数 学 物 理 方 法

陆全康

高等教育出版社

责任编辑　董洪光
封面设计　张　楠
责任绘图　朱　静
版式设计　马静如
责任校对　殷　然
责任印制

内容提要

本书是教育部"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划"的研究成果,是面向21世纪课程教材.本书第一版出版已近20年,经历年来的教学实践,在科学性和可读性方面反映甚好.本书在保持原书基本结构的基础上对原书的教学内容和体系做了修改和更新,进一步加强了科学性和实用性;并精选了大量实例,以适应多层次读者的学习需要,特别是自学者的学习需要.

本书可作为高等学校物理类、电子工程类各专业的教材,也可作为电视大学有关专业的教学用书或参考书,也可供有关专业的教师、科技人员和自学者参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 陆全康,赵惠芬主编.—2版.—北京:高等教育出版社,2003.7

ISBN 7-04-011909-9

Ⅰ.数... Ⅱ.①陆...②赵... Ⅲ.数学物理方法-高等学校-教材 Ⅳ.0411.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第037494号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http: www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http: www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷			
		版　　次	年　月第　版
开　　本	787×960　1 16		年　月第　版
印　　张	36.25	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	680 000	定　　价	41.00元

前　　言

本书第一版出版已近20年.本书的初版经过历年来的教学实践,在科学性和可读性方面反映甚好.通过历年来在复旦大学物理类和电子工程类的各专业讲授的教学实践,作者积累了一些教学资料,在高等教育进入21世纪之时,有必要再版一本能面向21世纪的课程教材,以满足广大读者的要求.

在这次编写过程中,作者十分注意数学与物理的结合,增加了一些典型例题和复习题,所举的例题和习题都尽量结合物理问题和物理实例;在编写过程中,我们努力做到深入浅出,条理清楚,使读者查阅时感到比较实用和方便.为此,我们对本书第一版的教学内容和教学体系做了修改和更新.修改和更新后的《数学物理方法》分为两编,上编为复变函数导论,以解析函数的性质、留数应用和δ函数为重点,下编为数理方程和特殊函数,以分离变量法、积分变换法、格林函数、勒让德多项式和贝塞耳函数为重点.主要改动如下:

1. 对部分章节的写法和内容做了一些改动,例如上编的§1.9、§3.6、§3.8、§3.9、§5.3、§7.2,下编的§9.6等,使本书能更紧密地结合物理及相关课程的内容.

2. 在上编的第四章留数部分,增加了对数留数、辐角原理和黎曼面上多值函数的积分;在第七章δ函数部分,增加了物理学中遇到的数学映射关系及泛函的内容.在部分章节中增加了一些例题和复习题,以进一步开拓学生视野,提高学生分析问题和解决问题的能力.

3. 删去了"保角变换"这一章的内容,主要讨论解析函数的几何性质,可简述于相应的章节中.

4. 每一章后都有"小结",扼要总结该章内容,指出重点和难点,再按节列表总结主要内容及解题的基本方法,讲解典型例题,使学生对整章内容融会贯通,加强知识的条理性、充分性,以便于读者对比和加深印象,特别适合于学生自学;最后给出该书各章习题和答案.

本书再版成书得到复旦大学数学系、物理系和电子工程系广大师生的协助,作者在此表示衷心感谢.

由于作者水平有限,难免有错误和不妥之处,恳切地期望读者批评指正.

作者

2003年1月

目　　录

上编　复变函数导论

下编　数理方程和特殊函数

上编　复变函数导论

第一章　复数和复变函数

§1.1　复　　数

复数的定义

$z = x + iy$ 称作复数，其中 x 与 y 均是实数，而 i 记 -1（即 $i^2 = -1$），是虚数单位. x 称作 z 的实部，用记号 $x = \mathrm{Re}\, z$；y 称作 z 的虚部，用记号 $y = \mathrm{Im}\, z$.

当 $y = 0$ 时，定义为实数 x，即 $x + i0 = x$. 因此全部实数是全部复数的一部分.

对于这样建立起来的复数，必须规定其运算规则（即运算法则或公理）. 既然实数是复数的特例，规定复数代数运算规则的一个基本要求是当把复数运算法则运用到实数特例时，能够与实数的运算规则相符合.

复数的相等规定如下：当

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \tag{1.1.1}$$

则称 z_1 和 z_2 相等，写成

$$z_1 = z_2 \tag{1.1.2}$$

复数的运算规则

现在叙述复数运算规则的定义.

1. 加法

复数　　$z = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$

$$= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.1.3}$$

称为复数 z_1 和 z_2 的和.

从定义可直接得出下列加法规则:

(1) 交换律 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

(2) 结合律 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

定义复数的差为

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

如果 $z_1 = z_2$,则 $z_1 - z_2 = 0 + i0$,这个数称为零,用符号 0 表示,即复数 $0 = 0 + i0$

2 乘法

两个复数 z_1 和 z_2 的第二种结合是 $z_1 \cdot z_2$,或写为 $z_1 z_2$,称为 z_1 乘 z_2.其结果为 z

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.1.5}$$

从乘法定义可得出下列乘法规则:

(1) 交换律 $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

(2) 结合律 $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

(3) 关于加法的分配律 $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

乘法的逆运算称作除法,就是已知两个复数 z_1 和 z_2,求一个复数 z,使其满足方程:

$$z_1 z = z_2$$

如果 $z_1 \neq 0$,除法是可能的,而且结果是唯一的;因为以上方程相当于下列两个方程:

$$x_1 x - y_1 y = x_2, \quad y_1 x + x_1 y = y_2$$

这个方程组的系数行列式 $x_1^2 + y_1^2 \neq 0$,所以方程组有唯一的解,就是

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^2 + y_1^2}$$

因此,当 $z_1 \neq 0$,用符号 $z_2 \quad z_1$ 代表 z,就是

$$\frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_1^2 + y_1^2} + i\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{x_1^2 + y_1^2} \tag{1.1.6}$$

当 $z_1 = z_2$,命其结果为复数 I,即

$$\mathrm{I} = 1 + i0 \tag{1.1.7}$$

由于$(1 + i0)$就是实数 1,所以 $\mathrm{I} = 1$.

复数的集合称为复数域.

当复数的实部等于零时,即 $z = iy$,称为纯虚数.例如, $z = 3i$ 为纯虚数, $z = 5$ 为实数, $z = 5 + 3i$ 为复数.

复数的共轭

当 $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$,则称 z_1 与 z_2 是互为共轭的.即复数 z_2 称为 z_1 的共轭复数,反之亦然,这可以用记号

$$z_1 = \overline{z_2} \quad 或 \quad z_1 = z_2^* \tag{1.1.8}$$

来表示,反之亦然,即有

$$z_2 = \overline{z_1} \quad 或 \quad z_2 = z_1^* \tag{1.1.9}$$

由此可见,

$$\overline{x + iy} = x - iy \tag{1.1.10}$$

$$\overline{x - iy} = x + iy \tag{1.1.11}$$

例如,

$$\overline{5 + 3i} = 5 - 3i \tag{1.1.12}$$

§1.2　复数的几何表示

复数一般可采用两种几何表示方法,即采用复数平面或复数球面.

1. 复数平面

(1) 笛卡儿坐标

在坐标平面 $x0y$ 上,采用坐标为(x, y)的点来表示复数 $x + iy$.如图 1.2.1 所示,复数 $x + iy$ 中的 x 值用实轴(x 轴)上的长度来表示,而 y 值用虚轴(y 轴)上的长度来表示. x 与 y 的值均为实数,注意不用(x, iy)来表示复数.

例如,点$(5,3)$就表示 $5 + 3i$,点$(1,0)$表示 1,而点$(0,1)$表示 i.

还可以在复平面上引入复矢量来表示复数 $x + iy$.如图 1.2.1 所示,此矢量从原点出发,指向点(x, y).

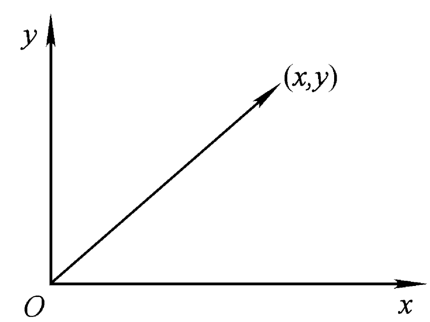

图 1.2.1　复数平面:笛卡儿坐标

由此可见,在 $x0y$ 平面上每一个具有坐标(x, y)的点,都与一个复数 $z = x + iy$ 对应,反过来也一样.所以,全部复数与 $x0y$ 平面上的点构成一一对应关系. $x0y$ 平面称为复数平面或复平面.

复数的平面表示法具有很大的优点,它可以将许多关于复数的结果直接作

几何的解释.例如复数域中的实数可用 0x 轴上的点表示,两个共轭复数可以用关于 x 轴成对称的两点来表示.复数 z 的绝对值表示平面上点(x, y)和原点的距离:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(2) 极坐标

除了笛卡儿坐标以外,还可采用极坐标(如图 1.2.2 所示)来表示复平面上的点,即引入

$$x = \rho\cos\phi \qquad y = \rho\sin\phi \tag{1.2.1}$$

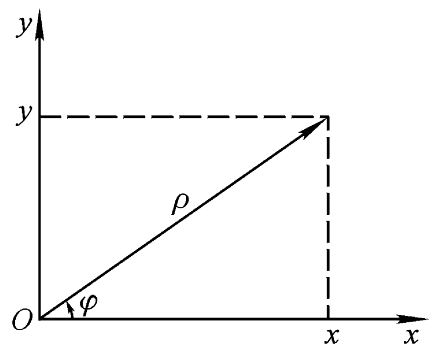

图 1.2.2 复数平面:极坐标

那么复数可表示成

$$z = x + iy = \rho\cos\phi + i\rho\sin\phi = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) \tag{1.2.2}$$

其中 ρ 为复矢量的长度,称为复数 z 的绝对值,或称为复数 z 的模,

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.2.3}$$

ϕ 称为复矢量或复数的辐角:

$$\phi = \arctan\frac{y}{x} \tag{1.2.4}$$

$z = 0$ 的辐角没有确定值,因而不能讲 $z = 0$ 的辐角等于多少.

利用(1.2.1)式,可以把任何异于零的复数表示成三角函数形式(1.2.2),例如:

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\pi/2\right)$$

$$1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$$

$$1 + i = \sqrt{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4)$$

$$-i = 1(\cos 3\pi/2 + i\sin 3\pi/2)$$

利用下述定义:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \tag{1.2.5}$$

可把复数的三角函数形式化成复数的指数形式:

$$z = \rho e^{i\phi} \tag{1.2.6}$$

(1.2.5)式实际是虚数 $i\phi$ 的指数的定义,它通常称为欧拉(Euler)公式.

例如:$i = e^{i\pi/2}$

$-1 = e^{i\pi}$

$1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$

$-i = e^{i3\pi/2}$

复数运算的几何意义

复数代数运算规则最基本的定义为加法和乘法.复数

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.2.7}$$

称为复数 z_1 与 z_2 的和,从此可看出加法的几何意义为:两个复矢量的相加规则满足平行四边形法则(参看图 1.2.3),即三角形法则.

例如:已知 $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 2 + 5i$,则

$$z_1 + z_2 = (3 + 2) + (4 + 5)i = 5 + 9i$$

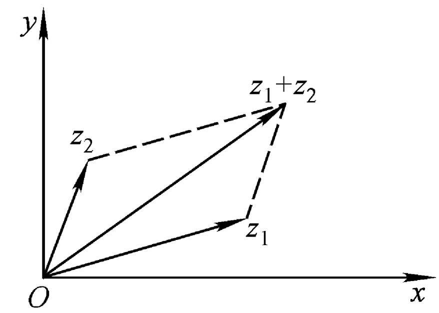

图 1.2.3　复数的加法:两个复矢量的相加满足平行四边形法则

复数 $z = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) \tag{1.2.8}$$

称为 z_1 与 z_2 的积.

这样,复数乘法即可按照代数多项式的乘法规则将 $x_1 + iy_1$ 与 $x_2 + iy_2$ 相乘,再用 -1 代替 $i \cdot i$ 后即可得出结果.

例如:(1) 已知 $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 2 + 5i$,则

$$z_1 z_2 = (3 + 4i)(2 + 5i) = 6 + 15i + 8i + 20i \cdot i$$
$$= (6 - 20) + (8 + 15)i = -14 + 23i$$

(2) $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$

即

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \tag{1.2.9}$$

两个彼此共轭的复数的乘积是实数,它等于这彼此共轭的复数的模的平方.

如果采用复数的极坐标表示,就容易看出两个复数相乘的几何意义.

$$z = z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\phi_1} \rho_2 e^{i\phi_2}$$
$$= \rho_1 \rho_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \tag{1.2.10}$$

这表明几何意义为模相乘和辐角相加(参看图 1.2.4).

例如:已知 $z_1 = 3e^{i\pi/6}$; $z_2 = 2e^{i\pi/6}$,则

$$z = 3 \cdot 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)} = 6e^{i\pi/3}$$

n 个相同的复数 z 相乘可记作 z^n,即

$$z^n = (\rho e^{i\phi})^n = \rho^n e^{in\phi} \tag{1.2.11}$$

因而,$|z^n| = \rho^n$;另一方面 $|z| = \rho$,$|z|^n = \rho^n$,由此得出

$$|z^n| = |z|^n = \rho^n \tag{1.2.12}$$

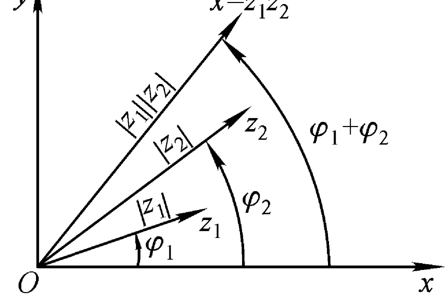

图 1.2.4　两个复数相乘的几何意义

从乘法定义可求得两个复数的相除:当 $z_2 \neq 0$ 时,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \rho_1 e^{i\phi_1} \cdot \frac{1}{\rho_2} e^{-i\phi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)}$$

例如:已知 $z_1 = 3e^{i\pi\ 6}$, $z_2 = 2e^{i\pi\ 6}$,则

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{i\pi\ 6}}{2e^{i\pi\ 6}} = \frac{3}{2}e^{i(\pi\ 6 - \pi\ 6)} = \frac{3}{2}$$

利用共轭复数的性质,按下述方法求解复数的除法是比较方便的:(i) 把分子和分母分别乘以分母的共轭复数,于是分母化成正实数;(ii) 分别用分母除实部和虚部.

例 1:　求 $\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$.

解:

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}\end{aligned}$$

例 2:　求 $\frac{1-i}{1+i}$.

解:

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i\cdot i}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$$

2　复数球面

由于复数平面上的每一点与一个复数构成一一对应,因而可以用复数平面上的点来表示复数.由下面的讨论可以看到复数球面[亦称黎曼(Riemann)球面]上的点也可与复数构成一一对应,因而亦可采用复数球面上的点来表示复数.

如图 1.2.5 所示,以复数平面的原点 O 为心作半径为 1 的球.从原点作垂直于复数平面的直线交球面于 N 和 S 两点.对于复数平面上的任一点 A,将点 A 与球的北极 N 连接起来,交球面于 A′,这样复数平面上的每一点均与复数球面上的点构成一一对应.

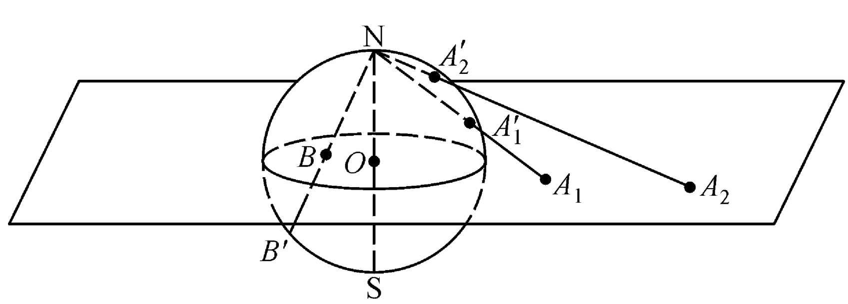

图 1.2.5　复数平面上的点 A_1、A_2、B 分别与复数球面上的点 A_1'、A_2'、B 构成一一对应

在图 1.2.5 中还可看到，复数平面上的 A_2 点比 A_1 点离原点更远，而 A_2 点在复数球面上的对应点 A_2' 却比 A_1' 更靠近北极点 N.

如果点 A 沿复数平面上的某一根直线(或曲线)伸向无限远，A'便向北极点 N 趋近.不论 A 按什么方式向无限远移动，A'便按某种相应的方式趋近于 N.因而 N 点即表示无限远点($z=\infty$)，在复变函数论中可将无限远点看成是一点，这在复数球面上是很清楚的.

既然复数平面上的点与复数球面上的点构成一一对应，因而也可将复数平面上的无限远点理解成一点.

这里讲复数球面的一个主要目的是为了说明无限远点，以后在讨论复数的几何性质时，大部分采用复数平面来描述，但要记得在复数平面上亦将无限远理解成一点.

容易领会，在复平面上，与 $z=0$ 一样，$z=\infty$的辐角也无确定值.例如：$2+i\infty$，$0+i\infty$，$\infty+3i$，$3-i\infty$等表示沿不同路径趋于同一个无限远点.

按照这里引入的定义，在复平面上仅有一个无限远点，它对应于复数球面上的北极点 N.

复数在黎曼球面上的坐标

当已知复数 z 在复平面上的坐标(x, y)后，它在复数球面(黎曼球面)上相应点的坐标就可求得.如图 1.2.6 所示.设 A 是复数平面上的任一点，则过 N 与 A 的连接线交球面于一点 A'. A 点在复数平面上的坐标为(x, y)，A'点在复数球面上的坐标为(ξ, η, ζ).两个坐标系的原点均为 O，ξ 轴和 η 轴分别与 x 轴和 y 轴重合，ζ 轴与 ON 相重合. N 点的坐标为(0,0,1).

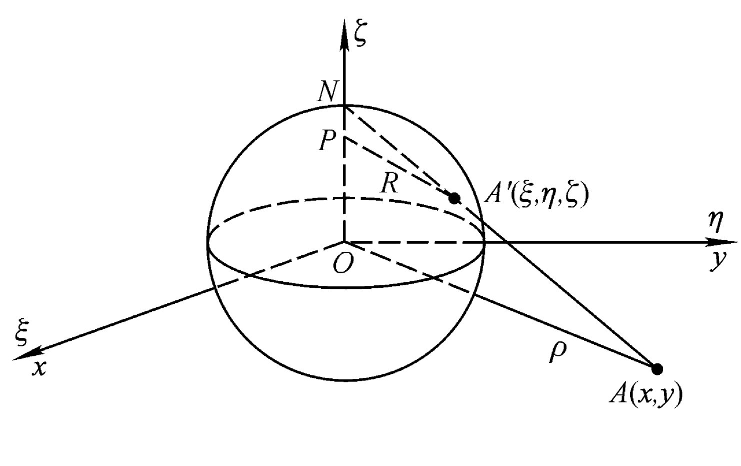

图 1.2.6　复数平面坐标(x, y)与复数球面坐标(ξ, η, ζ)

在图 1.2.6 中，在$\triangle NOA$ 构成的平面中，作直线 PA'与 OA 平行，OA 的长度为 ρ，PA'的长度为 R.

球面的方程为

$$\xi^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1 \tag{1.2.13}$$

在△NOA 中,

$$\frac{R}{\rho} = \frac{1 - \zeta}{1} \tag{1.2.14}$$

于是,复数平面上的点 A 与复数球面上的对应点 A′的坐标关系为

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{1 - \zeta} \tag{1.2.15}$$

从而得到:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta},\ y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

因此

$$z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

由此算出:

$$z\bar{z} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 - \zeta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta},\ z\bar{z} + 1 = \frac{2}{1 - \zeta}$$

和

$$\zeta = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1} \tag{1.2.16}$$

再算出

$$\xi = x(1 - \zeta) = \frac{(z + \bar{z})}{2}(1 - \zeta) = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1} \tag{1.2.17}$$

与

$$\eta = y(1 - \zeta) = \frac{i(\bar{z} - z)}{2}(1 - \zeta) = \frac{i(\bar{z} - z)}{z\bar{z} + 1} \tag{1.2.18}$$

式(1.2.16)～(1.2.18)给出复数球面上点 A′坐标(ξ, η, ζ)与点 A 坐标 z 的关系.

复数的开方

从这里开始仍采用复数平面来描述复数的几何性质.注意到同一个复数的辐角可以差 2π 的整数倍,因而

$$\rho e^{i\varphi},\ \rho e^{i(\varphi + 2\pi)},\ \cdots,\ 即\ \rho e^{i(\varphi + 2k\pi)}$$

$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$均表示复平面上的同一点;这就是说,它们表示同一个复数:

$$z = \rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi + 2k\pi)} \tag{1.2.19}$$

设 n 为正整数,把复数 z 开 n 次方,即

$$\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = [\rho e^{i(\varphi + 2k\pi)}]^{1/n} = \rho^{1/n} e^{i(\varphi + 2k\pi)/n} \tag{1.2.20}$$

当 k 取 $0,1,2,\cdots,n-1$ 时,上式得出的辐角 $(\phi+2k\pi)\ n$ 各不相等;k 取 n 时就与 k 取 0 时的辐角相等,k 取 $n+1$ 时就与 k 取 1 时的辐角相等,依次类推.这样,开 n 次方后就能得到 n 个根.这 n 个根的模相等,但辐角不等.

如图 1.2.7 所示,任意复数 z 的 n 次根都位于以原点 O 为中心、以 $\rho^{1\ n}$ 为半径的圆周上,与 $k=0$ 相应的根的辐角为 $\phi\ n$,每两个根与原点 O 构成的圆心角是 $2\pi\ n$.

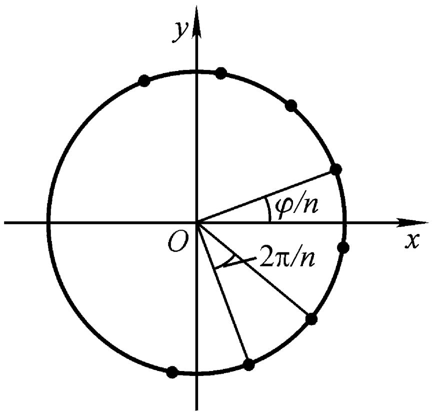

图 1.2.7　复数 z 的 n 次根

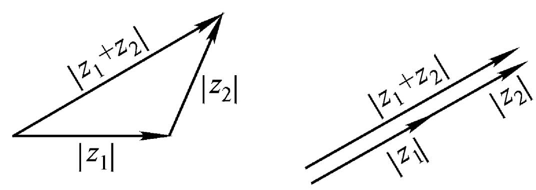

图 1.2.8　$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ 的几何意义

两个常用不等式

(1)　$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$　　(1.2.21)

如图 1.2.8 所示,上式的几何意义表示:三角形两边之和大于第三边,等号当三角形的两边为同一直线情形时成立.

(2)　$|z_1-z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|$　　(1.2.22)

上式的几何意义表示:三角形一边大于其余两边之差,等号当三角形的两边为同一直线情形时成立.

上述两个不等式称为三角不等式,现在用代数方法证明:

(1) 由

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$$

利用

$$z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})\leq 2|z_1\overline{z_2}|=2|z_1||z_2|$$

于是,

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=z_1\overline{z_1}+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+z_2\overline{z_2}\\&=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\\&\leq|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2\end{aligned}$$

这就得到:

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$