

数学思想方法

——创新与应用能力的培养

吴炯圻 林培榕 编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思想方法/吴炯圻 林培榕 编著. —厦门:厦门大学出版社, 2001. 6

ISBN 7-5615-1755-6

I. 数… II. 吴… III. 数学方法-方法论 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 17496 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

<http://www.xmupress.com>

xmup@public.xm.fj.cn

福建沙县方园印刷有限公司印刷

(地址:沙县城西北路 10 号 邮编:365500)

2001 年 6 月第 1 版 2001 年 6 月第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:12.75

字数:343 千字 印数:1—3 000 册

定价:22.00 元

本书如有印装质量问题请直接寄承印厂调换

内容简介

本书为适应创新精神与应用能力培养的需要而编写. 全书分为三篇共十三章. 第一篇是数学史和古今数学思想概述, 首先以“数学是什么”这样一个浅显而深奥的问题为切入点, 简要介绍徐利治教授提出的数学新定义, 然后介绍数学史上重大事件及其间思想方法的作用, 同时注意反映主要数学学科近期的发展和新的数学思想, 还给出了世界著名数学家对 21 世纪数学发展趋势的展望. 第二篇较系统地介绍主要的数学思想和基本的数学方法, 其间特别把数学应用的基本方法列为一章. 第三篇简要叙述数学思想的教育与数学能力的培养, 这对于现在的和未来的中学教师都是需要的.

本书可作为高等师范院校数学专业教材, 理工科和文科学生的公共选修课教材或参考书, 也适用于中学教师的培训.

序 言

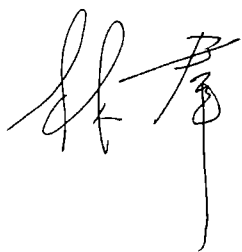
在新世纪,全世界的科学家们对科学技术的发展充满信心,对数学的作用寄以很大的期望.因为当代的高新技术,无论是令人鼓舞和惊叹的生物遗传工程,或是日新月异不断更新换代的计算机科学,都对数学提出了有待解决的问题,为数学的新思想、新方法和新理论的诞生提供了崭新的客观背景和广阔的应用前景.各国有识之士纷纷断言,在未来的国际竞争中,数学将发挥其重要的作用.

因此,20世纪80年代以来,许多国家的数学家、教育家都把改革数学教育,提高全民的数学素质摆到十分重要的地位.在90年代,我国国内的教育改革也有很大进展.

近年来,漳州师院数学系的教师在教学改革中勇于探索,采用多种措施来提高学生的综合素质.他们的实践经验表明:教师重视数学思想教育,发挥数学思想方法在教学中的作用,确实是培养学生创新精神与应用能力的一个重要途径.这一经验不仅适应于高校数学专业的师生,而且适用

于非数学专业的师生,此外还可供中学师生借鉴.

《数学思想方法——创新与应用能力的培养》一书是漳州师院吴炯圻教授和林培榕老师依据亲身的教改实践,在对有关资料进行认真加工整理、不断修改和充实的基础上编著而成的.全书信息量大,时代感强,颇有特色,其中不少论点具有创新性.相信该书的出版,能有益于读者从数学的历史、现状与未来,从方法论和教育学等多个角度了解数学的思想方法,从而提高科学素质.

A handwritten signature in black ink, consisting of stylized Chinese characters, likely '林培榕' (Lin Peirong).

2001年4月6日于厦门大学

前 言

江泽民总书记指出,“创新是一个民族的灵魂。”

第三次全国教育工作大会提出全面实施素质教育的口号. 高等学校教育法第五条规定:“高等学校的任务是培养具有创新精神和实践能力的高素质人才;发展科学技术与文化,促进社会主义现代化建设。”

在当今这个科技迅速发展的信息革命时代里,国内外许多权威科学家预言,在 21 世纪,“数学是科技与经济发展的关键”,“在有竞争的地方,数学往往是最后取胜的法宝”,数学教育的质量直接关系到科技人才的培养与全民素质的提高.

但是,与世界先进国家相比,我国高等师范院校数学教育专业的课程体系、教学内容、教学方法和手段都明显地落后,严重地影响高师毕业生素质的提高,不能适应时代的要求,达不到培养从事素质教育的合格中学师资的目标. 这些问题到了 90 年代初更为突出,引起了从中央领导、国家教育部(教委)到各高等院校的高度重视.

这几年,全国各高等院校开展了轰轰烈烈的教育教学改革,以实施全面素质教育为目标,以课程体系和教学内容的改革为中心,整个面貌发生了很大改观. 根据中共中央,国务院颁发的《中国教育改革与发展纲要》的精神,高师数学教育同样必须进行改革试验,努力探索符合我国国情的、培养具有较高素质和规格的中学师资的途径,以适应 21 世纪科技与经济的发展对教育提出的要求. 在这大好形势下,从 1997 年起,我系也开展了一系列以提高学生素质为目标的教学改革试验,并取得可喜的效果.

全国高校数学教改项目组组长姜伯驹院士在 1997 年以来的多次讲话中,反复强调应该在教材中和教学过程中注入数学思想,发挥

数学思想方法的作用,培养应用意识与能力.国内著名的数学教育学专家、华东师范大学张奠宙教授指出,“每一门数学学科都有其特有的数学思想,赖以进行研究(或学习)的导向,以便掌握其精神实质.只有把数学思想掌握了,计算才能发生作用,形式演绎体系才有灵魂.”

在我系的改革实验过程中,我们越来越深刻地认识到,姜伯驹院士的关于教改的指导意见和张奠宙教授的上述观点是非常正确、非常重要的.在教学内容的改革中,我们特别注意到:要保证专业素质的提高,培养创新精神,必须加强数学思想方法的教育和数学能力的培养;在逐步增设数学建模等应用课程的同时,必须对传统课程的教材进行改造,删除陈旧、繁琐的东西,适当增补能充分反映人的思维认识发展过程的内容,如数学概念形成的背景、有关数学知识的应用等生动活泼的材料;在教学的过程中要尽可能挖掘教材中的思想方法,有目的有计划地渗透和灌输有关的思想方法;在可能的情况下,还要尽量注入新的数学思想、新观点,鼓励学生了解现代科技的发展趋势.

根据上述精神,在教改实践中我们收集并编写了一批关于数学思想方法与应用的教学补充材料,于1998年9月内部印刷使用.这两年的试验表明,广大师生是欢迎教改的,并希望今后能更进一步深入开展;不仅数学系学生、理科学生,而且文科学生中的一大部分也对数学思想方法感兴趣.目前我校已在全校开设《数学思想方法与应用》的公共选修课.在这基础上,我们对原来的材料进行重新整理、补充和加工,编成此书——《数学思想方法——创新与应用能力的培养》.与此同时,我们还编写了《高等数学思想方法与应用选讲》,针对大学数学各门课程的需要,从数学思想方法和应用各个角度出发给出了有意义的讲评与补充.这两本书都瞄准提高科学素质与能力的目标,紧紧围绕着数学思想方法这个中心.

本书分为三篇共十三章.第一篇是数学史和古今数学思想概述,首先简要介绍人们对“数学是什么”这样一个浅显而深奥的问题的各

种不同认识,包括古代、近代和目前最新的观点,然后介绍数学史上重大事件及其间思想方法的作用,同时注意反映主要数学学科近期的发展和新的数学思想,还给出了当代数学名家对 21 世纪数学发展的展望. 第二篇较系统地介绍主要的数学思想和基本的数学方法,其间特别把数学应用的基本方法列为一章. 第三篇简要叙述数学思想的教育与数学能力的培养,这对于现在的和未来的中学教师都是需要的.

本书第三篇全部和第一篇的前半部分由林培榕老师编写,其余部分由吴炯圻教授完成. 在编写过程中,我们力求做到有自己的特色,如:一、取材较新颖,许多资料直接来源于最近几年的期刊,例如《数学译林》或 Inter 网;二、着重于教学实用,希望对学生掌握思想方法和开拓视野有所帮助,不在理论的论证上深入探讨;三、阐述的观点较开放,旨在探索,不求周全;四、全书包含的信息量较大,深浅程度不求一致,目的是让具有不同需求和不同数学水平的读者都有收益,使“深者得其深,浅者得其浅”. 当然,这种做法是否得当,还要经过实践检验,不妥之处还请求有关专家多予指导.

本书在写作过程中,参考和引用了许多出版物的不少论点和资料,除了书末列出的部分主要参考文献外,恕不一一列举. 借此机会,我们向有关作者表示衷心感谢. 同时感谢集美大学王志雄教授和我系林怡谋教授审阅打印稿并提出许多有益的修改意见. 感谢厦门大学出版社的同志对本书出版的大力支持. 特别感谢中国科学院院士,中科院系统所副所长林群教授在本书写作过程中所给予的支持和鼓励,以及为本书所作的序言.

限于作者的学识和水平,书中难免有各种疏漏或错误,欢迎专家和读者多提宝贵的修改意见.

作 者

漳州师范学院数学系

2001 年 4 月

目 录

第一篇 数学史和古今数学思想概述

第一章 数学是什么	(2)
§ 1 数学的研究对象	(2)
§ 2 数学的基本内容	(8)
§ 3 数学的重要作用	(10)
第二章 初等数学的产生与发展	(18)
§ 1 数的产生与数学思想的萌芽	(18)
§ 2 算术和代数的发展	(20)
§ 3 西方演绎数学的发展	(23)
§ 4 中国传统数学的发展	(24)
第三章 近代数学的兴起	(34)
§ 1 解析几何用坐标系实现形数实质结合	(34)
§ 2 微积分的发明开创变量数学的新时代	(36)
第四章 现代数学的兴起与发展	(40)
§ 1 现代数学的前期	(40)
§ 2 现代数学的发展	(48)
第五章 数学的新发展与电子计算机	(74)
§ 1 电子计算机引起数学的一场革命	(74)
§ 2 应用数学的发展	(90)
§ 3 数学的新思想、新理论不断出现	(99)

第六章	近代数学潮流与未来数学展望 ·····	(112)
§ 1	世界数学中心的转移 ·····	(112)
§ 2	国际数学家大会与数学奖 ·····	(114)
§ 3	下一世纪的 18 个数学问题·····	(116)
§ 4	中国数学的未来 ·····	(119)

第二篇 主要数学思想和基本数学方法

第七章	主要数学思想概述 ·····	(126)
§ 1	数学思想方法及其作用 ·····	(126)
§ 2	序化思想与量化模式的构建 ·····	(130)
§ 3	一般数学思想 ·····	(133)
§ 4	学科方法型思想 ·····	(148)
§ 5	目标型思想——完美化原则 ·····	(175)
第八章	数学发现的基本方法 ·····	(188)
§ 1	观察法与实验法 ·····	(188)
§ 2	归纳法 ·····	(194)
§ 3	类比法与联想法 ·····	(199)
§ 4	抽象法与概括法 ·····	(211)
第九章	数学论证的基本方法 ·····	(225)
§ 1	演绎法 ·····	(226)
§ 2	分析法与综合法 ·····	(236)
§ 3	化归法 ·····	(246)
§ 4	关系—映射—反演法(RMI 原则) ·····	(269)
§ 5	构造法 ·····	(283)
§ 6	一般化、特殊化思想方法·····	(288)
第十章	数学应用的基本方法 ·····	(300)
§ 1	数学建模法 ·····	(300)
§ 2	统计方法 ·····	(315)

§ 3 计算机应用方法	(319)
-------------------	-------

第三篇 数学思想的教育与数学能力的培养

第十一章 数学思想方法在数学教育中的作用	(334)
§ 1 数学教学改革概况	(334)
§ 2 现代数学教育的特征与发展趋势	(338)
§ 3 数学教育中必须重视数学思想方法的作用	(348)
第十二章 数学创造的智力和非智力因素	(356)
§ 1 数学创造的智力因素	(356)
§ 2 数学创造的非智力因素	(360)
§ 3 在数学教学中培养学生的创造性思维	(364)
第十三章 数学应用能力的培养	(369)
§ 1 数学应用能力的培养	(369)
§ 2 数学实验课与数学模型课	(372)
参考文献	(378)
附录 古今数学家简介	(381)

第一篇

数学史和古今数学思想概述

横跨 19、20 世纪的杰出数学家庞加莱(H. Poincarè)指出,“如果我们想要预见数学的未来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状。”

作为数学专业的大学生或数学教师,通过对数学史的学习,不仅有助于了解世界数学宝库中古今中外数学家的卓越贡献及其为科学事业献身的感人品格,激发自己为国争光的拼搏精神,培养顽强刻苦的毅力;更重要的是通过了解数学发展历程中形形色色五彩缤纷的数学创造和重大发现的事例,探索先人的数学思想方法,有助于掌握大至数学的发展规律,小至某些具体数学问题从提出到解决的过程所表现出来的内在联系,以便指导自己的学习与工作,为数学的研究和数学人才的培养作出贡献。

基于这些考虑,本篇首先介绍人们对“数学是什么”这样一个普通而深奥的问题的回答,包括历史的、近代的和现在普遍公认的定义,数学的基本内容和它的应用。然后,从第二章起介绍数学发展简史以及重要历史事例中体现出来的思想方法,特别强调数学思想在数学重大变革过程中所起的作用。在简略地阐述历史的同时,我们有所侧重地介绍了一些主要数学学科分支的新进展和新思想;在第六章,还选编了一些著名数学家、菲尔兹奖获得者对下一世纪数学发展的展望。另外,我们还列举了古今中外 80 名杰出的数学家和历届菲尔兹奖获得者的简况,把它们放在本书最后的附录中。

第一章 数学是什么

§ 1 数学的研究对象

数学是打开科学大门的钥匙.

——培根(R. Bacon)

数学是科学之王.

——高斯(C. F. Gauss)

一门科学只有成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步.

——马克思(K. Marx)

按照希尔伯特(近代杰出的数学大师)的想像,数学就像一块多面晶体,每一面都不仅有它自己的来源,也为天才而严肃的学者提出潜在的前景.我认为不存在适用于数学真理的所有侧面的唯一客观标准,只有数学本身和历史才能做评价.数学的自由度就在于此,并且仅在于此.这一点早就被G.康托尔看到了.

——亚历山德罗夫(P. S. Alexendrov)

数学被认为是单调乏味的学科,但如今已经越来越被认为是科学发展中具有高度重要性的学科.实际上,数学研究极大地开阔了人类思想的地平线,并且在某种程度上帮助人们理解自然界和物质世界.今天,它是表达严格科学的媒介.

——涅鲁(J. L. Nehru)

应用数学的传奇是知识的传奇之一部分.它是知识力的传奇,是为了能控制自然而揭示其奥秘的斗争的传奇.

——卡普尔(J. N. Kapur)

纯数学使我们能够发现概念和联系这些概念的规律,这些概念和规律给了我们理解自然现象的钥匙.

——爱因斯坦(A. Einstein)

数学是什么?对于学者和门外汉,这个问题都不是靠哲学来回答,而是靠从事数学的经验来回答的.

——科朗与罗宾(R. Courant & H. Robbin)

数学创造是令人神往的,五彩缤纷的创造活动层出不穷演出,数学创造的种类繁多,数学创造的天地广阔无际,数学创造的步幅正在加大.人类文明记载的数学已经有数千年的历史了,数学在人类身边几乎无时不在、无所不在地起作用.每一位数学家都知道自己是在从事数学研究工作,然而对于“数学是什么”,古往今来却有着许多不同的看法,有的甚至相差甚远.

古希腊的毕达哥拉斯学派把数(指自然数和有理数)看成万物之本,而所谓的数是先验的;柏拉图把数学看成“心智的产物”而且属于他的“理念世界”,认为数学也是先验的;亚里士多德是最早的一位具有唯物主义观点的大数学家,他反对柏拉图的先验论,认为数学只研究存在的一部分属性,提出了“数学是研究数量的科学”的定义.这是非常了不起的,这种观点直到19世纪仍为多数哲学家和数学家所接受.17世纪杰出的哲学家、数学家笛卡尔认为“数学是研究顺序与度量的科学”,其思想与亚里士多德基本一致,只是把数量分别解释为顺序与度量而已.

由于在19世纪之前,数学的主要成就是算术、几何、代数和微积分,它们研究的都是客观事物的形式和数量.对此,无产阶级革命导师恩格斯于19世纪中叶,关于数学研究的对象,提出了如下深刻而准确的概括:“纯数学的对象是现实世界的空间形式与数量关系.”恩格斯的观点得到数学家的普遍赞同.

19世纪以来,非欧几何、多维几何、复变函数论、泛函分析、抽象代数等新的数学领域相继出现且迅速发展,成果累累.与19世纪

之前的情况不同的是,这些新学科分支的产生似乎都没有什么直观背景.这不能不引起人们重新考察“数学是什么”这一问题.

对于这个问题的不同回答,在 20 世纪上半叶形成了不同的数学学派.

逻辑主义学派认为:数学无需任何自身特定的概念,只需由逻辑的概念导出数学的概念(例如“1”就是被导出的);数学的命题也只需由逻辑的命题出发,用纯演绎的办法推理出来.这就是说,整个数学是由逻辑学所派生出来的,数学只是逻辑学的一个分支.逻辑主义学派的主要代表罗素(Russell)和怀特海德(Whitehead)在《数学的原理》一书中说:“纯粹数学是所有形如‘ p 蕴涵 q ’的命题类.”

直觉主义学派认为:数学只能建立在一种结构性程序上,任何数学对象都必须有构造步骤或者判断准则.他们承认 $1, 2, \dots, n$, 这个 n 可以是任何自然数;但他们不承认“全体自然数”是个实在概念,他们不承认实在无穷.据此,他们对排中律、反证法在数学中的应用都有与众不同的看法.

形式主义学派认为:数学对象就是符号本身,数学的命题则是由一定法则组成的符号系列,这些符号和符号系统可能有直观的涵义,但这些涵义并不属于数学.数学本身就是一堆形式系统.各系统建立各自的逻辑,同时建立自己的数学,各有自己的概念,自己的公理,自己的演绎法则,以及由此而产生的定义和定理.现代形式主义学派代表科恩(H. Cohen, 美国数学家)认为,数学应当被看作一种纯粹的纸上符号游戏,对这种游戏,唯一要求就是它不会导致矛盾.

逻辑主义学派、直觉主义学派和形式主义学派通过数十年的激烈争论,始终未能获得一致意见.事实上,各派的观点都有片面性,因此谁也说服不了谁.20 世纪 40 年代,法国布尔巴基学派把数学定义为“数学是研究形式结构的科学”,反映了现代数学的水平,获得了许多学者的支持,影响很大.人们把它称为结构主义学派.由于结构主义也有缺点,比如它忽视应用,它不能概括数论的技巧,也不能描述多变的概率统计观点,因此结构主义试图概括整个数学的愿望最

终也未能实现。

尽管以上各学派对于“数学是什么”的回答都有片面性，都曾遇到过麻烦，但是他们的研究又都曾产生过积极的作用，从不同的侧面推动了数学的发展，各学派的主要代表都对数学的发展作出了重要的贡献。因此，对于“数学是什么”这个问题做认真而深入的探讨并非无意义的争辩。20世纪30年代，美籍德国数学家科朗与罗宾在他们的名著《数学是什么？》中给出了如下精辟的论述：

“数学，作为人类思维的表达形式，反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美境界的追求。它的基本要素是逻辑和直觉、分析和构造、一般性和个别性，虽然不同的传统可以强调不同的侧面，然而正是这些互相对立的力量相互作用以及它们综合起来的努力才构成了数学科学的生命、用途和它的崇高价值。”

这就是说，从数学发展史的高度来说，不同的传统可以强调不同的侧面，而正是各个历史侧面综合的结果才构成了数学科学的生命和价值。

随着现代科学技术的飞速发展，数学对科技的发展起着重要的推动作用；数学研究的对象似乎远离一般的空间形式和一般的数量关系，数学的抽象性和应用性向两个极端几乎同时有了巨大的发展。因此国内外许多科学家都认为，数学在科学中的地位发生了迅速的变化，成为和自然科学，社会科学，思维科学具有同等地位的大部类科学。在这种情况下，大部分数学家认为给出一个能够揭示现代数学本质的、公认的定义是必要的。

在20世纪50年代后的一段时间内，数学曾被定义为“量的科学”。这是因为数学是从量的方向反映客观实在的。也就是说，在数学抽象中我们仅仅保留事物的量的特性，而完全舍去了它们的质的内容。数学正是以此不同于其它学科。“量”的概念是随着人类实践活动的发展不断发展和演变的。例如，在19世纪，“量”这一概念的基本意义体现为“数”和“形”，因此，恩格斯当时给出上段的描述。到了20世纪中叶，人们根据当时的认识，提出数学是“研究量的科学”的观点，

前进了一大步。

但今天数学的发展又已突破这一历史的局限性。近二三十年内，国内外出现了许多新的数学定义，但都集中地体现为“模式论”。例如，著名的数学家斯蒂思明确地提出“数学是模式的科学”的观点。他说：“数学是模式的科学。数学家从数中、空间中和想像中寻找模式”。据此，模式论认为，数学理论阐明了模式间的关系；函数、算子和映射把一类模式与另一类模式联系起来从而产生了稳定的数学结构，数学的应用即运用这些模式对相应的自然现象作出“解释”和预言。模式提示了别的模式，并常常导致了模式的模式。正是以这种方式数学遵循自身的逻辑：以源于科学的模式为出发点，并通过补充所有的、由先前的模式导出的模式，使这种图像更加完备。

综合百家之精华进行深入的论证，我国杰出的数学家徐利治教授认为，“在数学中，我们是通过相对独立的量化模式的建构，并以此为直接研究对象，从事客观世界量性规律的研究的”。根据数学抽象的定性分析，他提出了如下关于数学的“定义”：**数学即是关于量化模式的建构与研究。**

由于这一“定义”同时表明了数学的研究对象与方法，因此，与前面提到的“数学是量的科学”的定义相比，这个定义更为恰当。

这里所谓“建构”活动，指的是数学抽象的特殊方法，它有如下四个特点：

一、这种建构是“逻辑建构”：这是由于数学对象是通过明确的定义得到构造的，而且，在进一步的研究中，我们只依照定义去演绎推理而不是按直观原型去做。

二、按定义方式不同，数学对象的建构区分为：初始概念（“借助于公理“隐蔽地”得到的定义，如欧氏几何中的点、线、面）及“派生概念”。

三、由于数学对象的逻辑建构是借助于纯粹的数学语言实现的，在研究过程中仅依靠于定义而不求助直观，所以，数学对象的明确定义事实上是一种重新构造的过程，它是理想化的（如无宽度的线），精