

第一讲

数学科学与国际数学家大会



被后人称为“数学王子”的德国大数学家高斯(Gauss, 1777—1855)曾说过：“数学是科学之王，数论是数学之王，它常常屈尊去为天文学和其他自然科学效劳，但在所有的关系中，它都堪称第一。”

随着科学技术的迅猛发展，数学的地位也日益提高，这是因为当今科学技术发展的一个重要特点是高度的、全面的定量化。定量化实际上就是数学化。因此，人们把数学看成是与自然科学、社会科学并列的一门科学，叫数学科学。

数学科学按其内容可分成五个大学科：纯粹(基础)数学(Pure mathematics)、应用数学(Applied mathematics)、计算数学(Computation mathematics)、运筹与控制(Operations research and control)和概率论与数理统计(Probability and mathematical statistics)。

数学发展的历史非常悠久，大约在一万多年前，人类从生产实践中就逐渐形成了“数”和“形”的概念，但真正形成数学理论还是从古希腊人开始的。公元前 300 多

年以前，希腊数学家欧几里得（Euclid，公元前 330—前 275）写了《几何原本》一书<sup>①</sup>，这是自古以来所有科学著作中发行最广、沿用时间最长的巨著。两千多年来，数学的发展大体可以分为三个阶段：17 世纪以前是数学发展的初级阶段，其内容主要是常量数学，如初等几何、初等代数；从文艺复兴时期开始，数学发展进入了第二个阶段，即变量数学阶段，产生了微积分、解析几何、高等代数；从 19 世纪开始，数学获得了巨大的发展，形成了近代数学阶段，产生了实变函数、泛函分析、非欧几何、拓扑学、近世代数、计算数学、数理逻辑等新的数学分支。

近半个多世纪以来，现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科分类与科学研究的方法。“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科

<sup>①</sup> 《几何原本》共 13 卷，包括 467 个命题。第 1~4 卷是直线和圆，第 5 卷是比例论，第 6 卷是相似形，第 7~9 卷是数论，第 10 卷是不可约通量，第 11~13 卷是立体几何和穷竭法

与日新月异的技术相结合，使用数值、解析和图形并举的方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域，在数学科学内也产生了新的研究领域和方法，如混沌 (Chaos)、分形几何 (Fractal geometry)、小波变换 (Wavelet transform) 等。可以说，数学发展至今，已经成为拥有 100 多个分支的科学体系，尽管如此，其核心领域还是：

代数学——研究数的理论；

几何学——研究形的理论；

分析学——沟通形与数且涉及极限运算的部分。

从第四讲到第七讲，我们将分别就这三个核心领域的基本内容及发展思路作简要的介绍。

下面我们来谈谈国际数学家大会及世界上重要的数学奖。

2002 年 8 月下旬在中国发生了一件让全世界数学界永远铭记的大事，即第 24 届国际数学家大会在北京举行，这是自 1897 年举行的第一届国际数学家大会至今 100

多年来首次在中国举行，也是第一次在发展中国家举行。那么什么是国际数学家大会呢？

1893 年为纪念哥伦布发现美洲大陆 400 周年，在芝加哥举办了“世界哥伦布博览会”，安排了一系列科学与哲学会议，数学家与天文学家的“国际大会”即在其列。哥廷根大学的克莱因 (Felix Klein)<sup>①</sup> 给大会带来了许多欧洲数学家的论文，并作了题为“数学的现状”的演讲。他强调“具有极高才智的人物在过去开始的事业，我们今天必须通过团结一致的努力和合作以求其实现”。Klein 演讲之后，数学家与天文学家分组活动，数学组有 45 名数学家，其中来自美国以外的只有 3 人(含 Klein)，这是数学史上第一次超越国界的数学家会议。但真正意义上的国际数学家大会是 1897 年在瑞士苏黎世召开的，后来被认定为“第一届国际数学家大会”。在这次会上通过的章程规

<sup>①</sup> 克莱因 (1849—1925) 是 19 世纪后半期在德国起领导作用的数学家之一，是哥廷根大学数学学派的创立者。

定，两次大会之间可间隔 3 至 5 年，但从 1900 年第二届大会开始就形成了每 4 年举行一次的惯例。在国际数学家大会的历史上特别重要的一次会议就是 1900 年在巴黎举行的会议，因为在这次会上法国数学家希尔伯特 (David Hilbert, 1862—1943) 作了一个题为“未来的数学问题”的重要报告，他在报告中提出 23 个重大问题作为下一个世纪的研究目标（见附录），这大大地推动了数学的发展。

除了这次大会之外，值得特别提出的是 1924 年在加拿大多伦多举行的第七届国际数学家大会，这是第一次在欧洲以外的国家举行的会议。加拿大数学家、大会主席菲尔兹 (J. C. Fields) 为安排会议日程和筹集资金，奔波于大西洋两岸，行程达数千公里。在这次大会上 Fields 开始考虑设立一项国际数学奖，即后来的 Fields 奖。

由于第一次和第二次世界大战的影响，1916 年的大会以及从 1936 年在挪威奥斯陆第十届大会以后的 14 年中，有三届大

会都未如期召开，直到 1950 年才在美国坎布里奇举行了第十一届大会。

世界上的数学奖共有 50 余项，其中最受人关注的是菲尔兹奖、沃尔夫奖和奈望林纳奖。

菲尔兹奖是以已故加拿大数学家 John Charles Fields 命名的。菲尔兹对数学事业的远见卓识、组织才能和勤恳的工作推动了数学的发展，他强烈主张数学发展应该是国际性的。为了主持筹备国际数学家大会，他积劳成疾，当他得知这次大会的经费有结余时，就萌发了把它作为基金设立一个国际数学奖的念头。为此他积极奔走于欧美各国以谋求广泛支持，并打算于 1932 年在苏黎世召开的第九届大会上提出建议。但未等到大会开幕他不幸去世了。去世前他立下遗嘱，把自己的遗产和前述的剩余经费托人转交给第九届大会，大会接受了他的建议，并于 1936 年开始颁奖。这个奖只授予 40 岁以下的数学家，颁奖仪式都是在每届国际数学家大会开幕式上隆重

举行，先由执委会主席宣布名单，接着由主办、国的重要人士或评委会主席授奖，最后由一些权威数学家简评获奖人的主要成就。

菲尔兹奖是一枚金质奖章和 1 500 美元，但它的地位却能与诺贝尔奖相提并论，这是因为：第一，它是由数学界的国际权威学术团体——国际数学联盟主持，从全世界的第一流数学家中评选出来的；第二，它是在每四年才召开一次的国际数学家大会上颁发，每次至多 4 名，获奖机会比诺贝尔奖还少；第三，获奖人的才干出色，在国际社会享有很高的声誉。

美籍华裔数学家丘成桐于 1983 年获得了此奖。

由于菲尔兹奖只授予年轻人，因此有两个局限：(1) 不足以代表一位数学家的全部成就；(2) 年岁较大的数学家没有获奖机会。从 1978 年起，以色列的沃尔夫 (Wolf) 基金会开始颁发国际沃尔夫数学奖，每次奖励 10 万美元，授予当代最有影响的数学

家，每年颁发一次。1983 年旅美中国数学家陈省身荣获此奖。

除了菲尔兹与沃尔夫两大奖外，还有一个大奖，即奈望林纳（Rolf Nevanlinna）奖，由芬兰赫尔辛基大学出资设立，鼓励青年数学家在信息科学中的数学贡献，1982 年首次颁发，这个奖也是在国际数学家大会上颁发的。


第 24 届国际数学家大会将菲尔兹奖颁给了法国数学家洛朗·拉弗阁和俄罗斯数学家弗拉基米尔·沃沃斯基，将奈望林纳奖颁给了美国麻省理工学院迈度·苏丹。

附：希尔伯特（Hilbert）在 1900 年国际数学家大会上提出的 23 个数学问题

1. 康托尔（Cantor）的连续统基数问题；
2. 算术公理的相容性；
3. 两个等底等高的四面体体积之相等；
4. 直线作为两点间的最短距离的问题；

5. 李( Liè ) 的连续变换群概念，不要定义群的函数的可微性假设；
6. 物理公理的数学处理；
7. 某些数的无理性和超越性；
8. 素数问题（包括黎曼 (Riemann) 猜想)；
9. 任意数域中最一般的互反律之证明；
10. 丢番图 ( Diophantus ) 方程可解性的判别；
11. 系数为任意代数数的二次型问题；
12. 阿贝尔 ( Abel ) 域上的克罗内克 (Kronecker) 定理在任意代数有理域上的推广；
13. 证明不可能用仅有两个变量的函数解一般的七次方程；
14. 证明某类完全函数系的有限性；
15. 舒伯特 ( Schubert ) 计数演算的严格基础；
16. 代数曲线和曲面的拓扑问题；
17. 正定形式的平方表示式；

18. 由全等多面体构造空间；
19. 正则变分问题的解必定是解析的吗；
20. 一般边值问题；
21. 具有给定单值群的线性微分方程存在性的证明；
22. 通过自守函数使解析关系单值化；
23. 变分法的进一步发展。

A large, stylized hourglass graphic in a light gray color, centered on the page. The hourglass is composed of two bulbous chambers connected by a narrow neck. The top chamber is wider than the bottom chamber. The entire graphic is rendered with a slight graininess, suggesting it might be a scan of a printed page.

**第二讲**

**数学是什么？**



恩格斯曾说：“数学是现实世界中的空间形式与数量关系。”这说明数学的研究对象是“形”与“数”。其实，近二三十年来，由于科学技术，特别是信息技术的迅猛发展，产生了“混沌 (Chaos)”、“分形几何 (Fractal Geometry)”等新的数学分支，而这些内容已经超出一般意义下“形”与“数”的范畴。今天，我不想从数学的研究对象或者从数学的内容来回答“数学是什么”这个问题，而是从外部世界，即从数学与其他学科之间的关系来说明这个问题。

### 一、数学是一种语言，是一切科学的共同语言

享有“近代自然科学之父”尊称的大物理学家伽利略 (Galileo) 说过：“展现在我们眼前的宇宙像一本用数学语言写成的天书，如不掌握数学符号语言，就像在黑暗的迷宫里游荡，什么也认识不清。”由于在量子电动力学方面做出突出贡献于 1965 年获得了 Nobel 奖的物理学家费格曼 (Richard

Fegman 曾说过：“若是没有数学语言，宇宙似乎是不可描述的。”最著名的例子是有关牛顿 (Issac Newton) 的。他想用一理论框架来表示在重力作用下物体的运动，这包括 Kepler 行星运动法则，这种渴望使他建立了万有引力定律和微积分学，那是科学史上伟大成就之一。另一个例子是有关爱因斯坦 (Albert Einstein) 的传说。据说 Einstein 曾花了数年时间试图形成引力实际上只是空间的曲率这种可能性，但他不知道如何从数学上加以表述。一天，他求助于他的密友格罗斯曼 (Marcel Grossman) 时说：“Grossman，你必须帮助我，否则我会发疯的。”Grossman 就将黎曼 (Bernhard Riemann) 关于弯曲空间的工作 (后称为 Riemann 几何学) 告诉他，这才使 Einstein 得以继续广义相对论的研究。其实，Riemann 几何在 Einstein 需要它之前 60 年已经产生了。

另一个 Nobel 物理学奖获得者温伯格 (Steven Weinberg) 也说过：“这是不可思议的，当一个物理学家得到一个思想时，然后

却发现在他之前数学家已经发现了。”一个著名的例子是关于群论的。群论是由法国数学家伽罗瓦 (Evariste Galois) 在 19 世纪初发明的，目的是要解决高于四次的代数方程能否用代数方法求根的问题。这是一个纯粹的数学问题，当物理学家在 20 世纪上半叶发现群论时，他们发现这正是所需要的数学语言，利用它可以统一伟大的能量守恒定律、动量守恒定律、自旋守恒定律、电荷守恒定律等理论。这些定律是客观世界对称性的反映。

社会的数学化程度正日益提高，数学语言已成为人类社会中交流和贮存信息的重要手段。

## 二、数学是一把钥匙，一把打开科学大门的钥匙

在 17 世纪工业革命时代，弗·培根 (F. Bacon) 曾提出“知识就是力量”的响亮口号，同时还说“数学是打开科学大门的钥匙”。

回顾科学的发展历史，凡具有划时代