满足要求.

注　解法一利用复数的几何性质,为一基本方法.解法二利用 1-7 题的结论.
本题运用了给复数乘模为 1 的复数即等于将此复数对应的矢量旋转一角度的几何性质.

1-13　计算 $\sqrt{1+\mathrm{i}}$.

解　解法一　令 $\sqrt{1+\mathrm{i}}=x+\mathrm{i}\,y$,则 $(x+\mathrm{i}\,y)^2=1+\mathrm{i}$.由此得
$$\begin{cases}x^2-y^2=1 & (1)\\2xy=1 & (2)\end{cases}$$
$\therefore\quad (x^2+y^2)^2=2\qquad \because\quad x^2+y^2\geqslant 0$

故得 $x^2+y^2=\sqrt{2}$.与(1)联立,并注意 $xy=\dfrac{1}{2}>0$(即实、虚部同号)得
$$x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\qquad y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$
$$\therefore\quad \sqrt{1+\mathrm{i}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$
解法二　由复数开方运算规则,有
$$\sqrt{1+\mathrm{i}}=|1+\mathrm{i}|^{1/2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right]\qquad (k=0,1)$$
当 $k=0$ 时得
$$\begin{aligned}\sqrt{1+\mathrm{i}}&=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)\\&=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}+\mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\end{aligned}$$
当 $k=1$ 时得
$$\begin{aligned}\sqrt{1+\mathrm{i}}&=\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)\right]\\&=\sqrt[4]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{8}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$

注　解法一根据复数相等的概念,归结为解实数方程组,而解法二根据复数开方的公式,为求得最后结果,利用了初等数学的半角公式.

1-14　设 $z \neq 0$ 为任一复数,证明:z 的一切 n 次根都可以从它的某一个值乘以 1 的一切 n 次根得到. 并由此推得 z 的一切 n 次根之和必为 0.

证　设 $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ **,则**

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n} = \varepsilon^k \qquad k = 0,1,\cdots,(n-1)$$

设 $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ **,则**

$$\sqrt[n]{z} = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = z_k,\quad k = 0,1,\cdots,(n-1)$$

注意
$$z_0 = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

由复数乘法规则得

$$\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n} = \left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$\therefore\quad z_k = \rho^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right) = z_0\varepsilon^k,\quad k = 0,1,2,\cdots,(n-1)$$

即 z 的一切 n 次根均可通过一个 n 次根 z_0 依次乘以 1 的各 n 次根 ε^k 来得到.

为证 z 的各 n 次根之和为 0. 即 $z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 0$,**只要证** $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k = 0$.

$$\because\quad \varepsilon^0 = 1,\qquad \therefore\quad \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k = 1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{n-1} = \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon}$$

$$\because\quad \varepsilon^n = \cos\frac{2n\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2n\pi}{n} = 1,\qquad \therefore\quad 1 - \varepsilon^n = 0$$

于是 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k = 0$.

$$\therefore\quad z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = z_0 + z_0\varepsilon + \cdots + z_0\varepsilon^{n-1} = z_0\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k = 0$$

注　由此题结论可知,任一复数的全体 n 次方根可通过其某一个 n 次方根用 1 的 n 次方根表出.

1-15　如果复数 $a + \mathrm{i}\,b$ 是实系数方程 $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$ 的根,则 $a - \mathrm{i}\,b$ 一定也是该方程的根.

证　因为 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ **均为实数,故** $\bar{a}_0 = a_0, \bar{a}_1 = a_1 \cdots, \bar{a}_n = a_n$. **且** $\overline{(z^k)} = (\bar{z})^k$,**故由共轭复数性质有**:$\overline{P(z)} = P(\bar{z})$. **则由已知** $P(a + \mathrm{i}\,b) \equiv 0$. **两端取共轭得**

$$\overline{P(a+\mathrm{i}\,b)} = P(\overline{a+\mathrm{i}\,b}) \equiv \bar{0} = 0$$

即 $P(a-\mathrm{i}\,b)\equiv 0$. 故 $a-\mathrm{i}\,b$ 也是 $P(z)=0$ 之根.

注 此题仅通过共轭的运算的简单性质及实数的共轭为其本身即得证. 此结论说明实系数多项式的复零点是成对出现的. 这一点在代数学中早已被大家认识. 特别地,奇次实系数多项式至少有一个实零点.

1.2 复平面的点集与点列、复数项级数

1.2.1 基本要求

1. 掌握复平面点集的邻域、内点、开集、连通集、区域、单连域、多连域的概念.
2. 掌握复数列(点列)收敛的概念及收敛的充要条件.
3. 掌握复数项级数收敛的概念及收敛的充要条件.

1.2.2 内容提要

1. **点集的有关概念** 点集 $|z-z_0|<\delta$ 与 $0<|z-z_0|<\delta$ 分别称为 z_0 的 δ- 邻域和去心 δ- 邻域($\delta>0$),分别记为 $U_\delta(z_0)$ 和 $U_\delta(z_0)/\{z_0\}$. 设有点集 E,$z_0\in E$. 如果 $\exists\ \delta>0$,使得 $U_\delta(z_0)\subset E$. 则称 z_0 为点集 E 的内点,若点集 E 的每个点都为其内点,则称 E 为开集;若集合 E 中任意两点均可用完全属于 D 的折线段相连接,则 E 称为连通集;连通开集称为区域;对区域 D,若存在 $R>0$,使得 $D\subset U_R(0)$. 则称 D 为有界域,否则称为无界域. 设有点 p,如果 $\forall\ \delta>0$,总有 $U_\delta(p)\cap D\neq\varnothing$. 且 $U_\delta(p)\not\subset D$. 则称 p 为 D 的边界点. D 的边界点的全体称为 D 的边界,D 与其边界之并集称为闭区域,记为 $\overline{D}$;一个区域 D,如果位于其内的任一条简单闭曲线之内部全部属于 D. 则 D 称为单连通域,否则称为多连域(或复连通区域).

2. **定义** 复数列 $a_k+\mathrm{i}\,b_k=\alpha_k$ 收敛于复数 $A=a+\mathrm{i}\,b$,如果对 $\forall\ \varepsilon>0$,$\exists$ 自然数 K,使得只要 $k>K$,就有 $|(a_k+\mathrm{i}\,b_k)-(a+\mathrm{i}\,b)|<\varepsilon$. 记之为 $\alpha_k\xrightarrow[k\to\infty]{}A$ 或者 $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k=A$.

定理一 $a_k+\mathrm{i}\,b_k\to a+\mathrm{i}\,b\Leftrightarrow\begin{cases}a_k\to a\\ b_k\to b\end{cases}.$

3. 复数列 $\alpha_k=a_k+\mathrm{i}\,b_k$ 作成的和式 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+\mathrm{i}\,b_k)$ 称为复数项级数.

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k+\mathrm{i}\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$ 称为复数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 的前 n 项部分和.

定义 若 $S_n\xrightarrow[n\to\infty]{}S=R+\mathrm{i}\,I$. 则称复数项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$ 收敛于和数 S. 记为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k=S$.

定理二 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k+\mathrm{i}\,b_k)$ 收敛 $\Leftrightarrow\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 均收敛.

1.2.3 例题解析

1-16 指出下列关系表示的点之轨迹或范围;作出图并说明为何种点集.

1) $|z|+\mathrm{Re}\,(z)<1$

2) $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|>1$

3) $|z-1|\geqslant 2|z-\mathrm{i}|$

4) $\arg\,(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$

5) $|z-2|+|z+2|=5$

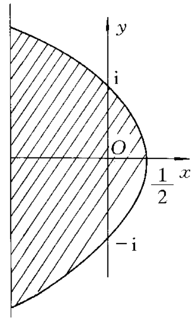

图 1.2

解 1) **设** $z=x+\mathrm{i}\,y$ **,由条件得:**$\sqrt{x^2+y^2}+x<1$

即 $x<-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}$. **故关系式** $|z|+\mathrm{Re}\,(z)<1$ **表示抛物线** $x=-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ **的左侧区域,为一无界单连通区域,如图** 1.2**阴影所示.**

2) **解法一** **设** $z=x+\mathrm{i}\,y$**,则由**$\dfrac{|z-3|}{|z-2|}>1$ **得**

$$(x-3)^2+y^2>(x-2)^2+y^2$$

故得 $|x-3|>|x-2|$. **由距离的表示式知,此式表示到** 3 **之距离大于到** 2 **之距离的点的全体. 故关系式** $\left|\dfrac{z-3}{z-2}\right|>1$ **表示直线** $x=\dfrac{5}{2}$ **左部平面区域,为一无界单连通区域,如图** 1.3 **阴影所示.**

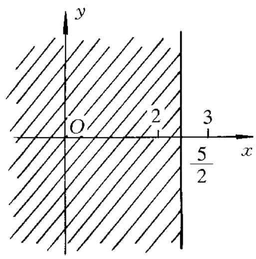

图 1.3

解法二 **由原式得**

$$|z-3|>|z-2|$$

据模的几何意义即可知,满足此式的 z **为到点** 3 **之距离大于到** 2 **之距离的点之全体. 直线** $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{5}{2}$ **为到该两点距离相等之点的轨迹.**

故满足条件的 z **即为满足条件** $\mathrm{Re}(z)<\dfrac{5}{2}$ **的无界单连通域.**

3) **设** $z=x+\mathrm{i}\,y$ **,则原式即为**

$$(x-1)^2+y^2\geqslant 4[x^2+(y-1)^2]$$

即

$$\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{4}{3}\right)^2\leqslant\frac{8}{9}$$

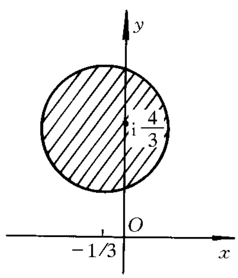

图 1.4

它表示一个以 $-\dfrac{1}{3}+\mathrm{i}\,\dfrac{4}{3}$ **为心、**$\dfrac{\sqrt{8}}{3}$ **为半径的闭圆盘. 即满足条件** $|z-1|\geqslant 2|z-\mathrm{i}|$ **的** z **的全体是闭圆盘**

$$\left|z+\left(\frac{1}{3}-\mathrm{i}\,\frac{4}{3}\right)\right|\leqslant\frac{\sqrt{8}}{3}$$

如图 1.4 **所示,这是一有界闭区域,且为单连域.**

4) **令** $z=x+\mathrm{i}\,y$**,由** $\arg\,(z-\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{4}$ **知**