

内 容 简 介

本书系统地讲述了数学物理方法的基础理论及其在物理学、工程技术科学中的应用。全书共八章,包括三部分内容:第一部分为数学物理方程的建立与常规解法,包括定解问题、行波法、分离变量法、积分变换法、格林函数法和其他常用的数学物理方法(如变分法、积分方程解法等);第二部分为特殊函数,重点讨论球函数(勒让德多项式)和柱函数(贝塞尔函数)的基本性质及其在数学物理方程中的应用;第三部分主要结合物理、电子信息工程、通信和材料科学类专业的特点,针对数学物理方程和特殊函数在电磁场等问题中的应用提出算例,利用计算编程,求解问题并给出解的可视化图形,以提高读者编程、理解和解决实际问题的能力。

本书可作为物理、电子信息工程、通信、材料科学等专业的理工科大学本科教材,亦可作为相关专业研究生、科技工作者的参考用书。

★本书配有电子教案,有需要者可从我社网站免费下载。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/张民,罗伟,吴振森编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2008.2

普通高等学校教材

ISBN 978-7-5606-1983-5

I. 数… II. ①张… ②罗… ③吴… III. 数学物理方法—高等学校—教材
IV. 0411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 003323 号

策 划 云立实

责任编辑 任 婧 云立实

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

http://www.xduph.com E-mail: xdupfxb@pub.xaonline.com

经 销 新华书店

印刷单位 陕西天意印务有限责任公司

版 次 2008年3月第1版 2008年3月第1次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 17.625

字 数 415千字

印 数 1~4000册

定 价 25.00元

ISBN 978-7-5606-1983-5/O·0091

XDUP 2275001-1

*** 如有印装问题可调换***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

第 1 章 数学物理方程的定解问题

数学物理方程是指从物理学和实际工程问题中导出的描述物理规律的数学表述。一般特指偏微分方程为数学物理方程(简称数理方程),但是有时也包括与此相关的积分方程和常微分方程。本章主要讨论偏微分方程的基本概念,三类典型数理方程的建立,定解条件的确定和定解问题的描述等。

1.1 基本概念

1.1.1 偏微分方程的基本概念

含有未知函数及其导数的方程称为微分方程。自然科学和工程技术的许多规律、过程和状态都可以用微分方程来描述。当这个方程中的未知函数含有两个以上自变量时,称此方程为偏微分方程,并记为

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{m_1} \partial x_2^{m_2} \dots \partial x_n^{m_n}}\right) = 0 \quad (1.1)$$

其中, x_1, x_2, \dots, x_n 为自变量; u 为未知函数; $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 。

在此,需引入以下几个定义。

1. 方程的阶数

方程的阶数即微分方程中出现的未知函数的偏导数的最高次数,如式(1.1)就是一个 m 阶偏微分方程。

2. 线性和非线性方程

如果一个偏微分方程中的未知函数及其各阶导数都是线性的,即含有未知函数及其导数的表达式是一次式,系数只依赖于自变量,则称方程为线性的,否则称为非线性偏微分方程。例如,一个含有变量 x, y 的未知函数 $u = u(x, y)$ 满足的方程

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C(x, y)u = f(x, y) \quad (1.2)$$

就是一个二阶线性偏微分方程。

3. 齐次和非齐次方程

方程中不含未知函数及其导数的项称为自由项,当自由项为零时,称方程为齐次方程,否则称为非齐次方程。式(1.2)中的 $f(x, y)$ 就是自由项,当 $f(x, y) = 0$ 时,方程为二阶线性齐次方程,否则为非齐次方程。

1.1.2 三类常见的数学物理方程

数学物理方程是从物理问题中导出的反映物理过程的数学表达式，它所包括的范围十分广泛，本书主要讨论二阶线性偏微分方程。按照我们常见的典型物理过程，可以把数学物理方程分为三类：波动方程、输运方程和稳定场方程。它们分别描述以下三类典型的物理现象：

(1) 描述波动过程的波动方程(机械波和电磁波)：

$$u_{t..t} = a^2 \Delta u + f \quad (1.3)$$

其中， $u = u(x, y, z; t)$ ，代表坐标为 (x, y, z) 的点在 t 时刻的位移(未知函数)； a 是波传播的速度； $f = f(x, y, z; t)$ ，是与振源有关的函数； $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ，是拉普拉斯(Laplace)算符；记 $u_{t..t} = \partial^2 u / \partial t^2$ 。

(2) 描述输运过程的输运方程(热传导和扩散)：

$$u_t = D \Delta u + f \quad (1.4)$$

其中， $u = u(x, y, z; t)$ ，表示扩散物质的浓度(或物体的温度)； D 是扩散(或热传导)系数； $f = f(x, y, z; t)$ ，是与扩散源有关的函数；记 $u_t = \partial u / \partial t$ 。

(3) 描述平衡状态的稳定场方程(势场分布、平衡温度场分布)：

$$\Delta u = -h \quad (1.5)$$

其中， $u = u(x, y, z)$ ，表示稳定现象的物理量，如静电场中的电势等； $h = h(x, y, z)$ ，表示与源有关的已知函数。

从方程本身来看，以上这三类方程的特点是：关于未知函数的偏导数最高阶数是二阶的，同时，关于未知函数及其导数的表达式均是线性表示，所以都是二阶线性偏微分方程。还可以看出，这三类方程都是关于空间的二阶偏导数，而关于时间，它们则分别是一阶偏导数以及与时间无关。因此，这三类方程在数学上又是三类不同的方程，可以依次分别称为双曲型、抛物型和椭圆型方程。

1.1.3 数学物理方程的一般性问题

数学物理方程是以物理学和工程技术中的具体问题作为研究对象的，利用数学物理方程研究物理问题一般需要以下三个步骤。

1. 确定定解问题

在物理学中，经常需要研究某个物理量(如位移、电势分布等)在空间某个区域中的分布情况和其随时间变化的规律。要解决这个问题，首先必须掌握该物理量在空间的分布和随时间变化的规律，即掌握有关的物理规律，把这些规律用数学语言描述出来，就得到了数学物理方程。值得注意的是，数学物理方程描述的是同一类物理现象的共同规律，反映的是物理量变化的最本质的关系，如波动方程(式(1.3))反映了所有的波动现象，如弦的振动、声音的传播、电磁波的传播所满足的共同规律。要解决具体问题必须考虑研究区域所处的物理状态，即定解条件。简单地说，这个过程就是把物理问题的研究对应翻译成数学问题，利用物理规律，确定能够恰当反映物理规律的数学方程和定解条件。

我们把这种由一类物理问题所共有的物理特性所决定的方程称为泛定方程，把由于具

体问题在研究区域所满足的约束边界条件和时间初值条件统称为定解条件。为了得到符合具体问题的解，必须同时提出泛定方程和定解条件，作为一个整体，把上述过程称为定解问题的确定。

2. 定解问题的求解

一旦定解问题确定，需要完成的就是对定解问题的求解。这些数学物理方程的求解（偏微分方程的求解）与我们学过的常微分方程的求解有很大的不同，主要体现在对偏微分方程还没有一个适用于偏微分方程求解的统一理论。也就是说，对于不同的定解问题，一般需要采用不同的方法一类一类地进行讨论。这些方法大致可以归纳为以下几种：

- (1) 行波法；
- (2) 分离变量法；
- (3) 积分变换法；
- (4) 格林函数法；
- (5) 保角变换法。

以上这些解析解法我们将在后面各章中一一阐述。此外，当无法得到解析解时，我们还可以利用数值方法来求解。

3. 解的适定性

用数学物理方程研究实际问题时，仅仅求解出方程是远远不够的，还必须讨论解的适定性，即存在性、唯一性和稳定性。

(1) 存在性是指验证所求解的解是否满足方程，是否符合实际物理问题的意义。

(2) 唯一性是指讨论在什么样的定解条件下，对于不同函数类，方程的解是否唯一。

(3) 当定解条件有微小变化时，解是否也只有微小变化，如果是这样，则说明解具有稳定性。在从事工程设计或者物理规律的研究时，总需要实际测量，而测量难免会有误差。如果定解条件的微小误差会导致解的重大改变，就无法保证在数学上找出的解确实是实际所需解的近似，这样的解就失去实用价值。相反，如果定解问题的解具有稳定性，那么只要是在合理的误差范围内所得到的解就可以看做是实际问题解的良好近似。

只有对定解做适定性分析，才可以得到符合实际问题的物理规律的解，这样的解才是具有实际意义的。

数学物理方程一方面紧密联系物理学中的许多问题，另一方面又广泛地应用相关的数学成果。其主要特色在于数学和物理的紧密结合，将数学方法应用于实际的物理和交叉科学的具体问题的分析中，通过物理过程建立数学模型（偏微分方程），通过求解和分析模型，对具体物理过程进一步深入理解，以解决实际问题的需要。

1.2 数学物理方程的导出

基于数学物理方程的重要作用，本节将以几个具体的物理模型为例来描述如何从物理学的实际问题中导出数学物理方程。这里所谓的“导出”，就是用数学语言把物理规律表达出来，希望读者能学会这种表达的技巧。它主要包括：表述同一类物理现象的共同规律——泛定方程的建立，表述具体问题特殊性的边界条件和初始条件——定解问题的建

立。因此，导出数学物理方程的一般步骤是：

(1) 确定研究对象，即所研究的物理量 u 。

(2) 利用微元法建立方程，即从所研究的物理系统中分离出一个小部分，对应数学中的“微元”，根据物理规律，分析这个微元邻近部分和它的相互作用规律，抓住最本质的关系，略去不重要的因素，把这种相互作用规律在短时间内对物理量 u 的影响用数学表达式表示出来，经化简整理就可以得到相应的数学物理方程。

以下具体讨论三类典型数学物理方程的建立。我们应注意从这些例子中学习如何把物理问题转化成数学问题。

1.2.1 波动方程的导出

1. 弦的横振动方程

如图 1.1 所示，设有一根细长柔软的弦线绷紧于 A 、 B 两点之间，在平衡位置 AB 附近产生振幅极为微小的横振动，求该弦上各点的运动规律。

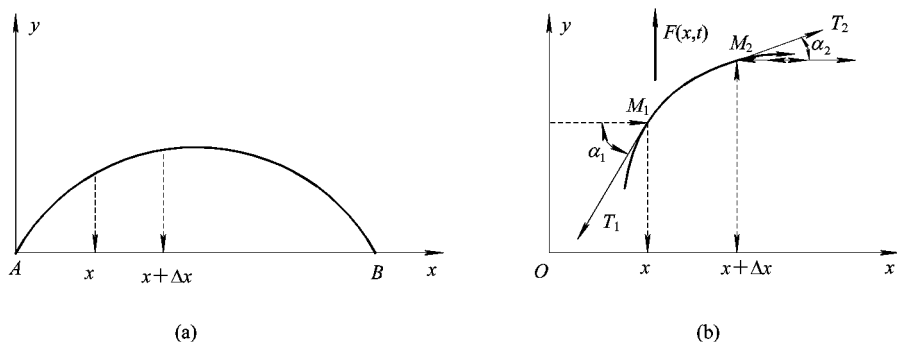


图 1.1 弦的横振动示意

一根拉紧的弦不振动时是一条直线，它处于平衡位置，如图 1.1(a)所示。我们将弦的平衡位置选在 x 轴上，并以 $u(x, t)$ 表示弦上 x 点在时刻 t 沿垂直于 x 方向的位移。首先我们对这个问题的物理名词做数学的表述：

(1) 由于弦是“细长”的，即线密度 $\rho(x, t) = \rho(t)$ ，且任一小段的重量可以忽略不计。

(2) 由于弦“绷紧”于 AB 两点，这说明弦中各相邻部分之间有拉力即“张力”作用；由于弦是“柔软”的，这就意味着弦没有弯抗力，在放松情况下，把它弯成任意形状都可以保持不变，而在绷紧以后，相邻小段张力总是弦线的切线方向。

(3) 由于弦作“微小”的横向振动，故相邻点沿振动方向位移的差别很小，即

$$|u_x| = \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1 (\text{无穷小量}) \quad (u_x^2 \approx 0) \quad (1.6)$$

显然，一根均匀柔软且具有弹性的细弦，绷紧之后相邻各小段之间都存在沿弦切线方向的张力；由于这个张力的作用，一个小段的振动必定带动相邻小段的振动，这种振动形式的传播便形成了波动。

有了以上对问题的数学描述，下面我们来推导方程：

首先，我们需要确定研究对象，即从任意弦中划分出不包括端点 (A, B) 的一小段 Δx 作为研究对象。

注意到在振动过程中这一小段 Δx 变成了弧 $\overline{M_1 M_2}$, 但是

$$\overline{M_1 M_2} = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+(u_x)^2} dx \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x \quad (1.7)$$

即这一小段弦的长度在振动过程中可以看做是不变的。因此, 由胡克(Hooke)定律可知张力和线密度都不随 t 而变, 即

$$T(x, t) = T(x) \quad \text{且} \quad \rho(t) = \rho(\text{常数}) \quad (1.8)$$

从这一小段与邻近部分的相互作用的物理规律出发, 尝试建立表征这种规律的数学方程。

分析 $\overline{M_1 M_2}$ 的受力情况, 如图 1.1(b) 所示。

(1) M_1 点受有张力 T_1 , 它在 x 轴方向的分力为 $-T_1 \cos \alpha_1$, y 轴方向的分力为 $-T_1 \sin \alpha_1$;

(2) M_2 受有张力 T_2 , 它在 x 轴方向的分力为 $T_2 \cos \alpha_2$, y 轴方向的分力为 $T_2 \sin \alpha_2$;

(3) 设 $\overline{M_1 M_2}$ 受有沿 y 轴方向的外力 $F(x + \eta_1 \Delta x, t) \Delta x$ (注意, $\overline{M_1 M_2} = \Delta x$), 其中 $F(x, t)$ 表示单位长度所受的外力, $0 < \eta_1 \leq 1$ 。

由牛顿(Newton)第二定律, 得

$$T_2 \cos \alpha_2 - T_1 \cos \alpha_1 = 0 \quad (1.9)$$

$$T_2 \sin \alpha_2 - T_1 \sin \alpha_1 + F(x + \eta_1 \Delta x, t) \Delta x = (\rho \Delta x) u_{t \dots t}(x + \eta_2 \Delta x, t) \quad (1.10)$$

其中, $\rho \Delta x$ 为小段弦的质量; $u_{t \dots t}(x + \eta_2 \Delta x, t)$ 为 t 时刻在小段弦上 $x + \eta_2 \Delta x$ 处的加速度, 这里 $0 < \eta_2 \leq 1$ 。

由三角公式

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \approx u_x \quad (1.11)$$

可得

$$\begin{cases} \sin \alpha_1 \approx u_x(x, t), \sin \alpha_2 = u_x(x + \Delta x, t) \\ \cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} \approx 1, \cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} \approx 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

因此, 由式(1.9)可得

$$T_1 = T_2 = T \quad (1.13)$$

进而由式(1.10)可得

$$(\rho \Delta x) u_{t \dots t}(x + \eta_2 \Delta x, t) = F(x + \eta_1 \Delta x, t) \Delta x + T[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] \quad (1.14)$$

即

$$u_{t \dots t}(x + \eta_2 \Delta x, t) = \frac{T}{\rho} \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x} + \frac{F(x + \eta_1 \Delta x, t)}{\rho} \quad (1.15)$$

对式(1.15)两边取 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限, 得

$$u_{t \dots t} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad (1.16)$$

其中, $a^2 = T/\rho$, 表示振动在弦上的传播速度; $f(x, t) = F(x, t)/\rho$, 称力密度, 表示 t 时刻作用于 x 处的单位质量上的横向外力。

式(1.16)即为弦的横振动方程。若 $f=0$, 即弦在振动过程中不受外力时,

$$u_{t \dots t} = a^2 u_{xx} \quad (1.17)$$

称之为弦的自由振动方程。

可以看到，弦的微小横振动方程是一维的波动方程，式(1.16)是非齐次波动方程，式(1.17)是齐次波动方程。

2. 均匀薄膜的微小横振动

把柔软的均匀薄膜张紧，静止薄膜所在的平面记为 xy 平面，求薄膜在垂直于 xy 平面上做微小横振动时所满足的运动规律。

这个问题如图 1.2 所示，不妨设膜上各点的横位移为 $u(x, y, t)$ ；首先对薄膜的运动做数学抽象：

(1) 薄膜是“柔软”的，即在膜的横截面内不存在切应力（指与薄膜的切平面相垂直的应力）。这样，对于膜上任一点，膜的表面张力 T （指作用在单位长度上并且与该长度方向相垂直的拉力）必须在过这一点的切平面内，如图 1.2(a) 所示。

(2) 膜是“均匀”的，即面密度 $\rho(x, y, t) = \rho(t)$ 。

(3) 振动是“微小”的，也就是说张力的仰角 $\alpha \approx 0$ ，这样，张力 T 的横向分量为 $T \sin \alpha \approx T \tan \alpha = T \frac{\partial u}{\partial n}$ ， \hat{n} 指的是张力 T 在 xy 平面上的投影的单位矢量。

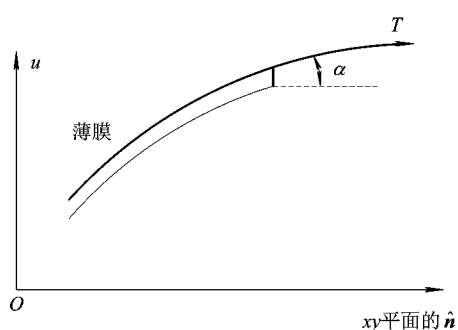
(4) 与弦的横振动中推导式(1.7)~(1.9)类似，可以证明张力 T 与面密度函数 ρ 均与空间位置坐标无关，为常量。

因此，依据以上的描述，做如下具体推导：

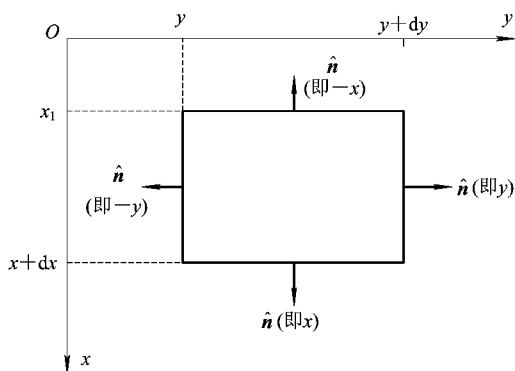
首先，如图 1.2(b) 所示，把膜分成许多小方块，以 $x: x+dx$ 之间， $y: y+dy$ 之间的小块为研究对象。这一小块在 $x: x+dx$ 方向的两边，受到的张力的横向分力分别是

$-T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x$ 和 $T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx}$ ，这样，小块膜在 x 方向所受的横向作用力是：

$$\left[T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right] dy = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy \quad (1.18)$$



(a)



(b)

图 1.2 薄膜微小横振动示意

同理, 在 $y: y+dy$ 两边受到的横向力为 $T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dx dy$ 。根据牛顿第二定律, 这小块膜的横向运动方程为

$$(\rho dx dy)u_{t..t} = Tu_{xx} dx dy + Tu_{yy} dx dy \quad (1.19)$$

即

$$u_{t..t} = a^2 \Delta u \quad (1.20)$$

其中, $a^2 = \frac{T}{\rho}$, 为膜上振动的传播速度; $\Delta = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 在此表示二维拉普拉斯算符。

式(1.20)为二维齐次波动方程。如果膜上有横向外力作用, 设单位面积上的横向外力为 $F(x, y; t)$, 重复上述步骤, 可以得到薄膜的受迫振动方程为

$$u_{t..t} - a^2 \Delta u = f(x, y; t) \quad (1.21)$$

其中, $f(x, y; t) = F(x, y; t)/\rho$, 为作用于单位质量上的横向外力。

3. 传输线方程(电报方程)

对于直流电或者低频交流电, 线与线之间的电容和电感可以忽略不计, 根据电路的基尔霍夫定律有: 同一支路的电流相等。但是, 对于较高频率的交流电(这里指频率还没有高到能显著向外辐射电磁波的情况), 电路中导线的自感和电容的效应不可忽略, 因而同一支路中的电流未必相等。那么我们又该如何确定这种高频传输线中电流和电压所满足的规律呢?

考虑一对高频传输线, 如图 1.3 所示, 可以把它看成是具有分布参数的导体。

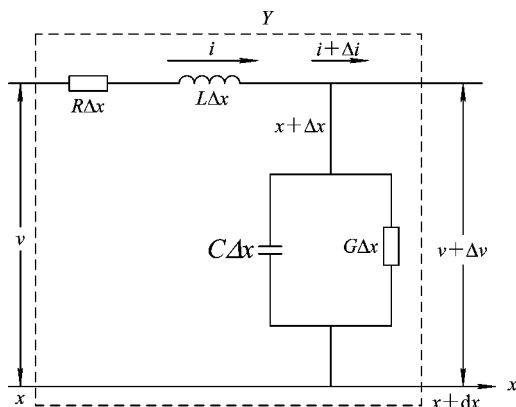


图 1.3 高频传输线的等效电路示意

对所求问题首先做以下数学描述:

(1) 在具有分布参数的导体中, 电流分布的情况可以用电流强度 i 与电压 v 来描述, 此处 i 与 v 是 x, t 的函数, 记做 $i(x, t)$ 与 $v(x, t)$ 。

(2) 分别以单位传输线的参数表示 R, L, C, G 传输线的介质特性。其中, R 表示每一回路单位长度的串联电阻, L 表示每一回路单位长度的串联电感, C 表示每单位长度的分路电容, G 表示每单位长度的分路电导。

(3) 解决传输线上电压和电流分布的基本原理是基尔霍夫(Kirchhoff)电流电压定律。

第一定律: 汇合在节点的电流的代数和为零(规定流入节点的为正, 流出节点的为

负)。即

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0 \quad (1.22)$$

第二定律：沿任一闭合回路的电势增量的代数和为零（规定沿回路顺时针方向的电动势和电流都为正，反之为负）。即

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \quad (1.23)$$

具体求解过程如下：

首先，把传输线分成许多小段，取区间 $(x, x+dx)$ 上的小段加以研究。

根据基尔霍夫第二定律，由式(1.23)得

$$v - (v + dv) = R dx \cdot i + L dx \cdot \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.24)$$

其中， $dv \approx \frac{\partial v}{\partial x} dx$ 。故上式可写成

$$\frac{\partial v}{\partial x} \approx -Ri - L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.25)$$

即

$$v_x \approx -Ri - Li_t \quad (1.26)$$

同时，利用基尔霍夫第一定律，由式(1.22)得

$$i = (i + di) + C dx \frac{\partial v}{\partial t} + G dx v \quad (1.27)$$

同样可以写成

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} - Gv \quad (1.28)$$

即

$$i_x = -Cv_t - Gv \quad (1.29)$$

由式(1.26)和式(1.29)可以得到 i 、 v 应满足如下方程组

$$\begin{cases} i_x + Cv_t + Gv = 0 & (1.30a) \\ v_x + Ri + Li_t = 0 & (1.30b) \end{cases}$$

将 $\partial/\partial x$ 作用于式(1.30a)（即作用于式(1.29)），同时，对式(1.30b)两端乘以 C 后，再对 t 微分（即将 $C \frac{\partial}{\partial t}$ 作用于式(1.26)），并把两个结果相减，即得

$$i_{xx} + Gv_x - LCi_{t..t} - RCi_t = 0 \quad (1.31)$$

同时消去 v ，把式(1.26)代入上式，得

$$i_{xx} = LCi_{t..t} + (RC + GL)i_t + GRi \quad (1.32)$$

这就是电流 i 所满足的偏微分方程。采用类似的方法，从式(1.26)与式(1.29)中消去 i ，可得电压 v 满足的偏微分方程为

$$v_{xx} = LCv_{t..t} + (RC + GL)v_t + GRv \quad (1.33)$$

式(1.32)和式(1.33)称为传输线方程（也叫电报方程）。如果导线电阻 R 和线间的漏电导 G （即分路电导）很小时，这种传输线称为理想传输线。对于理想的均匀传输线， G 和 R 均可忽略，即 $G=R=0$ 。则式(1.32)和式(1.33)可简化为

$$i_{t \dots t} - a^2 i_{xx} = 0 \quad (1.34)$$

$$v_{t \dots t} - a^2 v_{xx} = 0 \quad (1.35)$$

其中, $a^2 = \frac{1}{LC}$ ($\frac{1}{LC} = c^2$, c 为光速)。

显然, 上述理想的传输线方程也是典型的一维波动方程。

4. 电磁场方程

电磁场的麦克斯韦方程组的微分形式是

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B}_t \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \mathbf{D}_t \end{cases} \quad (1.36)$$

其中, $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ 为哈密顿算符; \mathbf{E} 是电场强度; \mathbf{H} 是磁场强度; \mathbf{D} 是电位移矢量; \mathbf{B} 是磁感应强度; \mathbf{J} 是传导电流; ρ 是电荷的体密度; 记 $\mathbf{B}_t = \partial \mathbf{B} / \partial t$, $\mathbf{D}_t = \partial \mathbf{D} / \partial t$ 。这组方程还必须与下述场的物质方程联立:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \\ \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \end{cases} \quad (1.37)$$

其中, ϵ 是介电常数; μ 是磁导率; σ 是电导率。若介质是均匀且各向同性的, 则 ϵ 、 μ 、 σ 均为常数。

方程组(1.36)中的第二式和第四式都同时包含有 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} , 从中消去一个变量, 就可以得到关于另一个变量的微分方程。首先消去 \mathbf{E} , 用 $\nabla \times$ 作用于方程组(1.36)的第四式, 并利用方程组(1.37)的第一式和第三式, 得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E} + \sigma \nabla \times \mathbf{E} \quad (1.38)$$

将方程组(1.36)中的第二式与方程组(1.37)中的第二式代入式(1.38), 得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = -\epsilon \mu \mathbf{H}_t - \sigma \mu \mathbf{H}_t \quad (1.39)$$

由矢量公式得: $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H}$ 。又因为 $\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 所以 \mathbf{H} 所满足的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \epsilon \mu \mathbf{H}_{t \dots t} + \sigma \mu \mathbf{H}_t \quad (1.40)$$

同理, 若消去 \mathbf{H} , 即得 \mathbf{E} 所满足的方程为

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu \mathbf{E}_{t \dots t} + \sigma \mu \mathbf{E}_t \quad (1.41)$$

如果介质不导电(即 $\sigma = 0$), 则上面两个方程可简化为

$$\mathbf{H}_{t \dots t} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{1}{\epsilon \mu} \Delta \mathbf{H} \quad (1.42)$$

$$\mathbf{E}_{t \dots t} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon \mu} \Delta \mathbf{E} \quad (1.43)$$

式(1.42)和式(1.43)称为电磁场所满足的三维波动方程。在直角坐标系下, 这个三维

波动方程以标量函数的形式表示, 即

$$u_{r..r} = a^2 \nabla^2 u = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad (1.44)$$

其中, $a^2 = \frac{1}{\epsilon\mu}$; u 是 E (或者 H) 在直角坐标中的任意一个分量; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 在此表示三维拉普拉斯算符。

通过前面的例子可以看到, 对于不同物理过程中的物理规律可以用同一个数学物理方程来表示。也就是说, 同一个方程可以用来描述不同的物理现象。正因为如此, 就有可能用一种物理现象去模拟另一种物理现象。

1.2.2 输运方程的导出

1. 热传导方程

在导热介质中, 由于温度不均匀, 致使热量从温度高的地方向温度低的地方转移的现象称为热传导。

在热传导问题中, 主要研究的是温度在空间的分布和随时间的变化情况, 即温度的分布和变化规律所满足的微分方程。以下讨论一维的热传导问题。

设有一根横截面积为 A 的均匀细杆, 沿杆长方向有温度差, 其侧面绝热, 求杆中温度的分布变化规律。

待求解的问题如图 1.4 所示, 不妨取 x 轴与杆重合, 根据问题的物理叙述, 利用热传导的相关定律, 可以做以下的数学表述。

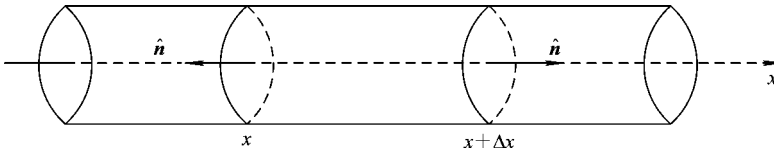


图 1.4 细杆中热传导示意

(1) 因为热量只会沿着杆长方向传导, 所以, 这是一个一维问题。以 $u(x, t)$ 表示杆上 x 点处在 t 时刻的温度。

(2) 由傅里叶(Fourier)实验定律, 热传导的强弱是由热流强度 q 描述的, 它是单位时间内垂直通过单位面积的热量。定义式为

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial n} \hat{n} \quad (1.45)$$

其中, k 为热导率, 一般与介质材料有关, 当温度变化范围不大时, 可以视为与温度无关; \hat{n} 为曲面的外法向方向; 公式中负号表示由温度高处流向温度低处。

(3) 解决热力学问题的基本规律是能量守恒定律和傅里叶(Fourier)实验定律。

以下是问题的具体求解过程。

首先, 仿照上面求导弦振动方程的过程, 如图 1.4 所示, 从杆的内部划出一小段 Δx , 考察这一小段在时间间隔 Δt 内热量流动的情况。

设 c 为杆的比热容(单位物质升高单位温度所需的热量, 它与物质的材料有关), ρ 为杆的密度, 则在 Δt 时间内引起 Δx 的温度升高时所需的热量为

$$Q = c(\rho A \Delta x)[u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] \quad (1.46)$$

取 $\Delta t \rightarrow 0$ 时的极限, 得

$$Q \approx c\rho Au_t \Delta x \Delta t \quad (1.47)$$

根据傅里叶实验定律, 由热流强度的定义(式(1.45))可以得到:

① 在 Δt 时间内沿 x 轴正向流入 x 处截面的热量为

$$Q_1(x) = -ku_x(x, t)A\Delta t \quad (1.48)$$

② 在 Δt 时间内由 $x + \Delta x$ 处截面流出的热量为

$$Q_2(x + \Delta x) = -ku_x(x + \Delta x, t)A\Delta t \quad (1.49)$$

另外, 如果考虑杆内有热源, 设其热源密度为 $F(x, t)$ (单位时间单位体积所释放出的热量), 则在 Δt 内, 杆内热源在 Δx 段产生的热量为

$$Q_3 = F(x, t)(A\Delta x)\Delta t \quad (1.50)$$

至此, 根据能量守恒定律, 流入和流出 Δx 段的总热量与 Δx 段中热源产生的热量恰好应该等于 Δx 段温度升高时所吸收的热量, 即

$$Q = Q_1 - Q_2 + Q_3 \quad (1.51)$$

代入式(1.47)~(1.50), 可得

$$c\rho Au_t \Delta x \Delta t = -ku_x(x, t)A\Delta t + ku_x(x + \Delta x, t)A\Delta t + FA\Delta x \Delta t \quad (1.52)$$

即

$$c\rho u_t = \frac{k[u_x(x, x + \Delta x) - u_x(x, t)]}{\Delta x} + F \quad (1.53)$$

令 $\Delta x \rightarrow 0$, 两边取极限, 可得

$$u_t = \frac{k}{c\rho} u_{xx} + \frac{F}{c\rho} \quad (1.54)$$

即

$$u_t = Du_{xx} + f(x, t) \quad (1.55)$$

其中

$$D = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}$$

式(1.55)即一维的热传导方程, 用类似的方法可推出三维的热传导方程。

下面我们来推导任意一个三维物体各点的温度分布和变化所满足的热传导方程。

针对此类问题, 我们所讨论的对象当然是物体各处的温度 u 。因此, 把物体分成许多小区域, 只考虑任意一个小区域内的温度。为此, 在物体中任取一封闭曲面 S , 如图 1.5 所示, 它所包围的区域记为 V 。

设在时刻 t 、区域 V 内 $M(x, y, z)$ 点处的温度为 $u(x, y, z; t)$, \hat{n} 为曲面元素 ΔS 的法向单位矢量(由 V 内指向 V 外)。

由热传导的傅里叶定律知, 在 $[t, t + \Delta t]$ 时间内, 从 ΔS 流入区域 V 的热量与时间 Δt 、面积 ΔS 以及热流强度 q 均成正比, 即热传导定律

$$\Delta Q = k \frac{\partial u}{\partial n} \Delta S \Delta t = k(\nabla u \cdot \Delta S) \Delta t \quad (1.56)$$

其微分形式为

$$dQ = k \nabla u \cdot dS \quad (1.57)$$

其中, k 称为物体的热传导系数, 通常是空间位置 (x, y, z) 的函数, 即 $k(x, y, z)$, 当物体为各向同性的均匀介质时, k 为常数。

于是, 在 $t_1 \rightarrow t_2$ 这段时间里, 通过曲面 S 流入区域 V 内的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \nabla u \cdot dS \right] dt \quad (1.58)$$

流入的热量使体元 V 内温度发生了变化, 在 Δt 时间内, 区域 V 内各点温度从 $u(x, y, z, t)$ 变化到 $u(x, y, z; t + \Delta t)$, 则在 Δt 时间内 V 内稳定升高所需要的热量为

$$\int_V [u(x, y, z; t + \Delta t) - u(x, y, z; t)] dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial u(x, y, z; t)}{\partial t} \Delta t dV \quad (1.59)$$

从而由时刻 t_1 到 t_2 , 由于温度升高体元吸收的热量为

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt \quad (1.60)$$

其中, c 为物体的比热容; ρ 为物体的密度。对均匀物体来说, 它们都是常数。

另外, 以 $F(x, y, z; t)$ 表示热源强度, 即介质中热源在单位时间、单位体积内所释放出的热量, 则体元 V 内热源释放的热量为

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V F dV \right] dt \quad (1.61)$$

这样, 根据能量守恒定律, 流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的热量, 即

$$Q_1 + Q_3 = Q_2 \quad (1.62)$$

将式(1.58)、(1.60)、(1.61)代入式(1.62), 得

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iint_S k \nabla u \cdot dS \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V F dV \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \right] dt \quad (1.63)$$

因为时间间隔 $[t_1, t_2]$ 是任意取的, 并且被积函数是连续可积的, 故有

$$\iint_S k \nabla u \cdot dS + \iiint_V F dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (1.64)$$

利用高斯公式可将此式左端对曲面 S 的积分化为体积分, 即

$$\iint_S k \nabla u \cdot dS = \iiint_V k \nabla \cdot (\nabla u) dV = \iiint_V k \nabla^2 u dV \quad (1.65)$$

因此, 有

$$\iiint_V k \nabla^2 u dV + \iiint_V F dV = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV \quad (1.66)$$

由于区域 V 是任意选取的, 且被积函数是连续的, 所以式(1.66)左右恒等的条件是它们的被积函数恒等, 由此式得到

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + F \quad (1.67)$$

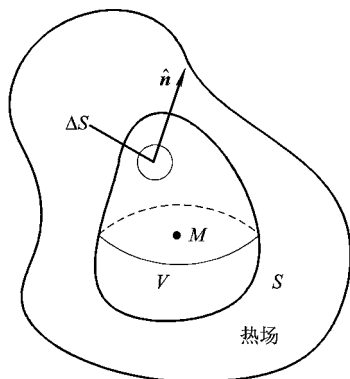


图 1.5 三维物理的热传导示意

整理得

$$u_t = a^2 \Delta u + f \quad (1.68)$$

其中, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$; $f = \frac{F}{c\rho}$; $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 在此为三维拉普拉斯算符。

式(1.68)称为三维热传导方程。若物体内部没有热源, 则相应的三维齐次热传导方程为

$$u_t = a^2 \Delta u \quad (1.69)$$

2. 扩散方程

和热传导过程类似, 扩散过程在实际中也是经常见到的。当我们在房间里把一瓶香水打开, 就会有香水的分子从瓶子中扩散出来, 开始在瓶的附近会嗅到香水的气味, 过一会儿整个房间里都会充满香水的气味, 这种现象就是一种扩散现象。一般来说, 由于物质浓度(单位体积中的分子数或质量)分布的不均匀, 物质从浓度高的地方向浓度低的地方转移的现象就叫做扩散。

扩散现象并不限于气体, 在液体、固体中也有扩散现象, 例如制作半导体器件就可以采用扩散法。

在扩散问题中, 需要研究的是浓度函数 u 在空间中的分布和随时间的变化关系。这里从一维扩散问题(指的是只沿一个方向进行的扩散)出发, 来研究浓度在空间中的分布和随时间的变化规律。

如图 1.6 所示, 不妨设有一沿 x 轴方向的扩散, 我们求其扩散过程中浓度函数 $u(x, t)$ 所满足的方程, 即扩散过程中浓度函数随空间位置和时间变化关系。

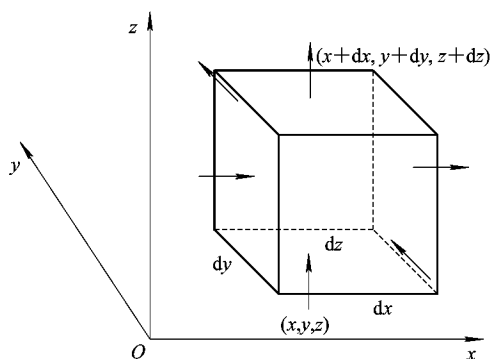


图 1.6 一维扩散过程示意

根据待求问题的物理叙述, 首先需要利用扩散的相关规律来做过程的数学描述:

(1) 扩散运动的强弱可用“单位时间里通过单位横截面积的质量或粒子数”来表示, 这叫扩散流强度, 记作 q 。

事实上, 引起物质扩散运动的原因是浓度分布的不均匀性。浓度不均匀的空间分布程度可用浓度梯度 ∇u 来表示。实验证明, 扩散流强度 q 与浓度梯度 ∇u 间存在一定的关系, 这就是扩散定律, 即

$$q = -D \nabla u \quad (1.70)$$

其中, 负号表示扩散转移方向(浓度减小的方向)跟浓度梯度(浓度增大的方向)相反; 比例系数 D 叫做扩散系数, 因物质而异, 即使同一物质在不同温度下, D 也不同。一般说, 温

度越高, 扩散系数越大。

(2) 对于沿 x 方向进行的一维扩散, 式(1.70)可写为

$$q = -D \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.71)$$

(3) 应用扩散定律和物质守恒定律(或粒子数守恒定律)来研究一维扩散问题中的浓度在空间中的分布和在时间中 $u(x, t)$ 的变化规律。

以下是问题的具体求解过程。

和前面各问题的求解一样, 首先, 应把空间加以细分, 确定研究对象。取 x 与 $x+dx$ 之间, y 与 $y+dy$ 之间, z 与 $z+dz$ 之间的小长方体为对象, 如图 1.6 所示, 这个小体积元里面的浓度变化取决于扩散流强度 q 向它汇集或从它发散, 也就是说取决于穿过它表面的流量。

这里, 扩散只沿 x 方向进行, 扩散流并不穿过前后和上下四个面, 而只穿过左右两面。因此:

(1) 在 Δt 时间内, 从左边穿过面元 $dS_1 = dy dz$ 进入体积元 $dV = dx dy dz$ 的粒子数(或质量)是

$$N_1 = q|_x dy dz \Delta t \quad (1.72)$$

(2) 在 Δt 时间内, 由右边的面元 $dS_2 = dy dz$ 流出的粒子数(或质量)是

$$N_2 = q|_{x+dx} dy dz \Delta t \quad (1.73)$$

所以, 在 Δt 时间内净流入 $dV = dx dy dz$ 的粒子数(或质量)为

$$N = N_1 - N_2 = -(q|_{x-dx} - q|_x) dy dz \Delta t = -\frac{\partial q}{\partial x} dx dy dz \Delta t \quad (1.74)$$

把扩散定律(式(1.71))代入上式, 并令 $\Delta t \rightarrow 0$, 以 dt 代替, 并假设扩散系数 D 在空间中各处是均匀的, 则净流入体积元 dV 的粒子数为

$$N = \frac{\partial}{\partial x} (Du_x) dx dy dz dt = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz dt \quad (1.75)$$

(3) 假设体积元 dV 内没有源和转化过程, 也就是说, 这种物质的原子或分子既不从其他物质转化出来也不转化为其他物质, 则在 Δt 时间内粒子数的增加量为

$$N_3 = [u(x, y, z; t + \Delta t) - u(x, y, z; t)] dx dy dz = \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz dt \quad (1.76)$$

则由粒子数守恒定律知, 在 dt 内净流入 dV 中的粒子数应该等于 dV 内粒子增加量。由式(1.75)和式(1.76)可得

$$D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx dy dz dt = \frac{\partial u}{\partial t} dx dy dz dt \quad (1.77)$$

化简为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.78)$$

即

$$u_t - Du_{xx} = 0 \quad (1.79)$$

上式称为一维扩散方程。令 $a^2 = D$, 则可以把扩散方程改写为

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad (1.80)$$

对于三维的扩散问题, 不仅需要计算穿过图 1.6 小体元左右两个面的流量, 还要计算穿过前后和上下四个面的流量, 其结果就是

$$u_t = \left[\frac{\partial}{\partial x}(Du_x) + \frac{\partial}{\partial y}(Du_y) + \frac{\partial}{\partial z}(Du_z) \right] \quad (1.81)$$

同样, 如果扩散系数在空间各处是均匀的, 则式(1.81)可化简为

$$u_t - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \quad (1.82)$$

即

$$u_t - a^2 \Delta u = 0 \quad (1.83)$$

另外, 如果在所研究的区域存在源, 当扩散源的强度 $f(x, y, z; t)$ 与浓度无关时, 则扩散方程为

$$u_t - a^2 \Delta u = f \quad (1.84)$$

如果源的强度与浓度成正比, 则扩散方程可修改为

$$u_t - a^2 \Delta u + bu = 0 \quad (1.85)$$

其中, b 是待定系数, 需要根据具体问题的分析确定, 如在放射性衰变过程中, $b = \frac{\ln 2}{\tau}$, τ 为半衰期。

1.2.3 稳定场方程的导出

所谓稳定场方程, 是指我们研究的各种物理现象处于稳定状态(即场分布不随时间而变化)时所满足的偏微分方程。

1. 稳定的浓度分布方程

显然, 对于前面讨论的扩散运动, 如果持续下去, 最终会达到稳定状态, 浓度的空间分布不再随时间变化, 即 $u_t = 0$, 则由式(1.84)得稳定的浓度分布方程为

$$a^2 \Delta u = -f \quad (1.86)$$

这就是数学中的泊松(Poisson)方程。如果没有源, 则由式(1.83)可得稳定场方程为

$$a^2 \Delta u = 0 \quad (1.87)$$

称此式为拉普拉斯(Laplace)方程。

2. 稳定的温度分布方程

同样, 如果依据热传导方程来考察稳定的温度场特性, 即在热传导方程中当物体的温度趋于某种稳定状态时, 这时温度 u 已与时间 t 无关, 我们就称此状态为稳定的温度场分布状态。显然这时有 $u_t = 0$ 。同样由式(1.68)可得稳定的温度场分布方程为

$$a^2 \Delta u = -f \quad (1.88)$$

这也是泊松方程, 如果没有源, 则由式(1.83)可得稳定的温度场方程为

$$a^2 \Delta u = 0 \quad (1.89)$$

此式同样也是拉普拉斯方程。

事实上, 上面两个稳定场过程的推导都是从输运方程取极限情况得到的。从其满足的方程可以看到, 稳定场方程与时间无关, 是关于空间的偏微分方程。

3. 静电场

在充满介电常数 ε 的介质区域中, 有体密度为 $\rho(x, y, z)$ 的电荷分布, 试研究这个区

域中的静电场的分布特性。

我们知道，由于静电场中存在电势函数 $V(x, y, z)$ 满足

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (1.90)$$

其中， \mathbf{E} 为电场强度。显然，要研究区域的静电场分布特性，只需要研究此区域中电位函数 V 所遵循的规律即可。

所以，在研究的区域中，任作一封闭曲面 S ，其所包围的空间区域为 τ ，则由介质中静电场中的高斯定理，得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_{\tau} \rho \, d\tau \quad (1.91)$$

由高斯公式把面积分化为体积分，得

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d\tau \quad (1.92)$$

由于 τ 是任意的，因此

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \quad (1.93)$$

将式(1.90)代入式(1.93)，由矢量场运算得

$$\Delta V = -\frac{1}{\epsilon} \rho \quad (1.94)$$

这就是介质中的静电场满足的泊松方程。如果是在真空中，有 $\epsilon = \epsilon_0$ 。同样，如果我们所讨论的区域中无电荷，得

$$\Delta V = 0 \quad (1.95)$$

仍然是拉普拉斯方程。

至此，我们已从三个方面推导出了物理上的三类典型方程，由以上的推导过程可以看出，建立(导出)数理方程一般要经历以下三个步骤：

(1) 对所研究的问题做数学抽象表述，从所研究的系统中划出一小部分，即微元作为研究对象，分析相邻部分与这一小微元的相互作用。

(2) 根据相关领域中的物理学的规律(如前面所用的牛顿第二定律、能量守恒定律、高斯定律等)，以数学表达对微元的这种作用关系。

(3) 化简、整理后取相应的极限过程，即得到数学物理方程。

显然，以上三类常见的数学物理方程并非能包揽物理学中的一切问题。例如，量子力学中的薛定鄂(Schrödinger)方程：

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \varphi + U(r)\varphi \quad (1.96)$$

其中， \hbar 是约化普朗克(Planck)常数($\hbar = h/2\pi$, h 为普朗克常数)； μ 为粒子质量； $\varphi(r, t)$ 为波函数； $U(r)$ 是势函数； i 为虚数单位， $i = \sqrt{-1}$ 。

还有反映孤波问题的 KdV 方程

$$u_t + \sigma u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.97)$$

其中， σ 为常数； $u(x, t)$ 为位移。

方程(1.96)和(1.97)均不属于上述的三类方程。针对不同的物理问题，需要我们根据具体问题按照上面所述的建立方程的方法来具体分析。