# 第一章　数学发展的历史

## 第一节　五个历史阶段

数学是一门研究现实世界的数量关系和空间形式的科学．比如中小学所学的算术、代数是研究数量关系的，几何是研究空间形式的．整个数学，包括初等数学和高等数学都是以数和形作为研究对象的．确切地说，数学是以数和形的性质、变化、变换和它们的关系作为研究对象，探索它们的有关的规律，给出对象性质的系统分析和描述；在这个基础上分析实际问题，给出具体的解法．

数学又是一门古老的学科，它伴随着人类文明的产生而产生，至少有四、五千年的历史．但它不是某一个民族或某一个地区的产物，而是世界许多民族、诸多地区世世代代的产物，是人们在生产斗争和科学实践中逐渐形成和发展而成的．数学的最初的概念和原理在远古时代就萌芽了，经过四千多年世界许多民族的共同努力，才发展到今天这样内容丰富、分支众多、应用广泛的庞大系统，一般认为，从远古到现在，数学经历了五个历史阶段．

一、数学萌芽时期(公元 6 世纪以前)

在人类历史上，这是原始社会和奴隶社会的初期．这个时期数学的成就以巴比伦、埃及和中国的数学为代表．

古巴比伦是位于幼发拉底河和底格里斯河两河流域的一个

文明古国，相当于现在的伊拉克一带．巴比伦王国形成于约公元前19世纪，从出土的古巴比伦的泥板上的楔形文字中发现，古巴比伦人具有算术和代数方面的知识，建立了60进位制的记数系统，掌握了自然数的四则运算，广泛使用了分数，能进行平方、立方和简单的开平方、开立方运算．他们迈出了代数的第一步，能用一些特别的术语和符号代表未知数，能解特殊的几种一元一次、二元一次方程和一元二次方程，甚至某些三次、四次（可化为二次的）和个别指数方程，并且能够把它们应用于天文学和商业等实际问题中去．四千年前的泥板中有平方表、立方表和乘法表．几何方面掌握了简单平面图形的面积和简单立体体积的计算方法．

对古埃及数学的认识主要根据两卷用僧侣文写成的纸草书，一卷藏在伦敦，叫莱因德纸草书，一卷藏在莫斯科．莱因德纸草书的内容是从公元前2200年的旧纸草书转录下来的，书名是《阐明对象中一切黑暗的秘密的事物的指南》，全书分为算术、几何、杂题三章，共有题目85个，是当时一种实用计算手册．

古埃及人创造了一套1到1000万的有趣的象形数字记号，但没有位置值的方法．有自然数和分数的算术四则运算，但分数的表示和运算方法繁杂，没有成套的运算符号．有简单的开平方方法，能解一些一元一次方程问题，有等差、等比数列的初步知识．代数知识和技能比巴比伦人低，但在几何方面超过了巴比伦人．尼罗河定期泛滥，水退后要重新丈量土地，测地知识逐渐发展成为几何学．莱因德纸草书上有19个关于土地面积和谷仓容积的问题，都给出了准确答案．埃及人知道计算矩形、三角形和梯形面积，有计算立方体、柱体和其他圆形体积的法则，并能把天文学知识和几何知识结合起来建造神庙和金字塔．

中国是最早使用十进位值制记数法的国家．早在三千多年

前的商代中期，在甲骨文中产生了一套十进制数字和记数法，最大的数字为三万．与此同时，殷人用十个天干和十二个地支组成六十甲子，用以记日、记月、记年．用阴（ – –）、阳（—）符号构成八卦表示 8 种事物，后来发展为 64 卦．春秋战国之际，筹算已普遍应用，其记数法是十进位值制．数的概念从整数扩充到分数、负数，建立了数的四则运算的算术系统．几何方面，4500 年前就有测量工具规、矩、准、绳，有圆方平直的概念．《史记》记载，夏禹治水“左准绳，右规矩”．公元前 1100 年左右的商高知道“勾三股四弦五”的勾股定理．春秋末战国初的墨子在《墨经》中给出了一些数学定义，包含有许多算术、几何方面的知识和无穷、极限的概念．

在这个历史时期，由于生产水平很低，商品生产极其有限，社会实践对数学的要求不高．因此只是在长期实践中逐渐形成了数的概念，初步掌握了数的运算方法，积累了几何学的一些知识．但这些知识是片断的、零碎的，没有形成体系，缺少逻辑因素，没有命题的证明．数学这门学科的最显著的特点之一的演绎推理和公理法在这个时期没有出现．

二、初等数学时期（从公元前 5 世纪到公元 17 世纪）

在人类历史上，这是发达的奴隶社会和整个封建社会时期．这个时期外国数学发展的中心先在古希腊，后在印度和阿拉伯国家，之后又转到西欧诸国．这时期的中国数学独立发展，在许多方面居世界领先地位．在数学内容上，2 世纪以前是几何优先发展阶段，2 世纪以后是代数优先发展阶段．如果说古希腊的几何证明的较突出，则中国和印度的代数计算可与其媲美．这个时期的数学发生了本质的变化，数学（主要是几何学）由具体的、实用阶段发展到抽象的、理论阶段；从以实验和观察为依据的经验学科过渡到演绎的科学，并形成了自己的体系，初等几何、算术、

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

初等代数和三角学都已成为独立的学科.这个时期的研究内容是常量和不变的图形，因此又称为常量数学，是现在中小学数学课程的内容.

从公元前6世纪到公元前3世纪是希腊数学的古典时期.这段时期，古希腊形成了很多学派，广泛探讨哲学和自然科学问题,促进了数学理论的建立.在数学方面主要在初等几何取得了辉煌的成就，不仅创造了逻辑推理的演绎方法，而且使几何形成系统的理论.在数的研究方面，使算术应用过渡到理论讨论，建立了整除性理论，产生了数论.数学成就的精华是欧几里得的《几何原本》和阿波罗尼斯的《圆锥曲线论》.希腊数学的第二个时期，即亚历山大里亚时期（公元前3世纪到公元后6世纪）的数学特点是基础研究与应用紧密结合，几何学开始了定量的研究，阿基米德求面积与体积的计算接近于微积分的计算方法.丢番图发展了巴比伦的代数，采用了一整套符号，使代数发展到一个新阶段.托勒密等人奠定了球面三角和平面三角的基础.公元6世纪，由于外族人侵和古希腊后期数学缺少活力，古希腊数学衰落了，数学发展的中心转移到了东方的中国、印度和阿拉伯及中亚国家.

公元2~12世纪是印度数学高潮时期，印度人大大推进了算术和代数的进展.他们最先制定了现在世界通用的印度——阿拉伯数码（一般称为阿拉伯数码，实际上是印度人发明的，阿拉伯人只不过把这些数码传入了西方，欧洲人就把这些数码叫阿拉伯数码）及十进制记数法，正确使用了零，形成了整套计算技术,建立了使用分数、负数、无理数的代数学,给出了二次方程和不定方程的解法.

从9世纪开始，外国数学发展的中心转向了阿拉伯和中亚细亚地区.阿拉伯数学起着承前启后的作用，阿拉伯人大量搜

集、翻译古希腊的著作，并把这些著作及印度数码、计数法及中国的四大发明(火药、印刷术、指南针和造纸术)传到欧洲．他们发展了代数，建立了解方程的方法，得到一元二次方程的求根公式，并把三角学发展成一门独立的系统的学科．1427 年伊朗数学家阿尔·卡西求得圆周率的 17 位准确值．

独立发展的中国数学从公元 1 世纪到 13 世纪一直处于世界领先地位．公元 1 世纪的《九章算术》的出现，标志中国古代数学体系的形成，书中有世界最先进的分数四则运算、各种面积、体积的计算、最早引入负数和线性方程组的解法．魏晋时的刘徽为中国古代数学体系奠定了理论基础，并创立了割圆术和重差术．南北朝的祖冲之用割圆术求得圆周率的 7 位准确值，领先世界一千多年．到宋元时期，中国古代数学取得一系列辉煌成果，秦九韶的剩余定理和高次方程的数值解法、贾宪和杨辉的二项系数表、李冶的天元术、朱世杰的四元术、朱世杰和沈括的等差级数求和都领先西方五百多年．明清以后，中国数学缓慢发展，逐渐落后西方．

中世纪（5～15 世纪）的欧洲，由于罗马和基督教的统治使欧洲数学一直处于落后状态．文艺复兴时期(15～17 世纪上半叶)欧洲数学开始繁荣，他们吸取古希腊和东方数学的精华，取得了许多重要成就．在代数方面，韦达等系统地使用符号，使代数产生巨大变革。意大利数学家得到三次、四次方程的公式解法、韦达得到根与系数之间的关系定理、笛卡尔引人了待定系数原理、帕斯卡得到指数是正整数的二项式展开定理，牛顿又把指数推广到分数和实数．1654 年，巴斯加、费尔马得到排列组合公式．17 世纪上半叶，初等代数的理论和内容才全部完成了．初等代数的建立，标志着常量数学也就是初等数学时期的结束，接着是向高等数学——变量数学过渡．

三、变量数学时期（17世纪上半叶～19世纪20年代）

这是社会生产力急剧增长、自然科学蓬勃发展的时期．变量数学是以笛卡尔的解析几何为开始的．1637年，笛卡尔通过引进坐标把几何曲线表示成代数方程，然后通过方程的研究来揭示曲线的性质．并把变量、函数引进数学，把几何和代数密切地联系起来，这是数学史上的一个转折点，也是变量数学发展的第一个决定性步骤．第二个决定性步骤是牛顿和莱布尼兹在17世纪后半叶各自独立地建立了微积分，由于力学问题的研究、函数概念的产生和几何问题可以用代数方法来解决等的影响，促使了微积分的产生．17世纪还创立了概率论和射影几何等新的数学学科．17世纪的另一特点是代数化的趋势．古希腊数学的主体是几何学，三角学从属于几何，代数问题也往往要用几何方法论证．17世纪代数比几何占有重要的地位，几何问题常常反过来用代数方法去解决．

17世纪是变量数学的产生阶段，18世纪是变量数学发展阶段．在18世纪，英国开始工业革命，生产力迅速提高，刺激数学向前发展．法国和德国相继兴起的启蒙运动，反对封建制度和宗教权威，提倡民主自由，人类思想进一步解放，为数学的发展创造了良好的条件．微积分产生若干新科目，如微分方程、变分法、级数论、函数论等，形成广阔的分析领域．18世纪的欧洲大陆成为分析数学的中心，出现了贝努利家族、欧拉、拉格朗日等一大批著名数学家．18世纪的数学有三个特征：第一是数学家从物理、力学、天文学的研究中发现并创立了许多数学新分支，如变分法、无穷级数、常微分方程、偏微分方程、微分几何和高等代数等．第二个特征是自古以来的几何论证方法在17世纪被代数的方法所代替，到18世纪又被分析方法代替了，代数也变成从属于数学分析．第三个特征是直觉性和经验性．因为缺乏严密逻辑

和理论基础，由物理见解所指引，所以是直观的，又因为领域太广阔,还来不及打基础,因而是不严密的.数学分析中任何一个比较细微的问题，如级数和积分的收敛性、微分积分的次序交换、高阶微分的使用，以及微分方程解的存在性问题，几乎无人问津，结果出现谬误越来越多的混乱局面.为此,到19世纪在德国数学家的倡导下，对数学进行了一场批判性的检查运动.这场运动不仅使数学奠定了坚实的基础，而且产生了公理化方法和许多新颖学科.

四、近代数学时期(19世纪20年代~20世纪40年代)

近代数学时期是数学的全面发展和成熟阶段，数学的面貌发生了深刻的变化，数学绝大多数分支在这个时期都已形成，整个数学呈现全面繁荣的景象.

变量数学时期兴起的许多数学分支,蓬勃地向前发展,内容不断充实、扩大,方法不断地更新.到19世纪初,数学分析形成了广阔的分析领域，数学的许多新分支像雨后春笋一样出现，数学园地已丰茂成林，数学的宝藏似乎已挖掘殆尽.但从19世纪20年代以后，数学又发生了一系列的革命性的变化，这就是几何的非欧化——罗巴切夫斯基几何的出现；代数的抽象化——伽罗华群论开创了抽象代数；分析的严格化——波尔察诺和柯西奠定了微积分的严格逻辑基础.数学又迈进了一个新的时期——近代数学时期.在这一时期,新思想、新概念、新方法不断涌现.19世纪是几何复兴时期，继罗巴切夫斯基几何之后，又出现了更广泛的一类非欧几何——黎曼几何，并产生拓扑流形的概念.克莱因提出爱尔朗根纲领，用群的观点统一了各种度量几何.在这个时期还产生了一系列新的几何分支——画法几何、射影几何、微分几何和拓扑学.希尔伯特的《几何基础》不仅使古老的几何——欧几里得几何的基础得到完善，而且开始了数学公

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

理化运动.在代数方面，不仅开创了抽象代数，而且产生了以方程论为主要内容的、包括行列式与矩阵理论、二次型和线性变换在内的高等代数.数论方面产生了解析数论，分析方面产生了微分方程、积分方程、复变函数论、实变函数论和泛函分析.分析的严格化是从波尔察诺和柯西开始的，他们用极限概念给出了导数和连续的定义.1856 年外尔斯特拉斯发展了柯西极限的概念,用 $\varepsilon$—$\delta$ 语言给出了函数连续性的定义，确定了一致性收敛的概念.1872 年德国数学家戴德金、康托尔、外尔斯特拉斯建立了实数的严格定义.1881 年皮亚诺给出了自然数的公理化方法，为分析的算术化提供了条件.从此,数学分析的理论有了精确和坚实的基础.19 世纪末，关于数学基础的讨论形成了三大学派,以罗素为代表的逻辑主义学派、以布劳维尔为代表的直觉主义学派和以希尔伯特为代表的形式主义学派，三大学派激烈论战，对数学基础进行了深入的考察.集合论的建立、数理逻辑、罗素悖论、哥德尔定理的出现更深化了数学基础的研究.

这个时期,不仅数学成果硕果累累,分支众多,分科越来越细,而且人才辈出.没有哪个时期像近代数学时期那样出现这么多杰出的数学巨人，并形成许多著名的学派，如法国数学学派、哥庭根学派和后来崛起的波兰学派、彼得堡学派、莫斯科学派以及布尔巴基学派.

五、现代数学时期(20 世纪 40 年代以来)

第二次世界大战以后，科学技术突飞猛进，原子能的利用、电子计算机的发明、空间技术的发展，促使数学发生剧烈的变化数学的三大特点：高度的抽象性、体系的严谨性和应用的广泛性更明显地表露出来。电子计算机的出现产生了计算机科学，同时也产生了许多边缘学科,如人工智能、机器翻译、机器证明、图形识别等.应用数学涌现出种类繁多的新分支，如对策论、规

划论、排队论、最优化方法、运筹学、信息论、系统论、控制论和生物数学、经济数学等。纯粹数学不断向纵深发展，集合论的观点渗透到各个领域，公理化方法日臻完善，数理逻辑和数学基础已成为整个数学大厦的基础，而现代数学理论的三大支柱是泛函分析、抽象代数和拓扑学，代数拓扑和微分拓扑成为数学的主流。

20世纪的数学出现了三种新趋势：一是不同分支交错发展，多种理论高度综合，数学逐步走向统一的趋势。自从克莱因用‘群’的观点统一了当时的各种度量几何以后，许多数学家试图提出各种不同的方案来统一整个数学。1930年美国的毕尔霍夫提出“格”的概念统一代数系统的各种理论和方法，1938年法国布尔巴基学派提出“数学结构”的观点来统一整个数学，1948年爱伦伯克和桑·麦克伦提出用范畴和函子理论作为统一数学的基础。二是边缘学科、综合性学科和交叉学科与日俱增的趋势。现代数学在代数、几何、分析等原有基础学科的邻接领域产生出一系列的边缘学科，综合性学科是以多学科的理论知识和方法对特定的数学对象进行研究。比如，随机函数的微分方程研究产生了概率论和分析学的综合性学科分支——随机微分方程。数学与其他学科产生许多交叉学科，如计算物理学、生物数学、经济数学、数理语言学、计算化学等。三是数学的表现形式、对象、内容和方法日益抽象化的趋势。代数由方程求解的一般研究引出群论并发展成抽象代数学，使代数学转向对代数系统结构的研究。几何由非欧几何的发现拓广了人们的空间观念，形成了对各种抽象空间的研究。分析学由于集合论、测度论和点集拓扑形成一般抽象化的势头，使分析学的基础发生重大变化，经典分析的面貌大为改观。不仅数学表现形式日益抽象，而且很多抽象的性质、结构、形式又成为数学研究的对象。现代数学研究的

对象包括各种代数结构、几何结构、还包括同态同调等各种关系以及各种性质.甚至各种属性、各种关系的类和属性以至转移、映照等等也都成为数学所研究的纯粹的“量”.数学研究的对象的这种不断扩大与日益抽象的趋势，正是科学研究的不断深入、扩大所引起的，也是现代数学进展的重大标志.

60 年代以后数学界的思想异常活跃，出现了多种新思潮——非标准分析、模糊数学、突变理论和泛系理论等.非标准分析使无穷小重返数坛，微积分的基础又得到新发展.突变理论使数学由研究连续变量和平滑过程发展到研究不连续（突变）过程.模糊数学使数学由研究精确领域发展到研究模糊领域和模拟人脑功能的领域.泛系理论应用广泛，在科学方法、思维科学数学化方面有重要意义.现代科学技术和生产实践将向数学提出更多、更复杂的新课题,必将产生许多更深刻的数学思想和更强有力的数学方法,数学将向更高、更广、更深的领域去探索、去开发，成为分析和理解世界上各种现象的工具和手段.

上面我们按照历史的线索,按时间顺序,简要叙述了整个数学发展的历史.为了对数学的发展获得一个全面、客观而准确的整体观念,下面我们再以区域线索、数形发展线索、数学思想演变的线索、数学方法论的线索这四个方面来进一步提示数学发展的概貌，

## 第二节　数学中心的转移

区域线索，就是以数学发展的中心转移情况为线索.古巴比伦、埃及和中国是数学发展最早的文明古国.四千年前的泥板证明古巴比伦最早获得算术和代数方面的知识，莱因德纸草书说明古埃及的几何和算术较发达.公元前 14 世纪的甲骨文表明中

国最早使用十进位制记数系统.到公元前 5、6 世纪,数学的中心开始转到了古希腊，巴比伦和埃及的数学在希腊汇合起来，经过古希腊哲学家和数学家的过滤和澄清，形成了长达一千年的光辉灿烂的古希腊数学.古希腊充分发展了几何，使数学从感性阶段发展到理性阶段.随着古希腊数学的终结，数学发展的中心转向东方，中国和印度成为世界数学发展的中心.《九章算术》标志着中国古代数学体系形成，宋元数学的杰出成就，使中国数学在当时世界上处于遥遥领先的地位.公元 1 世纪到 13 世纪,中国数学一直处于世界领先地位.公元 2 世纪到 12 世纪是印度数学高潮时期，早期的印度数学受巴比伦和希腊的影响，后来又受到中国的影响.印度人向希腊人学习几何，向巴比伦人学习代数，并从中国得到借鉴，进一步发展了算术和代数.中国和印度数学都注重计算技术，发展算术和代数.从 9 世纪开始,外国数学发展的中心转向了阿拉伯和中亚细亚地区.阿拉伯数学在世界数学史上起着承前启后，继往开来的作用.阿拉伯人不仅大量收集和翻译古希腊的著作，把印度的记数法和中国的四大发明传到落后的欧洲，而且发展了代数和三角学.他们使代数从古希腊几何中分化出来变成为一门独立的学科——解方程的科学，使三角从几何和天文学中分化出来也发展成为一门独立的三角学.阿拉伯的文明是在接受外来文化中迅速发展起来的，正当欧洲处在漫长黑暗中世纪时期，阿拉伯世界的科学文化却后来居上，成了当时除中国以外的人类科学中心，阿拉伯文明在公元 1000 年前后达到了顶峰,直到 13 世纪还充满活力，阿拉伯的学术传播四方,欧洲受益最大.

基督教统治的中世纪的欧洲数学一直处于落后状态，直到文艺复兴时期，意大利成了数学发展的中心.文艺复兴是 15 世纪下半叶从意大利开始的，出现了复兴古代艺术和科学的文化

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

运动,在文学、绘画、建筑、科学各领域都取得了巨大成就.数学方面.意大利数学家找到了三次、四次方程的公式解法，欧洲人在数学上第一次超过了东方人，并建立起了能够超过东方人的信心.欧洲人摆脱了中世纪束缚思想的精神枷锁，恢复了认识自然的数学科学精神，创立了数学演绎和实验相结合的方法，从此欧洲数学开始突飞猛进，成为世界数学的中心.到了 17 世纪,欧洲数学实现了初等数学向变量数学过渡的伟大转变.从 18 世纪开始，欧洲数学中心转移是与资产阶级革命中心转移密切相关.英国工业革命后是世界数学的中心.1789 年法国资产阶级大革命所造成的民主精神和重视数学教育的风尚，产生了一大批世界一流的数学家，法国成为函数论王国，法国数学取代英国而雄踞欧洲之首.19 世纪 70 年代德国资产阶级统一运动的完成，思辩哲学强调事物内部矛盾促进事物发展的思想，对纯粹数学的发展产生巨大影响.哥庭根学派使德国数学很快与法国数学并驾齐驱,并在 20 世纪初超过法国,成为世界数学的中心,哥庭根大学成为世界数学家的摇篮.俄国的数学有着良好传统，但俄国资本主义发展比西欧各国较晚.19 世纪中叶，俄国农奴制发生危机，革命民主思想逐步形成，唯物主义思潮成为俄国哲学的主要内容.在这种历史背景下，有着理论与实践相结合的传统的彼得堡学派在函数逼近论、微分方程稳定性理论、概率论方面取得领先世界的成果.十月革命后，莫斯科的函数论学派取代法国居世界首位，社会主义的苏联成为世界数学的中心之一.第二次世界大战以后美国成为世界头号强国，大量吸收世界最优秀的数学人才，并为数学的发展创造了良好的条件，美国成为当今世界数学的中心.数学中心转移的历史表明，数学发达的中心与经济发达中心在地理上总是吻合的.

# 第三节　数形概念的深化

数学的发展是以数和形两个基本概念为主干的，整个数学就是围绕数与形两个概念的提炼、演变和发展而发展的．数学发展史中一直存在着数与形两条并行不悖的发展路线，一条以发展计算为中心的算术代数路线，一条以发展形为主的几何路线．前者有两个源头，一个源头是独立发展的中国数学，另一源头是古巴比伦数学．这一路线在古希腊亚里山大里亚时期进一步得到发展，在中国、印度和阿拉伯国家发扬光大，到 17 世纪的欧洲才形成完整的初等代数学．“形”的路线是以埃及数学为源头，在古希腊取得辉煌成就的初等几何学．这两种数学在 17 世纪在欧洲汇合，经过进一步发展，导致了解析几何的产生，产生了变量数学．随后由于微积分的产生，开始了数学的巨大变革，产生了数学分析这一广阔的领域，形成了代数、几何、分析三足鼎立的形势．18、19 世纪由于数学的不断分化，代数、几何、分析形成了各自不同的研究领域．数学研究的对象日益扩展，数与形的概念不断扩大，日趋抽象化，以至不再有任何原始计算与简单图形的踪影了．

几何不仅研究物质世界的空间形式，而且研究同空间形式和关系相似的其他形式和关系，产生了各种新“空间”罗巴切夫斯基空间、射影空间、四维的黎曼空间、各种拓扑空间等都成为几何研究的对象．现代化数学所考察的对象是具有更普遍的“量”，如向量、矩阵、张量、旋量、超复数、群等，并且研究这些量的运算．这些运算在某种程度上和算术中的四则运算类似，但复杂得多．矢量是简单的例子，矢量的加法是按照平行四边形法则相加的，在现代代数中进行的抽象达到这样的程度，以致“量”这

个术语也失去本身的意义,而一般地变成讨论“对象”了.对于这种“对象”可以进行同普通代数运算相似的运算.比如,两个相继进行的运动相当于一个总的运动，一个公式的两种代数变换相当于一个总的变换等等.和这相应，可研究运动或变换所特有的一类“加法”.其他类似的运算也是这样在广泛抽象形式上研究的.分析的对象也大大扩展.不但“数”是变的,在泛函分析中,函数本身也被看作是变的.某一给定函数的性质在这里不能单独地确定，而是在这个函数对另外一些函数的关系上确定的.因此考察的已经不是一些单个的函数，而是所有以这种或那种共同性质作为特征的函数的集合.函数的这种集合结合成“函数空间”.比如，考察平面上所有曲线的集合或一定力学系统的所有可能运动的集合，在单个曲线或运动用其他曲线或运动的关系上来确定曲线或运动的性质.现代数学常用的方法,是把一个个函数看作一个个“点”,而某类函数的全体看作一个“空间”,函数间的相异程度看作“点”之间的“距离”,由此得到各种无穷维的函数空间.比如一个微分积分方程组的求解，往往归结为相应函数空间中一个几何变换的不动点问题.数学对象的扩展使得数学应用的范围也大大扩展了.数学观念广泛引入物理学中,爱因斯坦把黎曼几何应用到广义相对论,冯·诺伊曼把希尔伯特空间应用到量子力学，杨振宁和米尔斯把纤维丛理论应用到规范场等等.

从 19 世纪下半叶开始,即从克莱因用“群”的观点统各种度量几何开始,到康托尔建立集合论和公理化运动后,数学走向综合的趋势越来越明显.现代数学的发展促使数和形的概念不断深化,形成了多种多样的边缘学科.这些学科不仅没有加深各学科间的分离,而且导致了各学科的互相联系和渗透,使以前基本分离的领域互相沟通了起来，并且填满了基本学科之间中断了

的部分.各门学科形成了一个牢固联系的有机整体.边缘学科不仅在相互邻接的领域产生，而且在相距很远的领域之间也不断发生.基础学科相互渗透产生了许多综合性学科.综合性学科的出现和蓬勃发展，标志着现代数学的发展已由学科领先阶段过渡到课题领先的新阶段.各学科之间的相互渗透，是数学中数和形两大基本概念紧密联系在一起的辩证法的反映.各门科学的数学化,使得数学和其他学科交叉结合,产生许多交叉学科.许多学科又派生出许多小的学科分支，这些分支学科不仅促进了各门学科的发展，而且也丰富和发展了数学学科本身.然而,不管数学各个学科经历着怎样的分、合、变、革,也不管数学内部怎样此消彼长，数学王国的疆土虽然在不断扩张之中，但始终是由数与形两大基本概念所控制.

## 第四节　数学思想的演变

数学思想的发展大致可划分为常量数学思想、变量数学思想、随机数学思想和模糊数学思想四个阶段.每个阶段不仅体现数学思想发生质的变化，而且标志着数学研究对象和方法的重大变化.

常量数学思想阶段即初等数学时期，数学研究的对象是不变的数量关系和固定的空间形式，数与形是分开研究的.研究数的学科是算术和代数，算术是研究离散固定的数，代数研究方程的固定解，几何则是研究平面或空间的固定图形.常量数学思想是与当时的生产和科学发展的水平相适应的，是对现实世界固定的数与形关系的抽象，是孤立、静止地研究现实世界的数量关系.

变量数学思想阶段是从 17 世纪上半叶开始的，这时资本主

义处于上升时期，社会生产力急剧增长，自然科学蓬勃发展，对天体运行轨道推算、航海导航、抛射体弹道曲线的计算，力学中对变速运动规律的描述等等，使数学突破常量数学传统研究范围，开始了数学发展的一个本质不同的崭新时期．数学研究对象从常量转到变量，这是数学发展史上的一个转折点，数学发展到用运动、发展和联系的辩证观点来分析把握对象的数与形的统一关系，其主要标志是解析几何和微积分的诞生．解析几何在数学概念思维领域里实现了数与形关系的沟通，微积分使人类思维进入无限小分析领域，使人类视野由有限发展到无限，由静止发展到运动，微积分为人们描述宇宙运动及变化过程提供了简明而精确的数学语言和工具，成为自然科学和技术发展中精确表述它们规律和解决它们问题的有力武器．

随机数学思想阶段是以概率论为其标志的．概率论使数学研究的领域由确定性领域进入非确定性领域．如果初等数学和数学分析称为研究确定性现象的数学的话，概率论则是研究非确定性(随机性)现象的数学，这是近代数学发展的一个转折点．它标志着直接以不确定性现象为研究对象，并提供把握“大势所趋”的途径，为偶然性和必然性之间的转化提供了数学刻划的手段．这种新数学方法的诞生，使确定性和不确定性在新的数学理论中实现了直接的统一．概率论目前正在和其他分支交融，产生了随机积分、随机微分方程和随机微分几何，与其他科学结合产生了不少边缘学科，如生物统计、物理统计学以及统计预报等学科．将概率论方法应用于解决某一类问题又产生一些新的数学分支，如应用于公共服务事业产生“排队论”，应用于通讯技术产生了“信息论”，应用于自动化生产而产生“控制论”，应用于生产和计划组织而产生“随机运筹学”等．概率论还向其他学科提供了新的工具，用随机抽样的模型来模拟其他数学过程的方法已

获广泛应用,并用于解决工农业生产、军事技术和科学技术中的问题.现代概率论是联系实际最紧密的数学分支之一.70 年代以来，概率方法竟反过来证明复变函数的毕卡定理，证明 $H^p$ 空间是赋范空间等等，随机现象与确定现象进一步获得交融.

模糊数学是 1965 年由美国自动控制专家、应用数学家查德创始的，它标志着数学由研究精确领域发展到模糊领域.它的产生是为了适应处理那些运用传统数学方法无法适当模拟的现象的迫切需要,因为这些现象或是很难给予确切定义,或是它们包含着实质上模糊的相互关系.具有不确定性的事物和现象不能用经典集合论来刻画.统计数学所研究的现象本身是确定的，模糊数学所研究的现象本身是不确定的，模糊数学是用精确的数学方法研究模糊现象.经典数学有时是不能处理模糊现象，有时虽然用经典数学方法处理模糊现象的问题，也是把模糊现象近似地看作分明现象来处理，这实际上与客观真实距离更远了.模糊数学提出了刻划模糊现象的新的数学描述，这种描述比用经典方法描述模糊现象，更接近客观的真实所以，模糊数学不是认识上的模糊，而是对一些模糊现象的认识更精确化了.模糊数学是研究和处理模糊性现象的数学理论和方法.模糊数学的发展主流是应用，人们用模糊数学的方法来刻画运用概念进行判断、评价、推理、规划、决策和控制等过程,发展起模糊聚类分析、模糊模型识别、模糊综合评判、模糊规划、模糊决策、模糊控制等方法.这些方法已被广泛应用到图象识别、人工智能、自动控制、信息处理、经济学、心理学、社会学、生态学、语言学、管理科学、医疗诊断、法律和哲学等研究领域.当然，最重要的应用领域是计算机智能.模糊数学是吸取人脑某些对模糊现象进行识别和判断的特点创造出一套崭新的数学方法，然后把这个方法移植于计算机中,提高它模拟人脑的能力,充分发挥计算机快速、准

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com