第 一 章
引　　论

本章在§1中介绍有关数学物理方程的一些基本概念及这门学科的概况，在§2中对二自变数的二阶线性偏微分方程讨论了分类及化标准型的问题。

§1　引　　言

1.1　偏微分方程及其基本概念

客观世界中的物理量(例如温度、速度等等)一般是随时间及空间位置的变化而变化的，因此总可以用以时间坐标 t 及空间坐标 $x=(x_1, x_2, x_3)$ 为自变数的函数 $u(t, x)=u(t, x_1, x_2, x_3)$ 来表示。这些物理量的变化所服从的规律又往往用它们关于时间坐标及空间坐标的某些阶变化率之间的一些确定的关系式来表示，即可写为函数 u 关于 t 及 x_1, x_2, x_3 的某些阶偏导数之间的一些关系式。例如，由热量平衡原理，一个均匀、各向同性传热体的温度分布函数 $u=u(t, x_1, x_2, x_3)$ 应该满足下面的关系式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (a>0\text{ 常数}); \qquad (1.1)$$

由此，该物体的一个稳定的温度分布 $u=u(x_1, x_2, x_3)$(即设温度不随时间 t 变化，达到稳定状态)就应满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=0. \qquad (1.2)$$

此外，由牛顿第二定律可知，对于一根两端固定而张紧着的均匀弦，当它在平衡位置附近作微小横向振动时，其上各点的位移 $u=u(t, x)$ 应满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad (a>0\text{ 常数}) \tag{1.3}$$

等等. 这种包含未知函数及其偏导数的等式，统称为偏微分方程. 在不至引起误解的情况下，在本书中有时也简称其为方程或微分方程.

一般地说,若自变数为 $x_1, x_2, \cdots, x_n\ (n\geqslant 2)$,未知函数为 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$,则关于 u 的偏微分方程的一般形式是

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, Du, \cdots, D^N u)=0, \tag{1.4}$$

其中 F 是其变元的已知函数,Du 简记 u 的一阶偏导数：

$$Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right),$$

而一般地,$D^k u(k=2, \cdots, N)$简记 u的 k 阶偏导数：

$$D^k u=\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}\cdots\partial x_n^{k_n}},\ k_1+k_2+\cdots k_n=k,\quad k_1, \cdots, k_n\geqslant 0\text{ 整数}\right). \tag{1.5}$$

在偏微分方程中所含的未知函数 u的偏导数的最高阶数，称为偏微分方程的阶数.于是,若 F 的确含有 $D^N u$,则(1.4) 的阶数为 N. 此外,在自变数的个数 $n=1$ 时，(1.4)就化为一个常微分方程，而偏微分方程则对应于$n\geqslant 2$ 的情况。

什么是偏微分方程的解呢？设 Ω 是自变数空间$(x_1, \cdots, x_n)$中的一个区域,如果 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$是在 Ω 中定义的足够光滑(例如 N 次连续可微)的函数,且将它代入(1.4)式能使其在 Ω 中恒等地成立，则称 u是该方程在 Ω 中的一个经典意义下的解，称为经典解. 以后可以看到，偏微分方程的解的概念可以用各种各样的方法加以扩充，但上述经典解的概念是最易于为人理解的，也是本书中著重讨论的对象. 今后,如无特殊需要,我们就将经典解称为解.

在一些情况下,未知函数的个数可以不止一个,它们所满足的偏微分方程的个数也不止一个. 这样，由若干个偏微分方程联立在一起,就构成了偏微分方程组。流体力学、弹性力学、电动力学等等的基本方程都是偏微分方程组。在通常所遇到的偏微分方程组

中，方程的个数和未知函数的个数大都是相等的。但有时也会出现方程个数大于未知函数个数（超定）的情况，或是方程个数小于未知函数个数(欠定)的情况.

如果在一个偏微分方程（组）中，所有的未知函数及其一切偏导数都是线性地出现的，则称这个偏微分方程（组）为线性偏微分方程(组)否则，就称为非线性偏微分方程(组). 线性偏微分方程(组)通常是比较易于进行研究的，已经对它建立了系统的理论，并不断在深入向前发展. 而对非线性偏微分方程(组)的研究则一般要困难得多，解的性质和线性情形也有较大的不同，很难用一个统一的方法来加以处理，其研究往往更紧密地结合着相应的物理模型，用不同的方法来处理各种不同性质的问题. 但是，很多意义重大的问题归结为非线性偏微分方程的研究（例如，流体力学方程组就是非线性的），而且随着研究的深入，有些原先可以用线性偏微分方程来近似描述的问题，也必须考虑非线性项的影响，而化为非线性偏微分方程的问题. 因此，从对线性方程的研究逐步发展到对非线性方程的研究，也是当前偏微分方程发展的一个重要的特点.

对于非线性偏微分方程（组）来说，为了深入研究的需要和说明的方便，还可以进一步区分出一些比较特殊的类型. 如果所考察的非线性偏微分方程（组）对未知函数的一切最高阶偏导数是线性的，则称其为拟线性偏微分方程(组). 这时，方程(组)中含有未知函数的一切最高阶偏导数的部分，称为此方程(组)的主部(在线性方程(组)的情形，也可以类似地定义主部). 对于拟线性方程（组），其主部中未知函数的最高阶偏导数前的系数除了可能依赖于自变数外，还可能依赖于未知函数及其较低阶的偏导数。特别，若这些系数只是自变数的函数，而和未知函数及其偏导数无关，则称此偏微分方程(组)为半线性偏微分方程(组）。

这样，例如说

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.6}$$

是一阶(常系数)的线性偏微分方程；

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.7}$$

是一阶拟线性方程；哈密顿-雅科比 (Hamilton-Jacobi) 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{1.8}$$

是一阶非线性方程，其中 f 是一个已知的非线性函数.而单复变解析函数 $F(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ $(z=x+iy)$ 的实部和虚部所满足的柯西一黎曼 (Cauohy-Riemann) 方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \tag{1.9}$$

是一阶(常系数)的线性偏微分方程组.

在二阶的情形，方程(1.1)(称为热传导方程),方程(1.2)(称为调和方程或拉普拉斯 (Laplace)方程)及方程(1.3)(称为弦振动方程）都是二阶常系数线性方程；反应扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=f(u) \tag{1.10}$$

是二阶的半线性方程：而非线性弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right), \tag{1.11}$$

其中

$$k(v)=\frac{v}{\sqrt{1+v^2}},$$

则是二阶拟线性方程,等等.

对高阶的方程及方程组，也可以举出类似的例子来说明上述的概念．例如描述色散波的 KdV(Korteweg-de Vrie)方程

$$u_t+uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.12}$$

为三阶半线性方程，等等.

1.2 数学物理方程的研究对象

偏微分方程理论的形成和发展是和物理学以及其他自然科

学．技术科学的发展密切相关，并且互相促进和推动的 很多重要的物理、力学学科的基本方程本身就是偏微分方程。偏微分方程理论的研究成果也常常用来描述、解释或预见各种自然现象，并被应用于各门科学和工程技术．同时，偏微分方程的研究也和分析、几何、代数、拓扑等于他数学分支的发展紧密联系、互相推动。因此，偏微分方程这门学科是数学理论和实际应用之间的一个重要的桥梁．从这个意义上说，各种各样的偏微分方程，其作用和地位是不相同的，不应一视同仁地加以对待． 那些和物理学以及其他自然科学、技术科学密切有关的偏微分方程应该受到更多的重视，偏微分方程的实际发展状况也充分地反映了这一点．所谓数学物理方程，就主要指从物理学以及其他自然科学、技术科学中所产生的偏微分方程，有时也包括与此有关的积分方程、微分积分方程，甚至常微分方程等．

容易理解，数学物理方程这个概念的内涵，不是一成不变，而是随着历史的发展而发展的． 微积分理论形成后不久，从十八世纪初开始，人们就开始结合物理、力学问题来研究偏微分方程．最早研究的几个方程就是弦振动方程(1.3)、热传导方程(1.1)及调和方程(1.2)．其中弦振动方程是达朗贝尔（d'Alembert)，欧拉(Euler)，丹尼尔·贝努利(Daniel Bernoulli)等人首先系统加以研究的；对于二维或三维的波动现象（例如薄膜的振动和声音的传播）可以得到类似的方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)=0 \quad (a>0\ 常数) \qquad (1.13)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right)=0 \quad (a>0\ 常数), \qquad (1.14)$$

统称为波动方程．傅立叶(Fourier) 为了研究热传导问题首先引入了后来被称为傅立叶级数的数学方法，这不仅在物理学中很快得到广泛的应用，而对其数学基础的研究则吸引了十九世纪一些最伟大的数学家如狄利克雷 (Dirichlet)、黎曼、维尔斯特拉斯(Weierstrass)及康托尔 (Cantor)，并最终导致了集合论的问世，在分

析中引起了一场革命. 至于调和方程，不仅可以用来表示稳定的温度场，而且可以用来表示牛顿引力场中的引力势、弹性薄膜的平衡、不可压缩流体的定常无旋流动等等；此外，单复变解析函数的实部和虚部也满足调和方程.这个例子生动地说明了一个事实：往往同一个偏微分方程可以用来描述性质上颇不相同的物理现象.这也显示了偏微分方程的理论研究成果得到广泛应用的可能性.这三个方程，即波动方程、热传导方程及调和方程，不仅来源于不同的物理模型，而且在数学上也具有各自的特点，它们分别是所谓的二阶双曲型方程、二阶抛物型方程及二阶椭圆型方程的最典型的代表. 这三种类型的方程是最早的也是研究得最充分的数学物理方程.

随着力学、物理学的发展，到了十八世纪后期，在连续介质力学中，利用质量、动量及能量的守恒律，已能将流体的运动规律用一组偏微分方程来表示. 在考虑到流体的粘性时，它称为纳维-斯托克斯 Navier-Stokes) 方程组 而在不计流体的粘性时，则称为欧拉方程组. 它们都是拟线性的方程组，在此时期，弹性体的运动规律也能用弹性力学方程组或称圣维南 (Saint Venant) 方程组来表示：它是一个线性的偏微分方程组. 到了十九、二十世纪，随着物理学的进一步发展，人们又陆续发现了描述电磁场运动规律的麦克斯韦尔(Maxwell)方程组(它是电动力学的基本方程组)，描述微观粒子运动规律的薛定谔 (Schrödinger) 方程及狄拉克(Di-[redacted])方程组(它们是量子力学的基本方程)，广义相对论中确定引力场的基本方程　爱因斯坦(　方程以及在基本粒子研究中有重大作用的规范场理论的基本方程　杨 米尔斯　方程等等. 这些方程(组) 扩大了数学物理方程研究的范围，在相应的力学、物理学科中都起着重要的作用.

此外，对辐射现象、中子迁移及气体分子运动的研究，又分别导至了辐射迁移方程、中子迁移方程和玻尔兹曼 (Boltzmann) 方程　它们都是微分积分方程，也是当前数学物理方程中的重要的研究对象

不仅如此，由于物理现象的复杂性，往往是好几种过程同时发生，并且相互发生作用，这使相应的数学物理方程具有更加复杂的结构，并为数学物理方程开拓了愈来愈广阔的研究范围.例如化学反应过程和扩散过程的联合作用，就导至反应扩散方程；考虑带电流体在电磁场中的运动，就有电磁流体力学方程组，它是麦克斯韦尔方程组与流体力学方程组的耦合；考虑高温流体的运动状态时必须同时考虑辐射的影响，就导至辐射流体力学方程组等等.

近年来,在力学、物理学、化学、生物学以及一些社会科学学科中以及数学的一些其它分支（如整体微分几何学、多复变函数论……）中又不断地归结出一些新的重要的偏微分方程(组),使数学物理方程的研究领域不断扩大，愈来愈得到人们的重视. 同时,由于在数学物理方程中所面临的数学问题多样而复杂，所以不断促进着许多相关联的数学分支(如泛函分析、复变函数、微分几何、计算数学等)的发展.并从中引进了许多有力的数学工具来解决数学物理方程中的有关问题.

1.3 数学物理方程的研究内容

研究数学物理方程的中心问题自然是求解或是研究解的性质，以使我们能对于相应的自然现象有更深入的认识，甚至预见出新的自然现象；或者对于相应的工程设计能提供必要的数据，保证安全可靠并且高效率的完成任务.

但是，因为所考察的数学物理方程只反映了相应的物理现象中的一般规律，为了具体确定一个物理状态，即为了确定一个数学物理方程的解，单靠方程本身是不行的，还必需添加一定的附加条件,称为定解条件.例如,为了确定一个物体的温度分布状况,除了应利用热传导方程以外，还必须知道该物体的初始温度状况（初始条件)以及其在边界上的受热状况(边界条件),这里的初始条件及边界条件就构成了所要求的定解条件. 数学物理方程再加上相应的定解条件，就构成了一个定解问题. 我们要求的将是定解问题的解，即要求一个适当光滑的函数，它不仅在所考察的区域中满足

微分方程,而且满足所给的定解条件.

我们将要看到，对于不同类型的数学物理方程，其定解条件以及定解问题的提法通常是不同的，这可以从相应的物理现象中得到解释，也能从数学的角度按照一定的准则来加以说明. 这些准则常用的是解的存在性（即定解问题的解是否存在），解的唯一性（即定解问题的解如果存在，是否只有一个，还是具有一定的自由度)以及解对于用来决定解的资料(例如初始条件、边界条件、方程中的已知函数甚至求解区域等等）的连续依赖性、简称解的稳定性（即在这些资料作很小的变化时，解的变化是否也相应地很小).这三者统称为定解问题的适定性.

如果一个定解问题的解存在、唯一并连续地依赖于定解条件，则称这个定解问题是适定的. 通常,对于决定性的现象来说,一个基本上正确地（但总是近似地）描述所考察的物理模型的微分方程定解问题,总应该是适定的. 这是因为，所考察的物理模型在一定的条件下总应该具有唯一确定的状态，因此，相应的微分方程的定解问题的解应该是存在、唯一的. 此外,因为在实际测量中误差总是不可避免的，如果例如说定解条件的微小误差会引起解的巨大变化，所考察的定解问题就不可能给出所考察的物理模型的那怕是近似的解， 因而不可能正确地描述所考察的物理模型，而失去任何实际的意义. 因此,在求解微分方程定解问题时,先对定解问题的适定性进行一定的考察，可以帮助我们初步判定所考察的定解问题是否合理，所附加的定解条件是否适当，以及使我们了解对怎样的微分方程通常应该提出怎样的定解条件，对求解起一定的指导作用. 适定性的概念是阿达马(Hadamard)首先提出来的,对偏微分方程的研究曾起了并直到现在仍继续起着重要的指导作用. 但是，对偏微分方程不能仅局限于研究定解问题的适定性，还要研究解的各种性质以及各种有效的求解方法等等. 此外,现在已经知道有不少在应用上有重大意义的问题（例如在地球物理探矿中所提出的问题）是不适定的，对它们的研究也是很有意义的.

§2 二自变数的二阶线性方程的分类及标准型

在本书中，我们研究的重点将是象热传导方程、调和方程及波动方程那样一些二阶线性偏微分方程．这三个方程分别对应于不同的物理模型，在定解问题的提法、解的性质等方面具有许多不同的特点．现在我们考察二自变数的一般的二阶线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f, \tag{2.1}$$

其中 a_{ij}, b_i $(i, j=1, 2)$, c及 f 都是自变数 (x, y) 在区域 Ω 中的连续可微函数，且 a_{11}, a_{12} 及 a_{22} 不同时为零．我们希望通过自变数的适当的可逆变换及未知函数的适当的可逆线性变换，将方程(2.1)的形式进行化简，并在此基础上对方程进行分类．由此可以看到前述的热传导方程、调和方程及波动方程恰恰对应于方程(2.1)的三种不同的类型，而且分别是它们的最典型的代表．顺便指出，这种通过自变数或未知函数的可逆变换将方程的形式化简的办法，在常微分方程中曾经大量使用过，它也是研究偏微分方程的一个常用的方法．

2.1 方程的化简

引入自变数变换

$$\xi=\xi(x, y),\ \eta=\eta(x, y). \tag{2.2}$$

假设 $\xi(x, y)$ 及 $\eta(x, y)$ 是二次连续可微函数，且雅科比行列式

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix} \tag{2.3}$$

在区域 Ω 中的某一点(x_0, y_0)不为零．根据隐函数存在定理，变换 (2.2) 至少在(x_0, y_0) 的一个邻域中是可逆的．现在试图利用这个变换将方程 (2.1)（至少在(x_0, y_0)的一个邻域中）进行化简．

由复合函数的求导法则，有

$$
\begin{cases}
u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\
u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\
u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y \\
\qquad + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\
u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{cases} \tag{2.4}
$$

于是，在变换(2.2) 下，以(x, y)为自变数的方程(2.2)就化为如下的以(ξ, η)为自变数的方程：

$$
\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + \bar{c}u = \bar{f}, \tag{2.5}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\bar{a}_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\
\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\
\bar{a}_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{cases} \tag{2.6}
$$

而$\bar{b}_1$，$\bar{b}_2$，$\bar{c}$及$\bar{f}$的具体形式从略.

为了化简方程，要适当选择变换(2.2)，使方程(2.5)的主部能化成最简单的形式. 由于(2.6)中的第三式和第一式的形式完全相同，仅仅是将第一式中的ξ换成了η，因此，如果能求得方程

$$
a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{2.7}
$$

的两个函数无关的解$\varphi = \varphi_1(x, y)$及$\varphi = \varphi_2(x, y)$，就可将变换(2.2)取为

$$
\begin{cases}
\xi = \varphi_1(x, y), \\
\eta = \varphi_2(x, y),
\end{cases} \tag{2.8}
$$

从而在方程(2.5)中，系数$\bar{a}_{11}$及$\bar{a}_{22}$均化为零，而其主部仅包含一项$2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta}$，这就使方程(2.1)的形式得到极大的简化. 下面来具体考察这种做法的可能性.

方程(2.7)是关于φ的一阶非线性偏微分方程，它的求解可以化为求解如下的常微分方程：

$$
a_{11}dy^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}dx^2 = 0 \tag{2.9}
$$

在(x, y)平面上的积分曲线问题.

事实上，若$\varphi(x, y) = C$是常微分方程(2.9)的一个初积分，

它表示一族积分曲线,且成立 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$(即不考虑奇点),则由于沿其中的任一积分曲线成立

$$\varphi_x dx+\varphi_y dy=0, \tag{2.10}$$

从而由 (2.9)式可得沿其中的任一积分曲线成立 (2.7)式；再注意到积分曲线族 $\varphi(x, y)=C$ 充满 (x, y) 平面上的一个区域，于是 $\varphi=\varphi(x, y)$是偏微分方程(2.7) 的一个解. 反之,也容易证明,若 $\varphi=\varphi(x, y)$ 是偏微分方程 (2.7)的一个解,且成立 $\varphi_x^2+\varphi_y^2\neq 0$, 则 $\varphi(x, y)=C$ 必为常微分方程 (2.9)的一个初积分，在(x, y)平面上表示一族积分曲线.

我们称方程(2.9)为方程 (2.1)的特征方程，并称其积分曲线为方程 (2.1)的特征线.

为了求方程(2.9)的积分曲线,记

$$\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}. \tag{2.11}$$

由(2.6)式不难证明,在自变数可逆变换(2.2)下,若记

$$\bar{\Delta}=\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22},$$

则成立

$$\bar{\Delta}=\Delta J^2,$$

其中

$$J=\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$$

为变换的雅科比行列式. 因此，Δ 的符号是自变数可逆变换下的不变量.

现在分以下几种情形分别进行讨论：

(1) 在点(x_0, y_0)的一个邻域中 $\Delta>0$. 此时方程(2.9)可分解为如下的两个不同的实方程

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \end{cases} \tag{2.14}$$

由常微分方程的存在定理，相应地存在着两族不相同的实积分曲线 $\varphi_1(x, y)=C$ 及 $\varphi_2(x, y)=C$；且由(2.10)、(2.14) 式可知变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,\ y),\\ \eta=\varphi_2(x,\ y)\end{cases}\tag{2.15}$$

的雅科比行列式不等于零．由上述，此可逆变换可将方程(2.5)中的 $\bar{a}_{11}$ 及 a_{22} 化为零．再注意到可逆的自变数变换决不能将一个二阶偏微分方程退化为一个一阶偏微分方程，因此此时必成立 $a_{12}\neq 0$ (这一点也可从(2.13)式得出)．于是此时(2.5)可化为

$$u_{\xi\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D\tag{2.16}$$

的形式，其中 A、B、C、D 均为 ξ, η 的已知函数，其具体表达式从略．

如果在(2.16)中再作自变数的可逆线性变换

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{1}{2}(s+t),\\ \eta=\dfrac{1}{2}(s-t),\end{cases}\tag{2.17}$$

则方程(2.1)就化为

$$u_{ss}-u_{tt}=A_1u_s+B_1u_t+C_1u+D_1\tag{2.18}$$

的形式，其中 A_1, B_1, C_1, D_1 为 s, t 的已知函数，特别在 A_1, B_1, C_1, $D_1\equiv 0$ 时，就得到弦振动方程．

(2) 在点 $(x_0,\ y_0)$ 的一个邻域中 $\Delta\equiv 0$．此时 a_{11} 及 a_{22} 必同号，不妨设 a_{11}, $a_{22}>0$ (否则用 -1 乘方程(2.1)的两端就化为所考察的情形)，而(2.9)化为一个一阶实方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}},\tag{2.19}$$

因此，只有一族实特征曲线，记为 $\varphi_1(x,\ y)=C$．取 $\xi=\varphi_1(x,\ y)$，再适当选一个函数 $\eta=\varphi_2(x,\ y)$，使 φ_2 与 φ_1 函数无关，则作变换

$$\begin{cases}\xi=\varphi_1(x,\ y),\\ \eta=\varphi_2(x,\ y),\end{cases}$$

就有 $\bar{a}_{11}\equiv 0$．但由于此时 $\Delta\equiv 0$，由(2.13)式，有 $\bar{\Delta}\equiv 0$，从而也有 $\bar{a}_{12}\equiv 0$．这样，就可将方程(2.1)化为

$$\bar{a}_{22}u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D$$

的形式．由于此时 $\bar{a}_{22}$ 一定不为零，故方程就化为

$$u_{\eta\eta}=A_1u_\xi+B_1u_\eta+C_1u+D_1 \tag{2.20}$$

的形式,其中 A_1, B_1, C_1, D_1 为 (ξ, η) 的已知函数.

在方程(2.20)中，还可再作未知函数的可逆线性变换

$$v=ue^{-\frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta}B_1(\xi,\ \tau)d\tau} \tag{2.21}$$

就得到关于 v 的方程

$$v_{\eta\eta}=A_2v_\xi+C_2v+D_2, \tag{2.22}$$

其中不再出现对 η 的一阶偏导数项. 特别在 $A_2\equiv1, C_2, D_2\equiv0$ 时，就得到热传导方程.

(3) 在点(x_0, y_0)的一个邻域中 $\Delta<0$. 此时不存在实的特征线,方程(2.9)的初积分如果存在只能是复的函数. 假设

$$\varphi(x, y)=\varphi_1(x, y)+i\varphi_2(x, y)=C \tag{2.23}$$

是(2.9)的一个初积分,而 $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ 均为实函数,于是 $\varphi=\varphi(x, y)$ 满足方程(2.7)[注].

为了限于在实的范围中考虑问题，我们作如下的自变数变换

$$\begin{cases}\xi=\mathrm{Re}\,\varphi(x, y)=\varphi_1(x, y),\\ \eta=I_m\varphi(x, y)=\varphi_2(x, y).\end{cases} \tag{2.24}$$

容易证明，这是一个可逆的变换. 事实上,此时由(2.14)及(2.10)式可得

$$a_{11}\varphi_x=-(a_{12}+i\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2})\varphi_y. \tag{2.25}$$

分离实部与虚部,得

$$\begin{aligned}a_{11}\xi_x&=-a_{12}\xi_y+\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\eta_y,\\ a_{11}\eta_x&=-a_{12}\eta_y-\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\xi_y.\end{aligned} \tag{2.26}$$

因为假设 $\Delta<0$,故 $a_{11}\neq0$,从而变换(2.24)的雅科比行列式为

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}=\frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}}{a_{11}}(\xi_y^2+\eta_y^2). \tag{2.27}$$

它不能为零. 否则就有 $\xi_y=\eta_y=0$, 再由(2.26)就得到 $\xi_x=\eta_x=0$, 从而 $\varphi_x=\varphi_y=0$,这与 $\varphi(x, y)=C$ 是初积分的要求不符. 这就证

[注] 在系数 a_{11}, a_{12} 及 a_{22} 是 (x, y) 的解析函数时，利用常微分方程的解析理论,可以知道这样的初积分总是存在的. 在系数非解析的情形，可以证明能直接从下面的(2.28)式求出 $\xi=\varphi_1(x, y)$ 及 $\eta=\varphi_2(x, y)$,因此以下的讨论仍有效.

明了变换(2.24)是一个可逆的自变数变换.

由于 $\varphi=\xi+i\eta$ 满足方程(2.7)，代入后再将实部与虚部分开，就得到

$$\begin{cases} a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2, \\ a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=0, \end{cases} \tag{2.28}$$

即

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}, \\ \bar{a}_{12}=0. \end{cases} \tag{2.29}$$

再注意到 $a_{11}=a_{22}$ 此时不可能为零,因此方程(2.1)就化为

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=Au_\xi+Bu_\eta+Cu+D \tag{2.30}$$

的形式,其中 A, B, C, D 是 (ξ, η) 的已知函数,具体表达式从略.特别在 $A, B, C, D\equiv 0$ 时,就得到调和方程.

2.2 方程的分类

从上面的讨论知道,由(2.11)式引入的、由方程主部的系数所组成的判别式 Δ 的符号在方程的化简中起着重要的作用，据此我们可以将方程加以分类.

若在区域 Ω 中的一点 (x_0, y_0), 满足

$$\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0, \tag{2.31}$$

则称方程(2.1)在此点 (x_0, y_0) 为双曲型的;若在点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0, \tag{2.32}$$

则称方程(2.1)在此点为抛物型的；若在点 (x_0, y_0) 满足

$$\Delta\equiv a_{12}^2-a_{11}a_{12}<0, \tag{2.33}$$

则称方程(2.1)在此点为椭圆型的.

这样,在区域 Ω 中的任一点,方程(2.1)必属于而且只属于上述三种类型之一，且其类型完全由方程主部中的系数决定，与非主部中的系数无关.

如果考察整个区域 Ω, 就有：

(1) 若在 Ω 中的每一点,方程(2.1)都是双曲型,即在 Ω 中处处成立(2.31), 就称方程在区域 Ω 中为双曲型，简称为双曲型方

程．弦振动方程就是一个双曲型方程．

(2) 若在 Ω 中的每一点，方程(2.1)都是抛物型，即在 Ω 中处处成立(2.32)，就称方程在区域 Ω 中为抛物型，简称为抛物型方程．一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \quad (a>0\ \text{常数}) \tag{2.34}$$

就是一个抛物型方程．

(3) 若在 Ω 中的每一点，方程(2.1)都是椭圆型，即在 Ω 中处处成立(2.33)，就称方程在区域 Ω 中为椭圆型，简称为椭圆型方程．二维调和方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.35}$$

就是一个椭圆型方程．

但除上述三种情况外，由于在 Ω 中的不同的点，方程可以有不同的类型，因此在整个区域 Ω 上考察，还可能出现以下的一些情况；

(4) 若在 Ω 中的一部分区域上方程 (2.1) 为双曲型 $(\Delta>0)$，在另一部分区域上方程为椭圆型 $(\Delta<0)$，于是，由连续性，在这两个区域的分界线上，方程(2.1)必为抛物型 $(\Delta=0)$，这种类型的方程称为混合型方程．例如：脱里谷米(Tricomi)方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.36}$$

在上半平面 $y>0$ 为椭圆型，在下半平面 $y<0$ 为双曲型，而在 $y=0$ 为抛物型．它在整个(x, y)平面上就是一个混合型方程，而 $y=0$ 通称为变型线．这种类型的方程在气体动力学的跨音速流理论中有重要的应用，因此混合型方程也同样很引起人们的重视．

(5) 若在 Ω 中的一部分区域上方程 (2.1) 为双曲型，在其余部分为抛物型，而在 Ω 中没有椭圆型的点，则方程称为退缩双曲型方程．例如脱里谷米方程在下半平面 $y\leqslant 0$ 为一个退缩双曲型方程；又如方程

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.37}$$

在 $y\neq 0$ 时为双曲型，在 $y=0$ 时为抛物型，在任何包含 $y=0$ 的区域中均为退缩双曲型方程.

(6) 若在 Ω 中的一部分区域上方程 (2.1) 为椭圆型，在其余部分为抛物型，而在 Ω 中没有双曲型的点，则方程称为退缩椭圆型方程. 例如脱里谷米方程在上半平面 $y\geqslant 0$ 就是一个退缩椭圆型方程.方程

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{2.38}$$

在任何包含 $y=0$ 的区域中均为退缩椭圆型方程.

对于在一个区域 Ω 中为双曲型、抛物型或椭圆型的方程，可以用上一段的方法将方程进行化简，分别得到相应的方程 (2.16) 或 (2.18)、(2.20) 或 (2.22) 以及 (2.30)，称为这些方程的标准型. 必须注意，这种化标准型的方法一般说来只能在 Ω 中某一点 (x_0, y_0) 的邻域中有效，但在一些重要的特殊情况，所作的变换在整个区域 Ω 中都是可逆的，因此可以将方程在整个区域 Ω 中化为标准型. 因此，在具体将方程化为标准型时，我们必须注意其有效的范围是局部的还是遍及整个区域.

这儿必须注意，我们只能在具有确定类型的区域中用上述方法化标准型，因此例如对脱里谷米方程，我们只能分别在其双曲型区域及椭圆型区域中化标准型，而不能在整个混合型区域化标准型，也不能在变型线 $y=0$ (它不是一个区域！) 上化为抛物型方程的标准型。

下面我们再将方程在一点的分类准则从另一个角度来加以说明，以利于今后的推广. 引入方程 (2.1)的主部系数所组成的对称矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

并记其特征值为 ν_1 及 ν_2，则易知有

$$\nu_1\nu_2=\det A=-\Delta. \tag{2.40}$$

于是若方程在一点 (x_0, y_0)为双曲型，则 ν_1, ν_2 异号 若方程在点(x_0, y_0)为抛物型，则 ν_1, ν_2 中有一个为零(也只能有一个为零，因为 a_{11}, a_{12}, a_{22} 不同时为零)若方程在点(x_0, y_0)为椭圆型，则 ν_1, ν_2 同号.

引入二次型

$$Q(\lambda)=a_{11}\lambda_1^2+2a_{12}\lambda_1\lambda_2+a_{22}\lambda_2^2, \tag{2.41}$$

则方程在一点(x_0, y_0)的分类准则也可表述为 若二次型 $Q(\lambda)$ 为正定或负定，则方程为椭圆型；若 $Q(\lambda)$ 为退化，则方程为抛物型；若 $Q(\lambda)$不是正定或负定，又非退化，则方程为双曲型.

2.3 例

【例 2.1】 考虑方程

$$y^2u_{xx}+2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0.$$

其判别式 $\Delta\equiv0$，故为抛物型方程；但为使方程主部的系数不全为零，所考虑的区域应不包含坐标原点. 此时，相应的特征方程

$$y^2\,dy^2-2xy\,dx\,dy+x^2\,dx^2=0$$

可写为

$$(y\,dy-x\,dx)^2=0,$$

其初积分为

$$x^2-y^2=C.$$

于是可作自变数变换

$$\begin{cases}\xi=x^2-y^2,\\ \eta=\varphi_2(x, y),\end{cases}$$

这里 $\varphi_2(x, y)$ 只要选取得使变换为可逆即可，然而，从化简方程的角度应该选取尽可能简单的 φ_2 来达到要求. 由于所考察的区域不包含坐标原点，就可特别取 $\varphi_2=xy$, 而得可逆变换

$$\begin{cases}\xi=x^2-y^2,\\ \eta=xy.\end{cases}$$

此时有