电子科技大学研究生系列教材建设项目

数学物理方程

李明奇　田太心　主编

电子科技大学出版社

前　言

本书主要介绍了数学物理方程的一些基本概念及三种典型的二阶线性偏微分方程各种定解问题的一些常用解法：分离变量法、行波法、积分变换法、Green 函数法、保角变换法、变分法及非线性方程典型解法等。在这些解法中，重点放在分离变量法和 Green 函数法。本书还介绍了典型非线性方程的行波解、Hopf-Cole 变换、Hirota 方法、逆散射方法、Bäcklund 变换。另外，本书还讨论了两类特殊函数：Bessel 函数、Legendre 多项式，以及利用这两种特殊函数来解决数学物理中的一些定解问题。

不论是数学物理方程，还是特殊函数，其内容都是极其丰富的。作为一本理工科院校的研究生的教材及高年级本科生教材，如何根据理工科院校的特点，用较少的篇幅把一些最基本的概念和方法讲清楚，并能为较多的要求各不相同的专业所采用，这一直是编者棘手的难题。本书采用了以数学物理方程的常用解法为安排内容的线索，且在各种解法中着眼于求出“形式解”, 对三类方程部分典型定解问题的适定性进行讨论以简化内容。本书在内容上既兼顾经典理论与解法，又结合电子类专业的特殊性。例如，例题和习题选用了大量的诸如高频传输线、电磁场等的题目，并在安排上力求通俗易懂。目的是使理工科院校高年级相关专业本科生和工科研究生，通过本教材既能学到求解数理方程的基本方法，又注意与专业的相应联系，能为后继专业课和工程应用提供基本理论和处理方法。为了获得可视化效果，书中采用了部分 Matlab 作图。读者可以结合课程设计，学会用计算机处理书中的一些练习，对定解问题进行仿真，增强对物理问题及规律的理解。

本书的第二章、第三章、第四章、第七章、第八章、第九章由田太心编写；第一章、第五章、第六章、第十章及习题解答与附录由李明奇编写，全书由李明奇统稿。本书的讲义已在本科与研究生数学物理方程与特殊函数课程教学中使用多年，并经长期从事此门课程教学的扬华军教授、刘志旺教授、何浩法副教授审定。在本讲义的教学实践中，黄晋教授、钟尔杰副教授、杨春老师和覃思义老师提出了许多建设性修改意见。在编写和出版过程中还得到了电子科技大学应用数学学院黄廷祝教授、谢云荪教授的指导和支持，得到了电子科技大学研究生院的大力支持，编者对此深表谢意。由于编者水平有限，谬误之处在所难免，恳请读者给予批评、指正。

电子科技大学
2006 年 3 月

第一章　绪　　论

本章主要总结了在数学物理方程中常用的一些数学与物理基础知识：常微分方程与积分方程基础、基本积分公式、场论基本概念及常用物理规律。数理方程主要讨论波动方程、热传导方程、Poisson 方程的建立及定解问题。这三类基本方程分别属于二阶线性偏微分方程中的双曲型、抛物型、椭圆型偏微分方程。由于偏微分方程是多元函数微分方程问题，其求解在许多情况下需要运用常微分方程的方法。为此，本章总结了几类常用的常微分方程解法及几类特殊的常微分方程。同时，对于那些不能求解的方程，还介绍了微分方程定性分析基础：方程解的稳定与不稳定性。另外，对数学物理方程的建立与求解过程中非常重要的三个基本积分公式：Green 公式、Strokes 公式、Gauss 公式，场论中的两个重要物理量：散度和旋度，以及描述向量场规律的 Helmholtz 定理都作了简单介绍。为了运算方便，第四节给出了一些常用算符，可以简化数理方程求解过程的推导。最后一节中，给出了一些常用的物理规律，方便以后泛定方程的建立。

1.1　常微分方程基础

这一节，主要讨论几类特殊常微分方程的解法：一阶微分方程、二阶非齐次方程、可降阶高阶微分方程、Euler 方程、Bessel 方程及 Legendre 方程。对于微分方程解的理论基础的讨论，我们给出了方程解的稳定与不稳定性的概念。

定义 1　含有未知函数的各阶（偏）导数或微分的方程称为微分方程。若未知函数为一元函数，则该微分方程称为常微分方程；若未知函数为多元函数，则称为偏微分方程。

微分方程中所出现的未知函数的最高阶（偏）导数的阶数称为微分方程的阶。满足微分方程的函数称为微分方程的解。如果常微分方程的解含有的任意常数的个数与方程的阶数相同，这样的解称为通解。取定通解中的任意常数后得到的解称为特解。

常微分方程分类可以按阶数分为一阶微分方程与高阶微分方程；也可以按未知函数及其导函数的次数分为线性微分方程与非线性微分方程。

一、一阶微分方程

一阶常微分方程典则形式与对称形式分别为

$$y' = f(x, y), \ p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1.1.1}$$

在一阶微分方程中有几种特殊的重要的一阶微分方程：可分离变量的一阶微分方程、齐次方程、一阶线性微分方程、Bernoulli 方程。

1．可分离变量的一阶微分方程，其基本形式为

$$f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y \tag{1.1.2}$$

对方程两边同时作不定积分即得

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(y)\mathrm{d}y \tag{1.1.3}$$

2．齐次方程基本形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x}) \tag{1.1.4}$$

只要引入函数变换 $u = y/x$，代入方程，即得

$$u + xu' = f(u) \tag{1.1.5}$$

移项后由分离变量法解之。

3．一阶线性微分方程基本形式为

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{1.1.6}$$

常数变易法是求解这类方程的常用方法，但是步骤较繁琐。但若采用积分因子法，求解这类方程就变得简单了。在上式左右两边同时乘以因子 $\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，得

$$(y\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x})' = q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$$

两边同时积分后得

$$y\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} = \int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c$$

整理得

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right)$$

这与常数变易法所得结果相同。

4．Bernoulli 方程

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,\quad (n \neq 0,\ 1) \tag{1.1.7}$$

引入函数变换 $u = y^{1-n}$ 后，方程变为

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x) \tag{1.1.8}$$

这是一个一阶线性微分方程，由上面解法即得。

二、高阶微分方程

最简单的高阶微分方程是 $y^{(n)} = f(x)$，经 n 次积分后即可得解。下面，讨论几类常见的高阶微分方程。

1．可降阶的二阶微分方程

$$y'' = f(x,\ y')，\quad y'' = f(y,\ y')$$

对于方程 $y'' = f(x,\ y')$，我们只要引入函数变换 $p(x) = y'$，方程即可降为一阶方程

$$p' = f(x,\ p)$$

对于方程 $y'' = f(y,\ y')$，如果继续引入函数变换 $p(x) = y'$，则

$$p' = f(y,\ p)$$

这时，方程中出现两个未知函数 $p(x)$ 和 $y(x)$，所以，引入函数变换 $p(x) = y'$ 不合适。我们只要引入函数变换 $p(y) = y'$，方程也降为一阶方程

$$pp' = f(y,\ p)$$

其中，y 是自变量。

2．n 阶常系数齐次线性微分方程

在高阶微分方程中，线性微分方程是非常重要的一类，可以分为齐次线性微分方程与非齐次线性微分方程。根据方程系数还可以分为常系数线性微分方程与非常系数线性微分方程。齐次线性微分方程的解具有加法与数乘的封闭性，构成了一个向量空间，称为解空间。非齐次线性微分方程的通解可以表示为齐通解与一个特解之和。设 n 阶齐次线性微分方程为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

令 $\mathrm{L}=D^n+a_1(x)D^{n-1}+a_2(x)D^{n-2}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)$，则 n 阶常系数齐次线性微分方程的算子形式为 $\mathrm{L}y=0$。

定理 1　$\mathrm{L}y=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(x)$ 的特解可以通过方程 $\mathrm{L}y=f_i(x),\ i=1,\ \cdots,\ n$ 的特解之和求得。

当 $a_i(x)$ 为常数时，常系数齐次线性微分方程的 n 维解空间的基元素可以通过其特征方程得到。设方程有形式解 $y=\mathrm{e}^{\lambda x}$，代入方程后，可以得到方程对应的特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0。$$

定理 2　n 阶常系数齐次线性微分方程的通解为：

（1）特征方程有 n 个不同的实根 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$，则 $y=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\mathrm{e}^{\lambda_i x}$，$c_i$ 为任意常数；

（2）特征方程有 r 个不同的实根 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r$，其重数分别为 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_r$，$\sum\limits_{k=1}^{r}n_k=n$，则

$$y=\sum_{i=1}^{r}(c_{i,\ 0}+c_{i,\ 1}x+\cdots+c_{i,\ (i-1)}x^{n_i-1})\mathrm{e}^{\lambda_i x}$$

其中，$c_{i,j}$ 为任意常数。

（3）若 $a_i(x)\in R$，特征方程有 r 个不同的复根 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_r$（$\lambda_k=\alpha_k\pm\beta_k i$），其重数分别为 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_r$，所有复根重数之和为 n，则

$$\begin{aligned}y=&\sum_{i=1}^{r}(c_{i,\ 0}+c_{i,\ 1}x+\cdots+c_{i,\ (i-1)}x^{n_i-1})\mathrm{e}^{\alpha_i x}\sin\beta_i x+\\&\sum_{i=1}^{r}(d_{i,\ 0}+d_{i,\ 1}x+\cdots+d_{i,\ (i-1)}x^{n_i-1})\mathrm{e}^{\alpha_i x}\cos\beta_i x\end{aligned}$$

其中，$c_{i,j}$，$d_{i,j}$ 为任意常数。

定理 2 的（3）说明，对于实系数方程，只要从复特征根得到的特解中取出其实部与虚部即得方程的线性无关特解，从而得到方程的实通解。

3．二阶常系数非齐次线性微分方程的特解

由于非齐次线性微分方程的通解是齐通解与一个特解之和，所以非齐次线性微分方程的特解的求法很重要。

定理 3　设 λ_0 为 $y''+py'+qy=p_m(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x}$ 对应的齐次方程的 $i\ (i=0,\ 1,\ 2)$ 重根，其中，$p_m(x)$ 与 $p_n(x)$ 分别是 $m,\ n$ 次多项式，λ_0 为常数。则存在 m 次多项式 $q_m(x)$ 使非齐次方程有如下形式的特解：

$$y=x^i q_m(x)\mathrm{e}^{\lambda_0 x}。$$

定理 4　$p_m(x)$ 与 $p_n(x)$ 分别是 $m,\ n$ 次多项式，λ_0 与 $\omega_0(\omega_0\neq 0)$ 为常数，则 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda_0 x}[p_m(x)\cos\omega_0 x+p_n(x)\sin\omega_0 x]$ 的特解为：

$$y = x^k e^{\lambda_0 x}[p_l(x)\cos\omega_0 x + q_l(x)\sin\omega_0 x]$$

其中，$q_l(x)$ 和 $p_l(x)$ 都是 l 次多项式，且 $l = \max\{m,\ n\}$。若 $\lambda_0 + i\omega_0$ 为对应的齐次方程的特征方程的根，则 $k = 1$，否则 $k = 0$。

对于一般的二阶常系数非齐次线性微分方程，我们采用参数变易法求特解。

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

设 $y_1(x),\ y_2(x)$ 是相应的齐次方程 $y'' + py' + qy = 0$ 的线性无关的特解。

（1）非齐次方程的通解是相应齐次方程的通解 $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ 与非齐次方程的特解之和。

（2）常数变易法。由于非齐次线性微分方程与齐次线性微分方程形式的相似性，我们可以猜想非齐次线性微分方程也有一个与齐通解相似的特解。将 c_1 变为 $u(x), c_2$ 变为 $v(x)$，设非齐次线性微分方程有一个特解具有下述形式

$$y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

其中，函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 待定。将它代入非齐次线性微分方程，得到确定 $u(x)$ 与 $v(x)$ 的一个条件

$$(uy_1 + vy_2)'' + p(uy_1 + vy_2)' + q(uy_1 + vy_2) = f(x)$$

确定两个函数需要两个条件，因此还可以附加一个确定 $u(x)$，$v(x)$ 的条件。为此，对 $y(x) = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$ 两边求导，得

$$y' = (uy_1' + vy_2') + (u'y_1 + v'y_2)$$

为了缩小寻找 $u(x)$，$v(x)$ 的范围，让上式第二项为零，即

$$u'y_1 + v'y_2 = 0$$

则

$$y' = uy_1' + vy_2'，\quad y'' = (uy_1' + vy_2')'$$

利用 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程的解，将上式代入原方程即有

$$u'y_1' + v'y_2' = f(x)$$

于是得方程组

$$\begin{cases} u'y_1 + v'y_2 = 0 \\ u'y_1' + v'y_2' = f(x) \end{cases}$$

解得

$$u'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{\Delta(y_1,\ y_2)},\ v'(x) = \frac{y_1 f(x)}{\Delta(y_1,\ y_2)}$$

其中，$\Delta(y_1,\ y_2) = y_2' y_1 - y_2 y_1'$，也称为 Wronsky 行列式。于是

$$u(x) = -\int_0^x \frac{y_2 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi + C_1，\quad v(x) = \int_0^x \frac{y_1 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi + C_2$$

所求通解为

$$y = -y_1\int_0^x \frac{y_2 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi + y_2\int_0^x \frac{y_1 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

定理 5　二阶非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的特解为

$$y=-y_1\int_0^x \frac{y_2 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi+y_2\int_0^x \frac{y_1 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi$$

通解为

$$y=-y_1\int_0^x \frac{y_2 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi+y_2\int_0^x \frac{y_1 f(\xi)}{\Delta(y_1,\ y_2)}\mathrm{d}\xi+C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

其中，$y_1(x), y_2(x)$ 是相应的齐次方程 $y''+py'+qy=0$ 的线性无关的特解，$\Delta(y_1,\ y_2)=y_2'y_1-y_2y_1'$。

例 1　求解常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} T_n''(t)+\gamma^2T_n(t)=f_n(t),\ \gamma=\dfrac{n\pi a}{l} \\ T_n(0)=0,\ T_n'(0)=0 \end{cases}。$$

解：相应的齐次方程 $T_n''(t)+\gamma^2T_n(t)=0$ 的线性无关的特解为 $\cos\gamma t$ 和 $\sin\gamma t$，Wronsky 行列式为

$$\Delta=\cos\gamma t(\sin\gamma t)'-(\cos\gamma t)'\sin\gamma t=\gamma$$

因此

$$\begin{aligned} T_n(t)&=-\cos\gamma t\int_0^t \frac{\sin\gamma\tau f_n(\tau)}{\gamma}\mathrm{d}\tau+\sin\gamma t\int_0^t \frac{\cos\gamma\tau f_n(\tau)}{\gamma}\mathrm{d}\tau \\ &=\frac{1}{\gamma}\int_0^t f_n(\tau)\sin\gamma(t-\tau)\mathrm{d}\tau \\ &=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\xi)\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\xi)\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

三、Euler 方程

在微分方程中，我们还经常遇到一类特殊的非常系数非齐次线性微分方程——Euler 方程的求解：

$$p_0x^ny^{(n)}+p_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}xy'+p_ny=f(x)$$

该方程的解法是引入自变量变换 $x=\mathrm{e}^t$，将方程变为

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y=f(\mathrm{e}^t)$$

其中，D 为微分算子符号，$\mathrm{D}\,y=y'$。这时，方程变为常系数非齐次线性微分方程。

四、Bessel 方程

定义 2　二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

称为 Bessel 方程，ν 为非负常数。

定义 3　二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0，m\text{ 为整数}$$

称为 m 阶 Bessel 方程。

定义 4　二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'+\left[x^2-\left(m+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0\text{，}m\text{ 为整数}$$

称为半奇数阶 Bessel 方程。

定义 5　二阶线性微分方程

$$x^2y''+xy'-(x^2+\nu^2)y=0$$

称为虚宗量 Bessel 方程。

五、Legendre 方程与 Sturm–Liouville 方程

定义 6　二阶线性微分方程

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0,\ x\in[-1,\ 1]$$

称为 n 阶 Legendre 方程。

定义 7　二阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right]+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]y(x)=0\text{，}a\leq x\leq b$$

称为 Sturm–Liouville 方程。其中 $k(x)$ 称为核函数，$\rho(x)$ 称为权函数，λ 为参数。

六、微分方程解的理论基础

满足一定条件的微分方程求解的问题，称作定解问题。在定解问题中，最常见的有两种。一种是初值问题，也称 Cauchy 问题；另一种是边值问题。

定义 8　对于一阶微分方程，称以下问题为 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}y'=f(x,\ y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\text{。}$$

定义 9　对于二阶微分方程，称以下问题为边值问题：

$$\begin{cases}f(x,\ y,\ y',\ y'')=0,\ t\in(\alpha,\ \beta)\\ a_1y(\alpha)+a_2y(\beta)+a_3y'(\alpha)+a_4y'(\beta)=a_5\end{cases}$$

其中，a_i 为常数。

在微分方程求解过程中，许多微分方程没有通用的求解方法。谁也不会想到貌不惊人的 Riccati 方程 $y'=x^2+y^2$ 曾经让 Leibniz 也百思不得其解。自从 1686 年，Leibniz 公开承认无法求解，到 1838 年，历经 148 年，问题才由 Liouville 解决。他证明了该方程无初等函数积分解。由此可见，微分方程的求解并不容易。在工程应用中，我们常常遇到的是无法具体求解的微分方程。然而，方程解的动力特性，如解的稳定性、周期性、解对参数的连续依赖性、数值解等，对于系统而言非常重要。于是，微分方程解的理论分析就变得非常重要了。

在微分方程解的理论分析中，适定性理论、定性理论、稳定性理论等理论与方法是整个微分方程的基础。Cauchy 问题解的存在性、唯一性解对参数的连续依赖性，常称为微分方程的适定性理论；微分方程极限环与周期解的存在性常常是定性理论的主要讨论对象。微分方程的稳定性理论是微分方程应用的一个重要部分。在数学物理方程中，我们也经常遇到。下面，给出一阶微分方程 $y'=g(x,\ y)$ 的平凡解稳定性定义。该定义最初由俄国数学力学家 Lyapunov（1892 年）提出。

定义 10　设 $y=0$ 为方程 $y'=g(x,\ y)$ 的平凡解，若 $\forall\varepsilon>0,\ x_0\in I,\ \exists\delta(\varepsilon,\ x_0)>0,\ \forall y_0$，当

$\|y_0\| < \delta(\varepsilon, x_0)$ 时，对 $\forall x > x_0$，有 $\|y(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon$，则称解 $y = 0$ 稳定。

定义 11 设 $y = 0$ 为方程 $y' = g(x, y)$ 的平凡解，若 $\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_0, \forall \delta > 0, \exists y_0$，当 $\|y_0\| < \delta$ 时，$\exists x_1 > x_0$，有 $\|y(x_1, x_0, y_0)\| < \varepsilon$，则称解 $y = 0$ 不稳定。

Lyapunov 直接法是整个稳定性理论的核心方法，Lyapunov（1892 年）提出的稳定性定理，渐近稳定性定理及两个不稳定性定理，奠定了运动稳定性的基础，被誉为基本定理。有兴趣的读者可参阅相关资料。

1.2 积分方程基础

在数学物理应用中，常常遇到下面一类含有未知函数的方程：

$$f(x) = \int_a^b k(x, t) y(t) \mathrm{d}t \quad x \in [a, b] \tag{1.2.1}$$

$$f(x) = y(x) - \int_a^b k(x, t) y(t) \mathrm{d}t \quad x \in [a, b] \tag{1.2.2}$$

$$y(x) = \int_a^b k(x, t) f(t, y(t)) \mathrm{d}t \quad x \in [a, b] \tag{1.2.3}$$

$$f(x) = \int_a^b k(x, t, y(t)) \mathrm{d}t \quad x \in [a, b] \tag{1.2.4}$$

定义 1 积分号下含有未知函数的方程称为积分方程。若方程关于未知函数是线性的，则称之为线性积分方程；否则该积分方程称为非线性积分方程。

定义 2 若未知函数只出现在积分号下，称为第一类线性积分方程；若未知函数不仅出现在积分号下，还出现在其他部分，则称为第二类线性积分方程。

方程（1.2.1）是第一类线性积分方程。方程（1.2.2）是第二类线性积分方程。若 $f(x) = 0$，则称为齐次方程。

函数 $k(x, t)$ 称为积分核。若 $k(x, t)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 的定义域内连续，并且不恒为 0，$k(x, t)$ 称为连续核。若 $\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t < \infty$，$k(x, t)$ 称为 L^2 一核。若 $k(x, t) = \bar{k}(t, x)$，$k(x, t)$ 称为 Hermite 核。若 $k(x, t) = k(t, x)$，$k(x, t)$ 称为对称核。若 $k(x, t) = -k(t, x)$，$k(x, t)$ 称为斜对称核。根据积分核，可以对线性积分方程进一步分类。

（1）若积分核 $k(x, t)$ 满足 $\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t < \infty$，第一类、第二类线性积分方程称为第一类、第二类 Fredholm 积分方程。若积分核还满足 $k(x, t) \equiv 0$，$x < t$，第一类、第二类 Fredholm 积分方程分别称为第一类、第二类 Volterra 积分方程。

（2）若积分核满足

$$k(x, t) = \frac{H(x, t)}{|x - t|^\alpha} \quad \alpha \in (1, 1/2)\text{，} H(x, t) \text{ 为有界函数}$$

则第一类、第二类线性积分方程分别称为第一类、第二类弱奇异性积分方程。

（3）若积分核满足

$$k(x, t) = \frac{H(x, t)}{x - t}\text{，} H(x, t) \text{ 可偏导，} \int_a^b k(x, t) y(t) \mathrm{d}t \text{ 可积}$$

则第一类、第二类线性积分方程分别称为奇异性积分方程。

定义 3　若含λ参数齐次方程$y(x)=\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$，在$\lambda=\lambda_0$有非零解，则$\lambda_0$称为特征值，相应的解为特征函数。特征函数构成的空间称为线性空间，其维数称为λ_0的重数。

对于积分方程$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$的求解，可以采用迭代法。设其初解为$y_0(x)=f(x)$，代入方程后得

$$y_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y_0(t)\mathrm{d}t=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)f(x)\mathrm{d}t$$

继续代入原方程得

$$\begin{aligned}y_2(x)&=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y_1(t)\mathrm{d}t\\&=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)f(x)\mathrm{d}t+\lambda^2\int_a^b k(x,\ t)\int_a^b k(x,\ t_1)f(x)\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\lambda^i\varphi_i(x),\ \ \varphi_0(x)=f(x),\ \ \varphi_i(x)=\int_a^b k(x,\ t)\varphi_i(x)\mathrm{d}t$$

$$\cdots\cdots$$

若令$k_1(x,t)=k(x,\ t),\ \ k_i(x,\ t)=\int_a^b k_{i-1}(x,\ \tau)k(\tau,\ t)\mathrm{d}\tau$，则$\varphi_i(x)=\int_a^b k_i(x,\ t)\varphi_i(x)\mathrm{d}t$。记$R(x,\ t;\ \lambda)=\sum_{i=0}^{+\infty}\lambda^i k_{i+1}(x,\ t)$，则$\sum_{i=0}^{+\infty}\lambda^i\varphi_i(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,\ t;\ \lambda)f(t)\mathrm{d}t$。一般地，满足下面两个预解方程

$$R(x,\ t;\ \lambda)=k(x,\ t)+\lambda_0\int_a^b k(x,\ \tau)R(\tau,\ t;\ \lambda_0)\mathrm{d}\tau$$

$$R(x,\ t;\ \lambda)=k(x,\ t)+\lambda_0\int_a^b k(\tau,\ t)R(x,\ \tau;\ \lambda_0)\mathrm{d}\tau$$

的解$R(x,\ t;\ \lambda)$称为$k(x,\ t)$的预解核，λ_0称为正则值。

定理 1　若$f(x)$在$x\in[a,\ b]$，$k(x,\ t)$在$[a,\ b]\times[a,\ b]$内都连续，且$|f(x)|\leq m$，$|k(x,\ t)|\leq M$，$|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$。级数$\sum_{i=0}^{+\infty}\lambda^i\varphi_i(x)$在$x\in[a,\ b]$一致绝对收敛，并且为方程$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$的唯一解。

证明略。

定义 4　若$k(x,\ t)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\overline{\beta}_i(t)$，$\{\alpha_i(x)\}$与$\{\beta_i(t)\}$都线性无关，则称$k(x,\ t)$为退化核。

$k(x,\ t)$为退化核，则方程$y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$变为

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)y_i,\ y_i=\int_a^b\overline{\beta}_i(t)y(t)\mathrm{d}t$$

代入原方程得

$$y_i=f_i+\lambda\sum_{k=1}^{n}\gamma_{ik}y_k,\ \gamma_{ik}=\int_a^b\overline{\beta}_i(t)\alpha_k(t)\mathrm{d}t,\ \ f_i=\int_a^b\overline{\beta}_i(t)f(t)\mathrm{d}t,\ i=1,\ \cdots,\ n$$

这时，方程 $y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$ 的求解变为求解以上线性方程组。设该线性方程组的系数行列式为 $A(\lambda)$。若 $A(\lambda_0)\neq 0$，则方程 $y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$ 有唯一解。若 $A(\lambda_0)=0$，则方程 $y(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,\ t)y(t)\mathrm{d}t$ 有解的充分必要条件是 $f(x)$ 与相应的齐次方程的解正交。事实上，使 $A(\lambda)=0$ 的参数仅有有限个。

1.3　场论基本概念

在物理学中，通常需要了解产生一种物理现象的各种物理量在空间或空间中部分区域的分布情况。这种与空间分布和时间对应的物理量，称为场。如果形成场的物理量是数量，就称此场为数量场。例如空间某个区域内每一点的温度就形成一数量场。如果形成场的物理量是向量，则称为向量场。如流速场、电磁场、引力场等都是向量场。无论数量场还是向量场都有两类：一类是不随时间而变化的场，称为稳定场；另一类是随时间而变化的场，称为不稳定场。为了建立场的数学模型，所有的场都要用一定的数学形式来表示，在空间中引入了直角坐标系后，一个与时间无关的数量场可以用一个数量值函数 $u(x,\ y,\ z)$ 来表示。一个与时间无关的向量场则可以用一个向量值函数

$$\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z)=p(x,\ y,\ z)\boldsymbol{i}+q(x,\ y,\ z)\boldsymbol{j}+r(x,\ y,\ z)\boldsymbol{k} \tag{1.3.1}$$

来表示。需要注意的是，场以及场论中有关概念的固有涵义与坐标系的选取无关。坐标系的引入随向量场的特点确定，主要是为了便于用数学描述及性质研究。事实上，一个向量场所具有的性质，可完全由它的散度和旋度来表示；一个标量场所具有的性质，则可由它的梯度来表示。下面给出矢量场的散度和旋度定义。

一、散度与通量

设 S 是一分片光滑的有向曲面，其单位侧向量为 $\boldsymbol{n}_0$，则向量场 $\boldsymbol{A}(x,\ y,\ z)$ 沿曲面 S 的第二类曲面积分

$$\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$$

称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 通过曲面 S 向着指定侧的通量。

如果 S 是一分片光滑的闭曲面，$\boldsymbol{n}_0$ 为外法向，V 为 S 所包围的空间区域，由 Gauss 公式有

$$\begin{aligned}\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}&=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S\\&=\oiint_S p(x,\ y,\ z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+q(x,\ y,\ z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+r(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_V (p_x+q_y+r_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\end{aligned}$$

其中，$p_x+q_y+r_z$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度，记为 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$，即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=p_x+q_y+r_z$$

下面，解释 Gauss 公式的物理意义。设 $A(x, y, z)$ 为稳定流动的不可压缩流体的流速场。那么 Gauss 公式的左端表示单位时间内流体流过边界闭曲面 S 的流量（离开闭区域 V 的总量），因此在流体离开 V 的同时，V 内部必须有产生流体的“源头”产生出同样多的流体来补充，所以上式的右端表示单位时间内 V 内各“源头”产生的流体的总量。我们设想空间区域 V 内的每一点都是一个微小的“源头”，流体从这些小“源头”产生出来或吸收进去。用空间区域 V 的体积 V 除上式的两端，得到

$$\frac{1}{V}\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{V}\iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$$

上式左端表示 V 内的“源头”在单位时间单位体积内产生的流体总量的平均值，利用积分中值定理，$\exists\,(\xi, \eta, \varsigma)\in V$ 使得

$$\frac{1}{V}\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=(p_x+q_y+r_z)\big|_{(\xi,\ \eta,\ \varsigma)}$$

当空间区域 V 收缩到 V 内的一点 $M(x, y, z)$ 时，上式变为

$$\lim_{V\to M}\frac{1}{V}\oiint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=p_x+q_y+r_z=\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$$

于是，散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ 表示稳定流动的不可压缩流体在点 M 散发出的强度。如果 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(M)>0$，表示有流体从这一点流出，称这一点为“源”；如果 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(M)<0$，表示流体在这一点被吸收，称这一点为“汇”；如果 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(M)=0$，则称向量场 $\boldsymbol{A}$ 为无源场。从 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$ 的极限表示式可以看出，散度与坐标系的选取无关，是一个客观的物理量。

二、环流量与旋度

对于给定向量场

$$\boldsymbol{A}(x, y, z)=p(x, y, z)\boldsymbol{i}+q(x, y, z)\boldsymbol{j}+r(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

设 L 为场内一有向闭曲线，L 上与指定方向一致的单位切向量为 τ_0，则称积分

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\tau}_0\mathrm{d}s$$

为向量场沿有向闭曲线 L 的环流量。

设 S 是以 L 为边界的有向曲面，曲线 L 的方向与曲面 S 的侧符合右手规则，由 Strokes 公式，有

$$\begin{aligned}\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}&=\oint_L p(x, y, z)\mathrm{d}x+q(x, y, z)\mathrm{d}y+r(x, y, z)\mathrm{d}z\\&=\iint_S[(r_y-q_z)\cos\alpha+(p_z-r_x)\cos\beta+(q_x-p_y)\cos\gamma]\mathrm{d}S\end{aligned}$$

其中，向量 $\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ 为有向曲面 S 的单位法向量 $\boldsymbol{n}_0$ 的方向余弦，向量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度记为 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$，且

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=(r_y-q_z)i+(p_z-r_x)j+(q_x-p_y)k$$

旋度是一个向量，它是由向量场 A 产生的向量场，称为旋度场。

于是 Strokes 公式可以写成如下的向量形式：

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S \mathrm{rot}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}_0\mathrm{d}S$$

它表示向量场沿有向闭曲线 L 的环流量等于其旋度 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ 通过以 L 为边界所张的曲面 S 的通量。如果 $\boldsymbol{A}$ 表示稳定流动的不可压缩流体的流速场，那么环流量 $\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 表示单位时间内沿闭曲线 L 的流体总量，反映了流体沿 L 流动时的旋转强弱程度。当 $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$ 时，即沿任意闭曲线的环流量为零，此时流体流动时不形成旋涡，称向量场 $\boldsymbol{A}$ 为无旋场。

若在一个向量场 $\boldsymbol{A}$ 内的第二类曲线积分与路径无关，则该向量场称为保守场。这时，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=0$，并且存在函数 $u(x,\,y,\,z)$ 使

$$\mathrm{d}u(x,\,y,\,z)=p(x,\,y,\,z)\mathrm{d}x+q(x,\,y,\,z)\mathrm{d}y+r(x,\,y,\,z)\mathrm{d}z$$

即

$$\mathrm{grad}\,u(x,\,y,\,z)=\boldsymbol{A}(x,\,y,\,z)$$

其中，函数 $u(x,\,y,\,z)$ 称为向量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数。这时，向量场 $\boldsymbol{A}$ 称为有势场，或 $u(x,\,y,\,z)$ 的梯度场。

从上面的讨论可以看出，一个向量场 $\boldsymbol{A}$，如果任意闭合路径上的环流量为零，则它是一个无旋场；另一种情况是向量场的散度处处为零的无散场。但是，就向量场的整体而言，无旋场的散度不能处处为零；而无散场的旋度也不能处处为零。因为任何一个物理向量场都必须有“源”。场是同“源”一起出现在某一空间内的物理现象，假如我们把“源”看作场的起因，矢量场的散度便对应于一种源（称为发散源）；矢量场的旋度则对应着另一种源（称为旋涡源）。一个无旋场，即是一个不存在任何漩涡源的向量场，那么其散度就不能再处处为零了，否则这个场便不能存在。同样，一个无散场，其旋度也一定不能处处为零。

一般的向量场 $\boldsymbol{A}$ 可能既有散度，又有旋度，而这个向量场可以表示为一个无旋场分量和一个无散场分量之和

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$$

其中，$\boldsymbol{A}_1$ 为无旋度分量，其散度不为零；$\boldsymbol{A}_2$ 为无散度分量，而它的旋度不为零。向量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度代表形成向量场的一种“源”，$\boldsymbol{A}$ 的另一种“源”则由旋度表示。一般当这两类“源”在空间的分布已确定时，向量场本身也就唯一地确定了。这一规律称为 Helmholtz 定理。

1.4　常用算符与函数

一、常用算符

这一节，主要介绍几个常用的算符。在常微分方程中，我们常用算子形式表示线性方程。其基本的算子为求导算子 D：

$$\mathrm{D}f(x)=f'(x) \tag{1.4.1}$$

下面，介绍梯度算子 ∇ 与 Laplace 算子 Δ 是两个最基本的算符：

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right\}，\quad \Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为向量场，$u=u(x,\,y,\,z)$ 为数值函数，则有以下公式：

（1）$\mathrm{grad}\,u=\nabla u$；

（2）$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}$；

（3） $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ ；

（4） $\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla \cdot \mathrm{grad}\, u = \Delta u$ ；

（5） $\nabla(uv) = \nabla u \cdot v + u \nabla v$ 。

在高等数学中，已经讨论过的积分主要有：定积分、不定积分、二重积分、三重积分、曲线积分（第一类、第二类）、曲面积分（第一类、第二类）等。重积分的主要积分方法是将重积分化为累次积分，或利用三个基本积分公式：Green 公式、Strokes 公式、Gauss 公式。

定理 1 设平面区域 D 由分段光滑的闭曲线 L 围成，函数 $p(x, y)$、$q(x, y)$ 在 L 上具有一阶连续偏导数，则有 Green 公式：

$$\oint_L p(x, y)\mathrm{d}x + q(x, y)\mathrm{d}y = \iint_D [q_x(x, y) - p_y(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.4.2}$$

其中，L 的方向为区域 D 边界曲线的正向。

定理 2 设曲线 L 为分段光滑的空间有向闭曲线，S 为以 L 为边界的任意分片光滑的有向曲面。函数 $p(x, y, z)$、$q(x,y,z)$、$r(x,y,z)$ 在包含 S 的某一个空间区域内具有一阶连续偏导数，则有 Strokes 公式

$$\oint_L p(x, y, z)\mathrm{d}x + q(x, y, z)\mathrm{d}y + r(x, y, z)\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ p & q & r \end{vmatrix}$$

其中，L 的方向与曲面 S 的侧符合右手规则。

定理 3 设分片光滑的有向闭曲面围成空间区域 V。函数 $p(x, y, z)$、$q(x,y,z)$、$r(x, y, z)$ 在 V 上具有一阶连续偏导数，则有 Gauss 公式：

$$\oiint_S p(x, y, z)dydz + q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + r(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V (p_x + q_y + r_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中，S 为空间区域 V 的外侧。

有了这些算符后，Gauss 公式与 Strokes 公式可以有更简单的表达式：

（1） Gauss 公式：$\oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}v = \iiint_V \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}v$ 。

（2） 若 $\nabla u = \boldsymbol{A}$，Gauss 公式也可以表示为：

$$\oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oiint_S \nabla u \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oiint_S \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S \text{ 。}$$

（3） Strokes 公式：Strokes 公式可以写成如下的向量形式：

$$\oint_L \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \text{ 。}$$

二、Γ函数、B函数与误差函数

1．Γ函数是指

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t,\ x > 0 \text{ 。}$$

Γ函数的主要性质有：

（1） $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$，$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=/\sin(\pi x)$，$\Gamma(2x)=2^{2x-1}\pi^{1/2}\Gamma(x)\Gamma(x+1/2)$；

（2） $\Gamma(1)=1$，$\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$；

（3） $\Gamma(n)=\infty,\ n\leq 0,\ n\in Z$。

2．B函数是指

$$\mathrm{B}(p,\ q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\mathrm{d}t,\ p>0,\ q>0\text{。}$$

B函数的主要性质有：

（1） $\mathrm{B}(p,\ q)=\mathrm{B}(q,\ p)$；

（2） $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$。

3．误差函数是指

$$\mathrm{erf}\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\text{。}$$

余误差函数是指

$$\mathrm{ercf}\,(x)=1-\mathrm{erf}\,(x)\text{。}$$

主要性质有：

$$\mathrm{ercf}\,(x)\approx\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{3\cdot 4}{(2x)^4}-\frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2x)^6}+\cdots)$$

上述四个函数的图形如图 1.1 和图 1.2 所示。

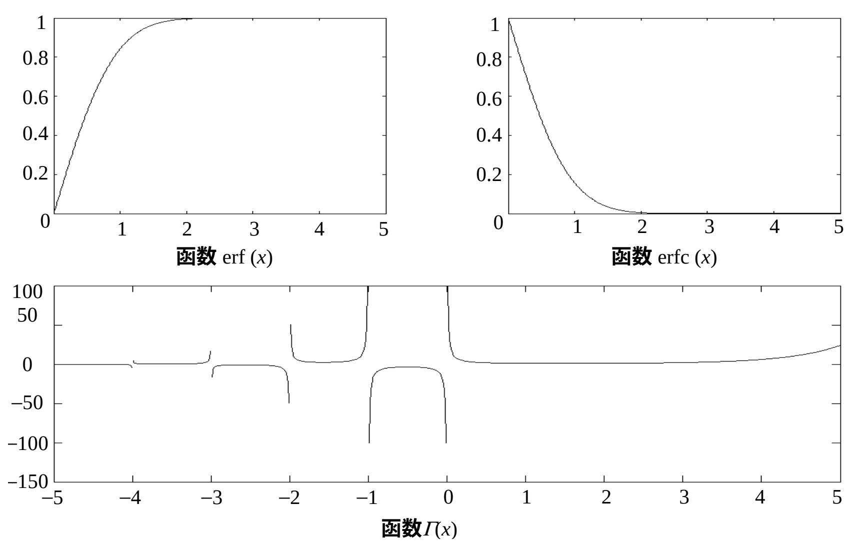

图 1.1 Γ函数、误差函数、余误差函数

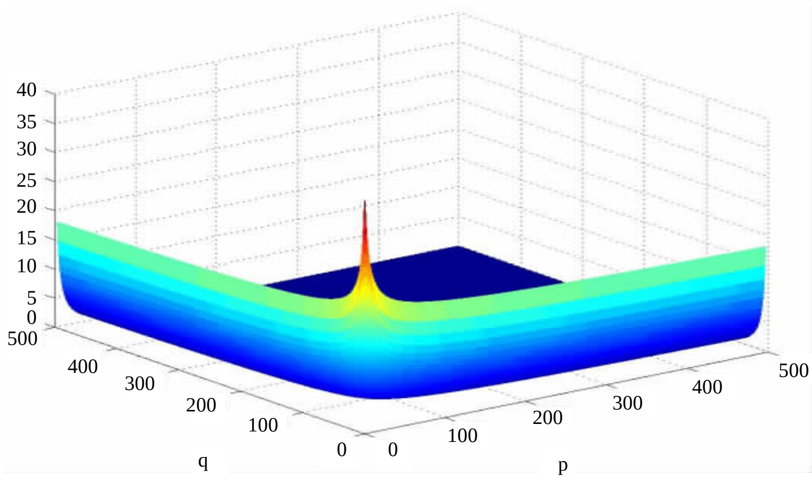

图 1.2　B 函数

三、常用结论

下面，证明几个在后面章节中要用到的结论。

命题 1　$u=u(x,\ y,\ z)$，其球坐标表示为 $u=u(r,\ \theta,\ \varphi)$。$\boldsymbol{n}$ 为以原点为球心，半径为 r 的球面的外侧，则

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=u_r$$

证明：在球坐标下函数 $u=u(x,\ y,\ z)$ 变为 $u=u(r,\ \theta,\ \varphi)$，其中

$$r=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2},\ \theta=\arctan\frac{y}{x},\ \varphi=\arccos\frac{z}{r}$$

则

$$\begin{cases} r=xr_x+yr_y+zr_z \\ u_x=u_r r_x+u_\theta\theta_x+u_\varphi\varphi_x \\ u_y=u_r r_y+u_\theta\theta_y+u_\varphi\varphi_y \\ u_z=u_r r_z+u_\theta\theta_z+u_\varphi\varphi_z \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial n}&=\nabla u\cdot\frac{1}{r}\{x,\ y,\ z\}=\frac{1}{r}\{u_x,\ u_y,\ u_z\}\cdot\{x,\ y,\ z\}\\
&=\frac{1}{r}u_r(xr_x+yr_y+zr_z)+\frac{1}{r}u_\theta(x\theta_x+y\theta_y+z\theta_z)+\frac{1}{r}\varphi_\theta\left(x\varphi_x+y\varphi_y+z\varphi_z\right)\\
&=u_r+\frac{u_\theta}{r}\left(\frac{-y/x}{1+\left(y/x\right)^2}+\frac{y/x}{1+\left(y/x\right)^2}\right)-\frac{u_\varphi}{r}\left(\frac{-xzr_x/r}{\sqrt{1-\left(z/r\right)^2}}+\frac{-yzr_y/r^2}{\sqrt{1-\left(z/r\right)^2}}+\frac{-z^2r_z/r^2+z/r}{\sqrt{1-\left(z/r\right)^2}}\right)\\
&=u_r-\frac{u_\varphi}{r}\left(1-\left(z/r\right)^2\right)^{-1/2}\left[-\frac{z}{r^2}(xr_x+yr_y+zr_z)+\frac{z}{r}\right]\\
&=u_r
\end{aligned}$$

得证。

命题 2 $\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}k^n\cos n(\theta-t)=\frac{1}{2}\frac{1-k^2}{1-2k\cos(\theta-t)+k^2}$，$k\in Z$。

证明：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}k^n\cos n(\theta-t)&=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}k^n\left[\mathrm{e}^{jn(\theta-t)}+\mathrm{e}^{-jn(\theta-t)}\right]\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[k\mathrm{e}^{j(\theta-t)}\right]^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[k\mathrm{e}^{-j(\theta-t)}\right]^n\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{k\mathrm{e}^{j(\theta-t)}}{1-k\mathrm{e}^{j(\theta-t)}}+\frac{1}{2}\frac{k\mathrm{e}^{-j(\theta-t)}}{1-k\mathrm{e}^{-j(\theta-t)}}\\&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{k\cos(\theta-t)+jk\sin(\theta-t)}{1-k\cos(\theta-t)-jk\sin(\theta-t)}+\frac{k\cos(\theta-t)-jk\sin(\theta-t)}{1-k\cos(\theta-t)+jk\sin(\theta-t)}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[1+\frac{2k\cos(\theta-t)-2k^2}{1-2k\cos(\theta-t)+k^2}\right]\\&=\frac{1}{2}\frac{1-k^2}{1-2k\cos(\theta-t)+k^2}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}k^n\cos n(\theta-t)=\frac{1}{2}\frac{1-k^2}{1-2k\cos(\theta-t)+k^2}$$

成立。

1.5 常用物理规律

在解决物理问题及其他具体问题时，经常需要建立数学模型，然后根据模型进行数学结构分析。数理方程的讨论对象涉及的面很广，经常需要用到一些物理学定律，如 Newton **第二定律、**Newton **冷却定律、**Fourier **实验定律、**Kirchhoff **定律等物理规律。下面，简要地介绍这些常用的基本物理规律。**

1．Newton **第二定律。平动规律：** $F=ma$ **；转动规律：** $M=I\varepsilon$ **。**

2．Hooke **定律。**

（1**）在弹性限度内，弹簧的弹力和弹簧的伸长成正比：** $f=-kx$ **。其中，**k **为弹簧的弹性系数。负号表示弹力的方向和形变量的方向相反。**

（2**）弹性体的应力** p **与弹性体的相对伸长成正比：**$p=Yu_x$ **。其中，**Y **为杨氏模量，**u_x **表示相对伸长。**

3．Fourier **实验定律（即热传导定律）。当物体内存在温差时，会产生热量的流动。在** $\mathrm{d}t$ **时间内，沿热流方向流过面积微元** $\mathrm{d}S$ **的热量为** $\mathrm{d}Q=-ku_n(x,\ t)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$ **，其中** k **称热传导系数，它与物体的材料有关；式中的负号表示热量由高处流向低处；**u_n **为温度** $u(x,\ t)$ **沿热流方向的方向导数。热流密度** q **为**

$$q=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S\mathrm{d}t}=-ku_n(x,\ t)$$