

*第一章 Hamilton 算子与场

场是物理学中的一个重要概念，场方程是数学物理方程的一部分。本章中介绍的哈密顿（Hamilton）算子是场论中的一个算符，在本课程的各章中都要用到它。

第一节 Hamilton 算子与三度

本节介绍 Hamilton 算子在空间直角坐标系中的表示及其计算性质。

一、矢量的运算

设 $Oxyz$ 是空间直角坐标系。为了方便使用和表示起见，常将其坐标记作 $x_1 = x$ ， $x_2 = y$ ， $x_3 = z$ ；而各坐标轴正向单位向量 i 、 j 、 k 依次记作 l_1 、 l_2 、 l_3 。

分量为函数的矢量（例如 $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^3 l_k a_k(x)$ ）称为矢量函数。普通的函数则称为纯量函数或标量函数。

对于矢量或矢量函数，除了用到它的线性运算之外，还会用到下列运算：

$$(1) \text{ 数量积 (或点乘)} \quad \left(\sum_{k=1}^3 l_k a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 l_k b_k \right) = \sum_{k=1}^3 a_k b_k .$$

$$(2) \text{ 向量积 (或叉乘)} \quad \left(\sum_{k=1}^3 l_k a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^3 l_k b_k \right) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$$(3) \text{ 偏导数} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^3 l_k a_k \right) = \sum_{k=1}^3 l_k \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \quad (j=1, 2, 3).$$

$$(4) \text{ 积分} \quad \int \left(\sum_{k=1}^3 l_k a_k \right) dx_j = \sum_{k=1}^3 l_k \int a_k dx_j \quad (j=1, 2, 3). \quad \text{其中}$$

$a_k = a_k(x_1, x_2, x_3)$. $b_k = b_k(x_1, x_2, x_3)$ ($k=1, 2, 3$) 均为纯量函数.

注意：非特别申明时，本书中总假定所涉函数具有所需的连续的各阶偏导数。

二、Hamilton 算子

1. Hamilton 算子的定义

Hamilton 算子记作 ∇ ，它是矢量形式的偏导算子。在三维空间直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 中，它的表达式为

$$\nabla = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.1)$$

也可按矢量记法简记作

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

在一维空间与二维空间中，分别有

$$\nabla = l_1 \frac{d}{dx_1}, \quad \nabla = l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

下面主要讨论三维空间的情形，结论可以相应地推广到一、二维空间中。

2. 关于 Hamilton 算子的计算

从 Hamilton 算子表达式中可以看出,它在运算中应既具有向量性质,也具有微分性质. 设 $u = u(x_1, x_2, x_3)$ 是纯量函数,则有

$$\begin{aligned}\nabla u &= \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u = l_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} \\ u \nabla &= l_1 u \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 u \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 u \frac{\partial}{\partial x_3}\end{aligned}$$

设 $\mathbf{a} = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3$ 是向量函数,其中 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 均是 x_1, x_2, x_3 的纯量函数,则按空间解析几何中定义的运算,有数量积(或点乘)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{a} &= \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3) \\ &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \\ \mathbf{a} \cdot \nabla &= (l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3) \cdot \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\end{aligned}$$

及向量积(或叉乘)

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{a} &= \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \times (l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3) \\ &= \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= l_1 \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) + l_2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) + l_3 \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) \\
\mathbf{a} \times \nabla &= (l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3) \times \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\
&= \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} \\
&= l_1 \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - a_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + l_2 \left(a_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + l_3 \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)
\end{aligned}$$

注意：非特别申明时，本书中总假定所涉函数具有所需的连续的各阶偏导数。

例 1.1 在直角坐标系 $Oxyz$ 中，设 $M(x, y, z)$ 为动点， $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为定点，又

$$\mathbf{r} = l_1(x - x_0) + l_2(y - y_0) + l_3(z - z_0) \quad (1.2)$$

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (1.3)$$

分别计算 ∇r ， $\nabla \cdot \mathbf{r}$ ， $\nabla \times \mathbf{r}$ ， $\mathbf{r} \cdot \nabla$ 。

解 按定义，有

$$\begin{aligned}
\nabla r &= \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x} + l_2 \frac{\partial}{\partial y} + l_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) r = l_1 \frac{\partial r}{\partial x} + l_2 \frac{\partial r}{\partial y} + l_3 \frac{\partial r}{\partial z} \\
&= l_1 \frac{x - x_0}{r} + l_2 \frac{y - y_0}{r} + l_3 \frac{z - z_0}{r} = \frac{1}{r} \mathbf{r} \\
\nabla \cdot \mathbf{r} &= \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x} + l_2 \frac{\partial}{\partial y} + l_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot [l_1(x - x_0) + l_2(y - y_0) + l_3(z - z_0)]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial(x-x_0)}{\partial x} + \frac{\partial(y-y_0)}{\partial y} + \frac{\partial(z-z_0)}{\partial z} = 1+1+1=3$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \end{vmatrix} = l_1 \left[\frac{\partial(z-z_0)}{\partial y} - \frac{\partial(y-y_0)}{\partial z} \right] +$$

$$l_2 \left[\frac{\partial(x-x_0)}{\partial z} - \frac{\partial(z-z_0)}{\partial x} \right] + l_3 \left[\frac{\partial(y-y_0)}{\partial x} - \frac{\partial(x-x_0)}{\partial y} \right] = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r} \cdot \nabla = [l_1(x-x_0) + l_2(y-y_0) + l_3(z-z_0)] \cdot \left(l_1 \frac{\partial}{\partial x} + l_2 \frac{\partial}{\partial y} + l_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$= (x-x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial}{\partial y} + (z-z_0) \frac{\partial}{\partial z}$$

例 1.2 设矢量函数 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(u)$, 其中 $u = u(x, y, z)$ 是纯量函数
求证:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla u \times \frac{d\mathbf{a}}{du}$$

证 设 $\mathbf{a} = l_1 \mathbf{a}_1 + l_2 \mathbf{a}_2 + l_3 \mathbf{a}_3$, 则

$$\nabla \times \mathbf{a} = l_1 \left(\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z} \right) + l_2 \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x} \right) + l_3 \left(\frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} \right)$$

$$= l_1 \left(\frac{da_3}{du} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{da_2}{du} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + l_2 \left(\frac{da_1}{du} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{da_3}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \right) +$$

$$l_3 \left(\frac{da_2}{du} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{da_1}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{da_1}{du} & \frac{da_2}{du} & \frac{da_3}{du} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(l_1 \frac{\partial u}{\partial x} + l_2 \frac{\partial u}{\partial y} + l_3 \frac{\partial u}{\partial z} \right) \times \left(l_1 \frac{da_1}{du} + l_2 \frac{da_2}{du} + l_3 \frac{da_3}{du} \right) \\
&= \nabla u \times \frac{da}{du}
\end{aligned}$$

三、梯度与方向导数

纯量函数 $u = u(x_1, x_2, x_3)$ 的梯度记作 $\text{grad } u$, 规定为

$$\text{grad } u = \nabla u \quad (1.4)$$

u 沿方向 $l = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3$ 的方向导数记作 $\frac{du}{dl}$, 规定为

$$\frac{du}{dl} = \nabla u \cdot l = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cos \alpha_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cos \alpha_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \cos \alpha_3 \quad (1.5)$$

四、散度与旋度

设矢量函数 $a = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3$ 其散度记作 $\text{div } a$, 规定为

$$\text{div } a = \nabla \cdot a \quad (1.6)$$

其旋度记作 $\text{rot } a$, 规定为

$$\text{rot } a = \nabla \times a \quad (1.7)$$

利用它们, 高斯 (Gauss) 公式可简写作

$$\oint_S a \cdot nds = \iiint_V \nabla \cdot a dv \quad (1.8)$$

其中: S 是空间区域 V 的边界曲面; n 是 S 的外法线方向矢量.

斯托克斯 (Stokes) 公式可简写作

$$\oint_L a \cdot tdl = \iint_S \nabla \times a \cdot nds \quad (1.9)$$

其中： S 是有界曲面； L 是 S 的边界曲线； t 是 L 的正向单位矢量； n 是 S 的外法线方向矢量。

五、Laplace 算子

为方便计，常将相同两个矢量（或矢量算子） a 的数量积记作 a^2 ，即

$$a \cdot a = a^2$$

拉普拉斯（Laplace）算子记作 ∇^2 或 Δ ，规定为

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (1.10)$$

Laplace 算子是纯量算子，在直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 下，由式（1.1）有

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (1.11)$$

对纯量函数 u ，有

$$\Delta u = \nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u) \quad (1.12)$$

对矢量函数 $a = l_1 a_1 + l_2 a_2 + l_3 a_3$ ，有

$$\Delta a = \nabla^2 a = l_1 \nabla^2 a_1 + l_2 \nabla^2 a_2 + l_3 \nabla^2 a_3 \quad (1.13)$$

在一维与二维直角坐标系中，Laplace 算子依次为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

未知函数的方程 $\nabla^2 u = 0$ 称作 Laplace 方程。

在某区域内满足 Laplace 方程的函数 u 称作该区域内的调和函数，调和函数是一类重要函数。

例 1.3 求证： $u = \frac{1}{r}$ 是调和函数，其中 r 的定义见例 1.1。

证 在直角坐标系 $Oxyz$ 中，按定义计算，有

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \nabla^2 \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{r} \\ &= \frac{3(x-x_0)^2}{r^4} - \frac{1}{r^3} + \frac{3(y-y_0)^2}{r^4} - \frac{1}{r^3} + \frac{3(z-z_0)^2}{r^4} - \frac{1}{r^3} = 0\end{aligned}$$

所以 u 是调和函数.

六、三度的计算公式

梯度、散度与旋度统称作三度，它们具有下列运算性质：

$$(1) \nabla c = 0 \quad (c \text{ 为常数.}) \quad (2) \nabla(cu) = c\nabla u \quad (c \text{ 为常数.})$$

$$(3) \nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v. \quad (4) \nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u.$$

$$(5) \nabla \frac{u}{v} = \frac{v\nabla u - u\nabla v}{v^2}. \quad (6) \nabla f(u) = f'(u)\nabla u.$$

$$(7) \nabla \cdot (ul) = \nabla u \cdot l \quad (l \text{ 为常矢}).$$

$$(8) \nabla \cdot (ca) = c\nabla \cdot a \quad (c \text{ 为常数})$$

$$(9) \nabla \cdot (a+b) = \nabla \cdot a + \nabla \cdot b.$$

$$(10) \nabla \cdot l = 0 \quad (l \text{ 为常矢}).$$

$$(11) \nabla \cdot (ua) = u(\nabla \cdot a) + (\nabla u) \cdot a.$$

$$(12) \nabla \times l = 0 \quad (l \text{ 为常矢}).$$

$$(13) \nabla \times (ca) = c\nabla \times a.$$

$$(14) \nabla \times (a+b) = \nabla \times a + \nabla \times b.$$

$$(15) \nabla \times (ua) = u(\nabla \times a) + (\nabla u) \times a.$$

$$(16) \nabla \times (\nabla u) = 0.$$

$$(17) \nabla \cdot (\nabla \times a) = 0.$$

$$(18) \nabla \cdot (a \times b) = (\nabla \times a) \cdot b + a \cdot (\nabla \times b).$$

$$(19) \quad \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}).$$

$$(20) \quad \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b})$$

$$(21) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}.$$

这些公式均可按算子 ∇ 的定义及数量积与矢量积的相应运算公式予以证明，这里不一一证明。

例 1.4 求证：公式 $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$ 。

证 我们仅在三维情形作证明，有

$$\nabla(uv) = \sum_{k=1}^3 l_k \frac{\partial(uv)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 l_k u \frac{\partial v}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^3 l_k v \frac{\partial u}{\partial x_k} = u\nabla v + v\nabla u$$

第二节 场与场方程

本节介绍场的概念、性质以及一些场方程。

一、标量场与矢量场

作用于一定范围的量叫做场。

如果对于空间区域 V 内任意点 M ，均有唯一纯量函数值 $u = u(M)$ 与之对应，则称 u 是 V 内的纯量场或标量场。例如，温度场、密度场均为纯量场。

梯度与方向导数是刻画纯量场的重要物理量。

如果对于空间区域 V 内任意点 M ，均有唯一矢量函数值 $\mathbf{a} = \mathbf{a}(M)$ 与之对应，则称 \mathbf{a} 是 V 内的矢量场。例如，力场、磁场均为矢量场。

旋度与散度是刻画矢量场的重要物理量。

二、无旋场及其位势

满足方程 $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ 的矢量场 \mathbf{a} 称为无旋场。

定理 1.1 在空间凸区域 V 内, 矢量场 \mathbf{a} 为无旋场的充要条件是: 存在纯量函数 $u = u(M)$, 使得 $\mathbf{a} = \nabla u$.

证 充分性. 设存在纯量函数 $u = u(M)$, 使得 $\mathbf{a} = \nabla u$. 则由三度运算性质, 有

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla u) = \mathbf{0}$$

可见 \mathbf{a} 为无旋场.

必要性. 设 \mathbf{a} 为无旋场. 则对于空间区域 V 内的任意封闭曲线 L , 由 Stokes 公式, 有

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot t dl = \iint_S \nabla \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

其中 S 是以为 L 边界的曲面. 故曲线积分

$$u(M) = \int_{M_0 M} \mathbf{a} \cdot t dl$$

与路径无关. 取两点 $M_0(x_1, x_2, x_3), M(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3)$, 用它们之间的直线段为积分路径, 则由积分中值定理知, 有点 $P(x_1 + \theta \Delta x_1, x_2, x_3) (0 < \theta < 1)$, 使得

$$u(M) - u(M_0) = \int_{M_0 M} \mathbf{a} \cdot t dl = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x_1} a_1 dx_1 = a_1(P) \Delta x_1$$

所以

$$\frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta x_1} = a_1(P)$$

上式中令 $\Delta x_1 \rightarrow 0$, 得 $\frac{\partial u}{\partial x_1} = a_1$.

类似地, 可得 $\frac{\partial u}{\partial x_2} = a_2, \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_3$, 所以 $\mathbf{a} = \nabla u$.

设场 $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 l_i a_i(x, y, z)$, 满足 $\mathbf{a} = \nabla u$ 的纯量函数 “称作场 \mathbf{a} 的

位势。由高等数学知， a 的位势 u 可用如下公式算得

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x a_1(x, y_0, z_0) dx_1 + \int_{y_0}^y a_2(x, y, z_0) dx_2 + \int_{z_0}^z a_3(x, y, z) dx_3 + c \quad (1.14)$$

例 1.5 求证：矢量场 $r = l_1(x-x_0) + l_2(y-y_0) + l_3(z-z_0)$ 是无旋场，并求其位势。

解 由例 1.1 知， $\nabla \times r = 0$ ，故 r 是无旋场。按公式 (1.14)，得其位势为

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{x_0}^x (x-x_0) dx + \int_{y_0}^y (y-y_0) dy + \int_{z_0}^z (z-z_0) dz + c \\ &= \frac{1}{2} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2] + c = \frac{1}{2} r^2 + c \end{aligned}$$

三、无源场及其矢势

满足方程 $\nabla \cdot a = 0$ 的矢量场 a 称为无源场。

定理 1.2 在空间区域 V 内，矢量场 a 为无源场的充要条件是：存在矢量函数 $b = b(M)$ ，使得 $a = \nabla \times b$ 。

证 充分性。设存在矢量函数 $b = b(M)$ ，使得 $a = \nabla \times b$ 。则由三度运算性质 (17)，有

$$\nabla \cdot a = \nabla \cdot (\nabla \times b) = 0$$

所以 a 为无源场。

必要性。设 a 为无源场。取

$$b_1 = 0, \quad b_2 = \int a_3 dx_1, \quad b_3 = -\int a_2 dx_1, \quad b = l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3$$

则有

$$\frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3} = -\int \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \stackrel{\nabla \cdot a=0}{=} \int \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 = a_1$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial x_3} - \frac{\partial b_3}{\partial x_1} = a_2, \quad \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = a_3$$

故 $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}$.

定理中的 \mathbf{b} 称作 \mathbf{a} 的矢势 .

定理 1.3 在空间区域 V 内, 设矢量场 \mathbf{a} 为无源场, 矢量 \mathbf{b} 是 \mathbf{a} 的矢势. 则矢量 \mathbf{c} 也是 \mathbf{a} 的矢势的充要条件是: 存在纯量函数 u , 使得 $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \nabla u$.

证 设 \mathbf{c} 也是 \mathbf{a} 的矢势. 则

$$\nabla \times (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \nabla \times \mathbf{c} - \nabla \times \mathbf{b} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$$

故 $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ 是无旋场, 由定理 1.1 知 存在纯量函数 u , 使得 $\mathbf{c} - \mathbf{b} = \nabla u$, 即 $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \nabla u$.

反过来, 设存在纯量函数 u 使得 $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \nabla u$. 则

$$\nabla \times \mathbf{c} = \nabla \times (\mathbf{b} + \nabla u) = \nabla \times \mathbf{b} + \nabla \times (\nabla u) = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

故 \mathbf{c} 也是 \mathbf{a} 的矢势 .

例 1.6 求证: 矢量场 $\mathbf{a} = \nabla \frac{1}{r}$ 是无源场, 并求其全部矢势

证 由例 1.3 知, $\nabla \cdot \mathbf{a} = \nabla^2 \frac{1}{r} = 0$, 所以 \mathbf{a} 是无源场. 又

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \nabla \frac{1}{r} &= l_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} + l_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} + l_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \\ &= l_1 \frac{-(x-x_0)}{r^3} + l_2 \frac{-(y-y_0)}{r^3} + l_3 \frac{-(z-z_0)}{r^3} \end{aligned}$$

按照定理 1.2 的证明, \mathbf{a} 的一个矢势为

$$\mathbf{b} = I_2 \int \frac{-(z-z_0)}{r^3} dx - I_3 \int \frac{-(y-y_0)}{r^3} dx$$

由定理 1.3 知, \mathbf{a} 的矢势的一般表达式为

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} + \nabla u = I_2 \int \frac{-(z-z_0)}{r^3} dx - I_3 \int \frac{-(y-y_0)}{r^3} dx + \nabla u$$

其中, u 是任意可微纯量函数.

四、两类场方程

1. 设场 \mathbf{a} 的方程为

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{a} = f(M), \quad (M \in V) \end{cases}$$

其中 f 为已知纯量函数. 前一方程表示 \mathbf{a} 为无旋场, 故由定理 1.1 知, 存在纯量函数 $u=u(M)$, 使得 $\mathbf{a} = \nabla u$. 把它代入后一方程, 得

$$\nabla^2 u = f(M) \quad (1.15)$$

这样的方程叫做泊松 (Poisson) 方程, 从中解出 u 即可得 \mathbf{a}

2. 设场 \mathbf{a} 的方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{F}(M) \end{cases}$$

其中 $\mathbf{F} = \sum_{k=1}^3 I_k F_k$ 为已知矢量函数. 前一方程表示 \mathbf{a} 为无源场, 故由定理 1.2 知, 存在矢量函数 $\mathbf{b} = \mathbf{b}(M)$, 使得 $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}$. 又由定理 1.3 知, 任意纯量函数 u , 均使得 $\mathbf{c} = \mathbf{b} + \nabla u$ 也是 \mathbf{a} 的矢势, 即有

$$\nabla \cdot [\nabla \times (\mathbf{b} + \nabla u)] = 0$$

把 $\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{c}$ 代入后一方程, 得

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{c}) = \mathbf{F}$$

用三度运算公式 (21) ,得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{c}) - \nabla^2 \mathbf{c} = \mathbf{F}$$

为求得 \mathbf{c} , 设未知矢量 $\mathbf{c} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{l}_k c_k$ 满足 $\nabla \cdot \mathbf{c} = 0$, 则由上式 得

$$\nabla^2 c_1 = -F_1, \quad \nabla^2 c_2 = -F_2, \quad \nabla^2 c_3 = -F_3 \quad (1.16)$$

上面的方程组叫做 Poisson 方程组 , 从中解出 \mathbf{c} 即可得解

$$\mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b} = \nabla \times (\mathbf{c} - \nabla u)$$

Poisson 方程在以后的章节中将得到讨论 .

第三节 正交曲线坐标系下的 Hamilton 算子

许多物理问题可以通过恰当选取坐标系来化简 , 而这需要用本节所述的关于曲线坐标系的理论 .

一、曲线坐标系

矢量函数 $\mathbf{a} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{l}_k a_k(q_1, q_2, q_3)$ 的各个偏导数为

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{l}_k \frac{\partial a_k}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, 3)$$

设 $Ox_1x_2x_3$ 是直角坐标系 , $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ 依次是沿坐标轴 x_1, x_2, x_3 正向的单位矢量 . 设变换

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3) \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.17)$$

如果其雅可比 (Jacobi) 矩阵

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \frac{\partial x_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \end{bmatrix}$$

存在且可逆，则由数学分析知，存在逆变换

$$q_j = q_j(x_1, x_2, x_3) \quad (j=1, 2, 3)$$

这时，空间中点可用坐标 $x_1 x_2 x_3$ 表示，也可用坐标 $q_1 q_2 q_3$ 表示。动点 P 的向径

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= OP = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 \\ &= l_1 x_1(q_1, q_2, q_3) + l_2 x_2(q_1, q_2, q_3) + l_3 x_3(q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

称为终端矢量。如果变换 (1.17) 中的三个函数不全是线性函数，则当固定 q_2 与 q_3 ，而让 q_1 变动时，点 P 便画出一条曲线，此曲线称作坐标曲线 q_1 。类似地，有坐标曲线 q_2 与 q_3 ，故称 $q_1 q_2 q_3$ 是由变换 (1.17) 确定的曲线坐标系，如图 1-1 所示。

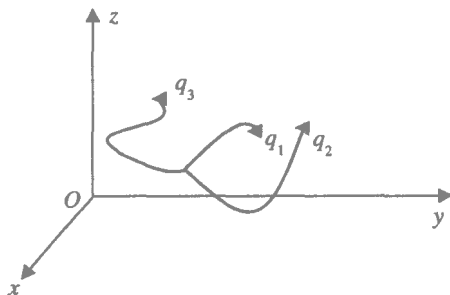


图 1-1

把终端矢量 \mathbf{r} 对 q_j 求偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j}(l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3) \\ &= l_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + l_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + l_3 \frac{\partial x_3}{\partial q_j} = e_j h_j\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}h_j &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_j}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_j}\right)^2} \\ e_j &= \frac{1}{h_j} \left(l_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_j} + l_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_j} + l_3 \frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right) \quad (j=1, 2, 3) \quad (1.18)\end{aligned}$$

h_1, h_2, h_3 称作尺度因子, 矢量组 e_1, e_2, e_3 称作活动坐标架 (或活动基), 尺度因子与活动坐标架均随点而变. 不难验证, 活动坐标架 e_1, e_2, e_3 是规范组, 即有

$$e_i \cdot e_i = 1 \quad (i=1, 2, 3)$$

设

$$\begin{aligned}a_{ij} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, \quad \tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{h_j} \quad (i, j=1, 2, 3) \\ A &= \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = (a_{ij})_{3 \times 3}\end{aligned}$$

$$\tilde{A} = A \begin{bmatrix} h_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & h_3^{-1} \end{bmatrix} = (\tilde{a}_{ij})_{3 \times 3}$$

则由式 (1.18), 得

$$(e_1, e_2, e_3) = (l_1, l_2, l_3) \tilde{A} \quad (1.19)$$

上式即为在变换 (1.17) 下的基变换公式, A 即为从基

l_1, l_2, l_3 到活动基 e_1, e_2, e_3 的过渡矩阵

二、曲线坐标系的正交性

设 $q_1 q_2 q_3$ 是由变换 (1.17) 所确定的曲线坐标系, 如果它的活动坐标架 e_1, e_2, e_3 在任意点处总是正交组, 即若

$$\begin{aligned} e_i \cdot e_j &= \left(\frac{1}{h_i} \sum_{k=1}^3 l_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) \cdot \left(\frac{1}{h_j} \sum_{k=1}^3 l_k \frac{\partial x_k}{\partial q_j} \right) \\ &= \frac{1}{h_i} \frac{1}{h_j} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \frac{\partial x_k}{\partial q_j} = 0 \quad (i \neq j) \end{aligned}$$

则称坐标系 $q_1 q_2 q_3$ 是正交的, 亦称变换 (1.17) 是正交的.

定理 1.4 $q_1 q_2 q_3$ 是正交曲线坐标系等价于过渡矩阵 A 是正交矩阵, 即

$$\tilde{A}^T = \tilde{A}^{-1}$$

证 由下式即

$$\tilde{A}^T \tilde{A} = \left(\sum_{k=1}^3 \frac{a_{ki} a_{kj}}{h_i h_j} \right)_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{bmatrix}$$

二维空间的情形与上述类似.

例 1.7 平面极坐标变换为

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta < 2\pi)$$

如图 1-2 所示, 求其尺度因子及活动坐标架, 并证明此变换所确定的坐标系 $r\theta$ 是正交曲线坐标系.