前　　言

不管一个人对于数学史方面的书籍如何熟悉，他往往还是乐于发现一本新书，看看书中对某个论题是怎样处理的。在这一方面，斯科特博士已毋须我们再进行介绍。他早年关于华莱士和笛卡儿的著作已显示出他在这一方面的专心致志和博学，这两本书是基于他对原始资料的系统研究而写成的。在写现在这本书的时候，他遵循了同样的方针，并且涉及的范围更为广阔。他广泛地说明了一个数学家，特别是当他首次作出闻名于世的伟大发现和发明时，实际上说了些什么，以及是怎样说的。

于是我们就对从莱登纸草到现代计算方法的详细描述获得了栩栩如生的印象。让人高兴的是斯科特博士对于埃及、巴比伦和中国最早期的数学作出了如此充分的说明。通过以往 [illegible]年来学者们的工作，关于这个古代的时期，尤其是关于这一时期中的算术知识以及实际上的代数方法人们了解得已经很多。希腊人对数学出色的贡献久已被人们所认识，而现在我们对他们在萌芽时期的发展又知道得更多了。作进一步说明用的插图的选择是恰当的，每一幅都经过了细致的审查，并给我们以更多的教益。这些插图反映了作者们的特色——例如巴罗对欧几里得著作富有生气的译文，当学童们学习欧几里得几何时，这个材料仍是一座“笨人难过的桥”①。例如后来成为牛顿的分析方法的奠基石的欧几里得的著名引理，例如关于乌特勒的丰富多彩的符号，这些符号是对他的许多学生（而且往往是有名的学生）的巨大启发的源泉。

---

①　笨人难过的桥：原文为 [illegible]，指欧几里得《几何原本》中命题“等腰三角形两底角相等”。——译注

有些地方斯科特博士离开了编年史的次序，细致地按照论题来汇集发展史实，一次只致力于一个分支。例如，一直到建立解析几何的历史谈完以后才提出关于对数的历史，这里极为清楚地表现出了时间顺序上的间断。事实证明，这样的处理方法是有好处的，特别是对那些主要兴趣在于每次不停顿地探索一个分支的读者来说更是如此。人们对将二项式定理联系到《原理》一书的一章产生了深刻的印象，在一位大师手中这本书是说明物理概念和数学结构之间相互作用的有益的提示。斯科特博士依靠他对数学史的驾驭自如的能力写出了一本富有激励性的好书，我把它推荐给学生，也包括教师。

勺摩摆特恩布尔

作 者 序

人类曾经花费了辛勤而艰巨的劳动以建立一个宏伟的结构，在这个结构的基础上产生了近代数学。对这种结构的建立过程的考察不能不引起人们的惊奇和赞叹，对专家来说是如此，对所有认识到数学史和文化史之间的联系是多么密切的人们来说更是如此。令人感到鼓舞的是 近年来人们对研究数学知识发展的兴趣已日益增长，这种兴趣的反映即是在过去几十年中出现了这么多关于数学史的优秀论著。

循着我们前辈们在建成的数学这样一座巍峨大厦中所从事的事业的历程前进，没有什么事比这个更令人高兴和具有诱惑力了。然而，并不是每个人都有机会或者空闲能查看原始的著作和手稿。承蒙英国皇家学会会长和委员会、剑桥大学高等学院和剑桥三一学院院长和研究员们，以及大英博物馆管理委员们的好意，作者才能够不受限制地利用他们所拥有的著作和文件。本书希望它的出现会对那些不能有幸运地享受这些方便的人们有所帮助。

本书内容涉及到从上古时代到 员怨世纪初的这段时期。在过去大约 员园园年中，数学已经变得极为高度地专门化，发现数学新成就的步伐已经加快到这样一个程度，以致很少有人会贸然尝试涉猎近年来各种成就的所有方面。但是，在本书附录中仍然指出了某些主要的发展方向。虽然在人物小传中并未突出其细节，但我认为没有一些这样的细节也将会留下严重的缺陷。所以，在附录一中就包括了本书提到的某些比较重要的人物的简略生平。

这本书是为了跟踪过去 圆园园园年当中主要数学概念的发展。所以，在这本书的篇幅中几乎找不到孤立的事实。按照这个目的，作者认为，从过去的数学家们的著作中广泛地引用材料是合适的，因为只有用这种方法才能对他们在劳动中所碰到的巨大困难作出公正的评

此为试读，需要完整PDF请访问： www.ertongbook.com

价。人们往往体会不到这些困难是多么巨大。我们有这样的倾向，就是忘记了自从人类第一次学会使用像小数和对数这样强有力的辅助计算工具以来，不过才经历了相当少的几个世纪，更不用说微积分和近代的几何方法的出现，更只有短短两三百年了。说实在的，用不着回溯多少世纪，就能找到这样的数学家，他还未能接近一种精密有效的记数制。

作者认为，对于说明从上古时代到员怨世纪初期数学的发展史，这项工作规模如此宏大，以致不可能要求写得很详尽。虽然如此，作者还是希望能解释得足够清楚，以便认真学习的学生的需要至少可以部分地得到满足。此外，作者还希望又一本数学史著作的问世将会刺激出版其他的佳作以弥补本书的不足。关于数学的漫长历史的著作，书后列了一个范围较广的书目，其中大部分都不难找到。这个书目不仅对教师，而且对研究数学的学生也会有所帮助。

作者深深地感到，如果不是许多对数学史有着浓厚的兴趣和渊博的知识的知名人士的真诚帮助，这本书的出现是不可能的。对特恩布尔教授，作者深致谢意，不仅因为他为本书写了前言，而且因为他对原稿作了严格的批评，并提出了许多很有价值的建议。阅读本书中的证明步骤这一艰难而又吃力的任务，由威斯敏斯特学院科学学士耘援酝援艾郎蒙哥欣然承担。他还对本书提出了仔细斟酌过的意见，作者对此深表感谢。作者还要感谢科学学士耘援粤援阅援斯科特，他帮助阅读了书中的证明并协助绘图，感谢英国皇家学会会员粤援里奇·斯科特博士，他对本书的兴趣曾经是对作者的巨大鼓励。

对于皇家学会过去和现在的职员，作者表示最诚挚的感谢。前图书管理员匀援宰援鲁宾逊先生无保留地向作者提供他渊博的古籍知识。现任图书管理员陨援凯伊先生和助理管理员晕援鲁宾逊先生也都不辞劳苦地使编写本书的工作能尽量得到方便。

以上提出致谢的名单是不完整的，除此我们还得提到栽葬赠造燥则 驭 云则葬灶糟蚤泽有限公司的各位职员先生，作者感谢他们真诚的礼貌和耐心，以及他们对出版本书的关注。

允援云援斯科特
员怨缘苑年 员圆月

目　　录

前言 …………………………………………………………（员）
作者序 ………………………………………………………（猿）
第一章　上古时代的数学 ……………………………………（员）
第二章　希腊数学的起源 ……………………………………（员源）
第三章　三角学的发明 ………………………………………（源缘）
第四章　亚历山大科学的衰微——黑暗时期与复兴 …………（缘源）
第五章　东方的数学 …………………………………………（远愿）
第六章　文艺复兴时期的数学：从雷乔蒙塔努斯到笛卡儿 ……（愿缘）
第七章　员苑世纪：几何学的新方法 ……………………………（员园怨）
第八章　力学的兴起 …………………………………………（员圆源）
第九章　小数和对数的发明 ……………………………………（员猿源）
第十章　微积分的发明 ………………………………………（员源远）
第十一章　二项式定理和《自然哲学的数学原理》 ……………（员远苑）
第十二章　分析方法的发展 ……………………………………（员苑缘）
第十三章　从欧勒到拉格朗日 …………………………………（员愿苑）
第十四章　近代几何之开端 ……………………………………（圆园愿）
第十五章　算术——数学中的女王 ……………………………（圆员缘）
附录一　书中所提人物的小传 …………………………………（圆圆源）
附录二　对书中提到的某些论题的简短注释 …………………（圆源缘）
参考书目 ……………………………………………………（圆远苑）
人名译名对照表 ………………………………………………（圆苑园）
地名译名对照表 ………………………………………………（圆愿愿）
后记 …………………………………………………………（圆怨园）

第一章
上古时代的数学

对于科学史家来说，上古时代最重要的要算是亚述人、巴比伦人、埃及人和腓尼基人了。其中只有巴比伦人和埃及人对数学进展有某些显著影响，他们单独提供了经得起科学分析的知识核心。随着我们的这些古文化知识的增加，我们越来越清楚地看到，我们子孙后代应当对这些好几千年前就居住在底格里斯—幼发拉底河以及尼罗河广阔河岸上的民族给予多大的感激啊！

大约在公元前 [illegible]年，中亚细亚有一个爱好和平的、有艺术修养的并且有才干的民族离开了他们的家园，落户在底格里斯—幼发拉底河谷（美索不达米亚）。他们和当地居民混合起来产生了一个新民族，叫做苏美尔族。在他们手里，文化达到了比往日更高的水平。他们居住在波斯湾尽头旅行商队路线的必经之地，所以养成了从事商业的兴趣，这迟早是要导致数学方面的知识的。从他们发明的灌溉系统可以明显看出，他们已经具有相当可观的工程技能。甚至在今天，仍可看到巨大运河网的遗迹，有些运河的规模相当大，不仅可以灌溉土地，而且还可以提供适当的排水系统。从他们留下的珍贵美术品来看，他们已经有不小的艺术才能。在外来者当中，有些人定居在美索不达米亚，另一些人则在尼罗河谷找到了新居，他们把苏美尔人的影响和知识带到了埃及。这里的文化曾达到了很高的水平，数学和医学尤为突出。

由于研究了这些原始人类遗留下来的工具和武器，考古学家已能想像出他们的一些生活习惯。目前的证据还比较零碎，尽管如此，仍有确凿的证据说明初等数学已在他们的生活中起了不小的作用。从实物交易中产生了计数和加法以及度量衡方面的基本运算；在装饰品

的粗略制作中就会逐渐发展起对简单几何图形的了解，这些装饰品现在还可以在他们的庙宇和岩洞的墙壁上看到；土地测量显然用到了一些几何图形，这无疑要导致一定的几何知识的获得；此外，依靠农作物生存的人需要有某种形式的历法来指示季节循环。尽管如此，数学的进展还是缓慢的。原始人只是注意生存斗争，除了猎取食物和本身安全以外，什么都考虑不到。

在上面提到的肥沃原野上，有两个强大的王国分外繁荣。每个王国的人们都逐渐发展出了一套技巧，经过几千年，至今仍使人感到惊奇和钦佩。但他们的成就都是经验知识的结果。无论是巴比伦人还是埃及人，我们都没有证据说明他们对自然现象曾作过耐心的仔细考察，有过那种概括推理的能力，而缺少它科学甚至不能开始。

埃　　及

我们首先转向埃及。如前所述，在数学和医学领域里，埃及有着显著成就。这里我们关心的是前者。商业上和政府中的日常事务导致普通算术运算的知识，这些知识很早就成了普通常识，特别是对有闲暇研究它们的祭司阶级来说。埃及的计数制度是十进制，其原理始终是加法。一划表示员，两划表示圆，依此类推；数字员园是用一个形如反写的大写字母哉的符号来表示，两个这样的符号表示圆园，如此直到怨园；员园园是用新的记号来表示，像一根卷起来的绳子；还有一个记号像一朵莲花，表示员园园园；再一个记号像一根竖着的弯曲手指，表示员园园园园，如此直到员园园园园园园。每个记号都可重复使用怨次。只要查查俘获大量俘虏的数目（这些数目无疑是被大大夸大了的），就可以弄清楚埃及人在表示大数方面是毫无困难的。①但是，在他们的符号缺乏位置上的意义时，这种记法很麻烦，为了表示大数，必须用相应多个符号。例如为了表示数字怨愿远至少要用圆猿个符号。乘法和除法的运算可以化为一系列需要每次倍乘的运算，例如苑员乘以员愿要用如下方法

---

① 根据目前保存在牛津粤泽澡皂燥造藻葬灶博物馆的第一王朝时期（公元前猿员园园年以前）的正式王室权标上的记载，当时曾俘获过员圆园园园园名俘虏，源园园园园园头牛，员源圆圆园园园只羊。（历史学家把古埃及的历史划分为猿园个或猿员个王朝。——译注）——原注

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

得到结果：

圆伊苑院越远源圆
圆伊远源圆越圆愿源越原伊苑员
圆伊圆愿源越缘远愿越愿伊苑员
圆伊缘远愿越员员猿远越远远伊苑员
圆伊苑员越远源圆越圆伊苑员
员伊苑员越苑员越员伊苑员

最后 猿个数的和就给出所求的乘积。除法结果可通过把上述步骤反过来而得到。如果乘以 员园只需把单位符号改写为 员园倍的符号，依此类推。在乘以 圆缘和 员园的时候，用这种方法不失为一种捷径，这对日常需要来说已经够用了。食物分配和土地分派都要使用分数，而这些事是经常遇到的。但是，他们的做法要求有相当的才能。埃及人表示分数的方法是把分母写出来，再在上面点一点或者画一个卵形线。这种记法有一个明显缺点，就是只有形如$\frac{员}{灶}$的分数（灶是整数）才能这样表示。分数$\frac{圆}{猿}$或（员原$\frac{员}{猿}$）的写法是例外，这个分数有它自己的特殊符号；除此以外，凡是分子不等于 员的分数都要分解成若干以 员为分子的分数之和。例如$\frac{圆}{员猿}$要写成$\frac{员}{愿}$，$\frac{员}{缘圆}$，$\frac{员}{员园源}$。那时没有加法符号，所以就用几个数并列的方法表示加法运算。由于有这些限制，当时不得不编制出一些表来说明如何把分子不等于 员的分数分解成分子等于 员的分数之和。分解的实际情形可在莱登纸草①上的一张表中看出，在这张表上，所有形如$\frac{圆}{圆贼垣员}$的分数均被分解成以 员为分子的分数之和，此处 贼表示 员到 源怨的任一整数。例如：

$$\frac{圆}{缘}越\frac{员}{猿}垣\frac{员}{员缘}$$

$$\frac{圆}{苑}越\frac{员}{源}垣\frac{员}{圆愿}$$

---

① 古埃及时代，有一种繁生于尼罗河泛滥后所形成的池塘和沼泽地里的草，可用来造纸，把这种草从纵面劈成小条，把它紧挨着放在光滑的木板上，加以压榨、晒干，就成了黄色纸页，粘成一个长卷，用来写字，叫做纸草。莱登纸草是在 员愿缘愿年由英国收藏家莱登所发现的纸草，长 缘源远厘米。此外还有由俄国学者郭列尼舍夫在 员愿怨猿年获得的目前保存在莫斯科的莫斯科纸草，这些都是记录数学纸草。——译注

$$\frac{圆}{怨}越\frac{员}{远}垣\frac{员}{员愿}$$

…

直到
$$\frac{圆}{怨怨}越\frac{员}{远远}垣\frac{员}{员怨愿}$$

如果分数的分子不是 圆则采取如下程序 :假定这分数是$\frac{苑}{圆怨}$先把它分解成

$$\frac{员}{圆怨}\frac{圆}{圆怨}\frac{圆}{圆怨}\frac{圆}{圆怨}$$

这些分数都可通过查表化简。将结果整理后,最后的答案取下列形式:

$$\frac{苑}{圆怨}越\frac{员}{远},\frac{员}{圆源},\frac{员}{缘愿},\frac{员}{愿苑},\frac{员}{圆猿圆}$$

这种处理分数的方法是很麻烦的。例如莱登纸草上说,如果将 怨个面包平分给 员园个人,则每人所得一份是$\frac{员}{缘},\frac{圆}{猿},\frac{员}{猿园}$ 虽然如此,这种方法似乎已能适当满足记录者的需要。现在还没有线索说明这些表是怎样或是由谁编出来的。也许它们是几个书吏共同努力的结果,通过试验而得到的。

莱登纸草的发现以及 员愿苑苑年艾森劳尔对它所作的解释,对我们了解埃及的数学有相当大的帮助。这个文件上标有许多标题,例如:《参入事物的准确计算》、《生活知识》、《玄机释义》、《秘密大全》等,发表日期大约是在公元前 员远缘园年,但它是许多世纪以前编写的一件作品的手抄本,由一个叫做阿赫姆斯的高级祭司所完成。这个文件表明埃及人已经发明了解决初等代数问题的方法。“有一堆①其$\frac{圆}{猿}$,其$\frac{员}{圆}$,其$\frac{员}{苑}$及其全部,共为 猿猿这个堆是多少”,用现代的记法写出来就是:

$$曾垣\frac{圆}{猿}曾垣\frac{曾}{圆}垣\frac{曾}{苑}越猿猿$$

这个问题被正确解出了,答案是 曾越员源$\frac{圆愿}{怨苑}$ 但其分数部分被分成了几个分子等于 员的分数之和,写成:

$$\frac{员}{源},\frac{员}{怨苑},\frac{员}{缘远},\frac{员}{远苑怨},\frac{员}{苑苑远},\frac{员}{员怨源},\frac{员}{猿愿愿}$$

---

① 埃及人把未知数叫“堆”。——译注

纸草中有一个问题说明当时已有算术级数的知识。用现代的话来说，这个问题是：要把 100 个面包分给 5 个人，各人所得的份数构成一个算术级数，并且前 3 人所得总数的$\frac{1}{7}$等于后 2 人所得之和。这个问题的解法早在中世纪就已成为很普通的方法，当时称为正伪法（[illegible]）。阿赫姆斯令第一项最大，这使得公差是负数。他把首项和公差分别称为 a 和 d，写出了

$$\frac{a+(a-d)+(a-2d)}{7}=(a-3d)+(a-4d)$$

由此便得 $d=\frac{11}{2}(a-4d)$。因此公差是最后一项的 $5\frac{1}{2}$。现在，让我们接着阿赫姆斯，令最后一项为 1，于是此级数是

$$23,\ 17\frac{1}{2},\ 12,\ 6\frac{1}{2},\ 1$$

但其和仅为 60，而它应当是 100，所以每一项应当乘以$\frac{100}{60}$，因此我们得到下列结果：

$$38\frac{1}{3},\ 29\frac{1}{6},\ 20,\ 10\frac{5}{6},\ 1\frac{2}{3}$$

另一个问题是：10 袋大麦分配给 10 个人，要从第一个人起，每人所得份数依次增加$\frac{1}{8}$，问第一个人所得份数是多少？依照上述推理可以证明，答案是$\frac{7}{16}$，即$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$。

在希克索斯纸草① 中，有一个问题涉及到几何级数的知识。一位妇人的家里有 7 间贮藏室，每间贮藏室里有 7 只猫，每只猫捉了 7 只老鼠，每只老鼠吃了 7 棵麦穗，每棵麦穗可以长出 7 升麦粒。在表示贮藏室、猫等的图画旁边，写有数字 7，49，343，2401，16807。贮藏室、猫、老鼠等的总数是给出了，即 19607，但没有指出是用什么方法得到这个数的。毫无疑问，这个问题的作者是用逐项相加这一简单方法得到解答的。没有证据说明作者使用了求和公式，抑或确实是用到几何级数的什么性质。其他问题都是纯实用方面的，例如根据给定的谷物数量确定面包的数量，家畜头数的计算等。

这些纸草表明，埃及人在几何方面也能解决某些有实用价值的问

---

① 参看 [illegible]页。

题。他们提出了计算土地面积、仓库容积、粮食堆的体积、石料和其他建筑材料多寡等的法则。他们没有给出理论结果，也没有给出计算程序的一般法则。埃及人从未发现过一个实用公式，也没有证据说明他们对日常生活以外的问题感到过什么兴趣。埃及人只要自己的数学知识能应付日常生活中的问题，就已感到满足了。建筑师和测量员的需要，要求有初步的几何知识，但没有证据说明，埃及人曾对几何图形的性质有过什么兴趣，更不用说有什么东西能促使他们去证明自己作图方法的正确与否了。虽然如此，他们在建筑活动中达到的精确度还是非常高。在基奥普斯王朝（公元前 圆缘园园年左右）时代建筑起来的金字塔，是由许多巨大的石灰石块组成。雕刻这些石块的精密度是惊人的。金字塔本身建筑在一个非常接近于正方形的基座上，基座每边的平均长度是 苑缘缘.苑怨英尺，任何一边与此数值相差不超过源$\frac{员}{圆}$英寸，正方程度和水平程度的平均误差微乎其微。塔基各边的取向是一个明显的证据，说明埃及占星家曾作过非常仔细的观测，其中有两边差不多是指向正北和正南，另两边的设计与垂直线的偏差至多为 猿厘米，这应当说是非常惊人的成就。塔高 源愿员.圆英尺，塔基周长 猿园圆猿.员远英尺，后者与高度之比非常近似于圆的周长与其半径之比。和上古时代的许多其他民族一样，埃及人似乎也已熟悉这样的事实：如果三角形三边的边长与 猿源缘三个数成正比，则此三角形是直角三角形。但是，没有可靠的证据说明他们在建筑活动中曾用过这个事实。德谟克利特（公元前 源远园年～公元前 猿苑园年）曾经骄傲地自夸说：“在不加证明的平面图形作图方面，还没有谁能胜过我，甚至连埃及的测量员也不能。”但这并不意味着能胜任测定神殿方位的测量员曾经用过上述定理，也没有迹象说明他们在工作中曾用过力学原理，甚至建立这样一个伟大建筑物所用的工具也是极为简单的。杠杆和斜面是用到了，但是其他简单机械，甚至轮轴和滑轮，也可能他们都不知道。当时没有使用这些机械的任何实际需要。奴隶劳动力已经够多了，对于担负这些工程的监工者说来，时间和劳动力的浪费是无足轻重的。①

在连小小一块良田国民都不能忽视其耕种的国家里，在一个土地所有权的观念大大关系到所有者切身利益的国家里，测量技术会显得

---

① 另一方面，驾驭和供养这一大群人的问题会产生一些极为复杂的问题，这些问题迄今尚未得到令人满意的答案。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

越来越重要。基于这一事实，埃及人在这个数学分支中必然会得到某些显著结果。尼罗河周期性泛滥之后为了重划地界，需要有高度发达的土地测量技术。希罗多德叙述道，为了使征收赋税公平合理，萨斯特雷斯（拉美西斯二世，公元前 员源园园年左右）曾将埃及的土地划分为相等的矩形（或正方形）小块。然而，尼罗河涨水引起的每年一度的洪水，扫除了这些小块的界限，因此不得不派测量员去重新校对征税额。莱登纸草上载有 员怨个关于土地面积和谷仓容积的问题，这些问题都以惊人的准确性被算了出来。纸草的第三片讲到如何去确定正方形和矩形、三角形和梯形以及能分割成这些形状的土地面积。前二者的面积计算结果是正确的，至于三角形和梯形，则有一些疑点。有一个图形画的是一个底边长度为 源的三角形。另外两边之一量出来是 员园，而面积注明是 圆园，这就发生一个问题：这三角形是否是等腰的。如果是的话，上述答案就是不正确的，抑或是直角三角形？在此情形下答案就是正确的了。虽然一般认为这个三角形是要画成等腰的，但无法理解的是，已经具有相当丰富数学知识的埃及人竟会产生这样的错误。很可能是因为这个图画得太拙劣，只是一个粗略的草图，所以看起来像一个等腰的三角形而实际上是直角三角形。同样，有一个显然为等腰的梯形面积注明是 员园园，而预期应为 怨[illegible]缘。但这也许同样可以归咎于作图方法拙劣的缘故，在两条看来是相等的边当中，有一条也许是垂直于两条平行边的。

关于圆面积的计算，埃及人的结果比上古时代任何其他民族的结果都更准确，这从莱登纸草中的一个例子可以看出。例子是要求算出一块圆形土地的面积。“有一块 怨凯特①（即直径为 怨）的圆形土地，其面积多大？今取去直径的$\frac{员}{怨}$，亦即 员”，作者直接写道，“则余 愿，作乘法 愿乘以 愿得 远源，这个大小就是面积。”②纸草在同样方针的指导下确定了一个直径为 怨高度为 员园的圆柱形谷仓的容积。“首先给定谷仓的周围是 怨高度是 员园，今从 怨中除去$\frac{员}{怨}$，剩下 愿，将此数乘以 愿得 远源，再将此数乘以 员园便得 远源园。”③ 由此可见，他们认为圆的面积等于

---

① 古埃及的长度单位，员凯特（[illegible]）相当于 [illegible]米。——译注

② [illegible]

③ [illegible]页。

一个边长为此圆直径的$\frac{愿}{怨}$的正方形面积,这个结果导致圆周长与其直径之比是 猿援员远缘

上一结果可能是用如下方法得到的。埃及人已经知道直棱柱的体积等于底面积乘以高,并且知道这一结果在圆柱形仍然成立。所以他们就取一个底面直径为 凿的圆筒,注水于其中,直到一定的高度,譬如说 澡 再将水倒进另一立方体容器内,此立方体的边长也是 凿,并调整水量直至其高度也达到 澡 现在比较两个容器里的水量,也许是用称重量的方法,显然,它们与容器的底面积成正比,即成比 (噪凿)^{圆}颐凿^{圆},此处 (噪凿)^{圆}是圆的底面积。这个比值被求出为$\frac{远源}{愿员}$据此便可得出上述结果。

在另一问题中,一个直径为 愿的半球形碗的体积被求出是 员缘园援远缘 这导致圆周与其直径之比的一个不太准确的数值 猿援圆

我们说过,埃及人已经知道如何计算圆柱体和直棱柱的体积。许多问题中计算了这些形状的仓库的容积。但是,他们最惊人的成就却在于两端是正方形的截棱柱体体积的计算。莫斯科纸草上清楚地说过这个问题:“你这样说:一个截棱锥体 远腕尺① 高,底面每边 源腕尺,顶面每边 圆腕尺。你这样做:将 源自乘,得 员远(底边的平方 越员远)。再将 源乘以 圆得 愿它就是底边乘以顶边。再将 圆自乘,得 源(顶边 圆的平方 越源)。将 员远加 愿再加 源(底面、中截面与顶面的面积之和),得 圆愿 再取 远的$\frac{员}{猿}$(高的$\frac{员}{猿}$)得 圆 再取 圆愿的两倍,得 缘远(三个面积之和乘以高的$\frac{员}{猿}$)。看,这个 缘远正好就是你要求的体积。”② 这个惊人的结果表明,埃及人早在公元前 员愿缘园年就已熟悉确定两端为正方形的截棱锥体体积的方法了。它也就是我们今天用公式 灾越$\frac{澡}{猿}$(粤^{圆}垣粤月垣月^{圆}) 所表示的方法。

土地面积的问题明白地指出这样一个事实 埃及人已经熟悉二次方程。有一个这样的问题说明怎样把一个面积为 员园园的正方形分成两个较小的正方形,使得其中一个正方形的边长是另一个的$\frac{猿}{源}$ 用现

---

① 古长度单位,由肘至中指尖的长度,约 员愿-圆园英寸。——译注。

② 云[illegible]页。

在的记号表示起来，就是要解方程组 曾^{圆}垣赠^{圆}越员园园 曾颐赠越员颐$\frac{猿}{源}$。解这个问题的人是这样进行的。作一个边长为 员的矩形（正方形），并取其$\frac{猿}{源}$为另一正方形的边。将这个数自乘得$\frac{怨}{员远}$。因此总面积为 员垣$\frac{怨}{员远}$或$\frac{圆缘}{员远}$。再取这个数的平方根得 越$\frac{缘}{源}$。取 员园园的平方根，得 员园。将 员园除以$\frac{缘}{源}$，这便得出 愿。这就是一个正方形的边长，另一正方形的边长是其$\frac{猿}{源}$。在别的纸草中也可以找到其他这类例子。

在谈埃及人的数学知识时，参考一下埃及的天文学是恰当的。和所有上古时代的民族一样，埃及人很早就感到有必要建立度量时间的方法了。巴比伦人和亚述人奠定了现代时间度量制度的基础。虽然埃及天文学几乎毫无疑问是以巴比伦的天文学为基础，但是建立在天体运动基础上的实用历法的引用，则应看成是埃及人的杰出成就之一。太阳年的长短取决于人们对狼星（即现在的天狼星）和太阳同升（即在日出之前最先看到狼星的升起）现象的观测，这个现象正好与尼罗河的周期性涨落有着密切的对应关系，所以早在公元前 源圆源员年，祭司们就建立了每年 员圆个月，每月 猿园天，另外再加 缘天节日的制度。后来的观测说明一年共有 猿远缘$\frac{员}{源}$天。由于那时没有每四年中闰一天，所以月份逐渐同季节脱节，因此，如果某年狼星与太阳同升正逢第一个月的第一天，则相隔 苑猿园年之后，这个现象就会发生在一年的正当中。再经过 苑猿园年会重新一致起来，因此每隔 员源远园年，首先看到狼星出现的时刻会回到它原来的时刻。这段时间称之为狼星周期。

看来，埃及人对数学的主要贡献是：

员援他们完成了基本的算术四则运算，并且把它们推广到分数上；他们已经有了求近似平方根的方法。

圆援他们已经有了算术级数和几何级数的知识。

猿援他们已能处理包括一次方程和某些类型的二次方程的问题。

源援他们几何知识的主要内容是关于平面图形和立体图形的求积法。

缘援他们在求圆面积以及把圆分为若干相等部分的问题上，已经有了正确的知识。

远圆他们已经熟悉比例的基本原理，某些人还从其中看到了我们今天应称之为三角函数的那种观念的萌芽。

巴 比 伦

巴比伦人的贡献的重要性并不亚于埃及人，但和埃及人一样，他们也没能建成一门系统的科学。关于巴比伦人的记载不如埃及人的多。埃及人会用笔和纸（纸草），巴比伦人则用针在粘土泥版上刻写。这些泥版经常是靠太阳烘干的。但是，保存这些记录的原样显然是困难的，而且这种书写方式也会阻碍长篇论著的编写，因此在巴比伦人的文献中没有像莱登纸草那样的东西，甚至像莫斯科纸草的东西也没有。现在留下的一些记载包括公元前 圆园园园年左右的一段时期，这些记载清楚地指出了巴比伦人在数学和天文学方面的某些显著成就。

巴比伦人曾和埃及人长期保持着商业上的密切接触，他们和埃及人一样，也很熟悉十进制。然而他们还补充了一种以 远园为基数的进位制。关于这一点的证据来源是地质学家 宰援月援劳夫特斯 员愿缘源年于森开莱（现在的拉山或拉莎）发掘出来的两块泥版。这两块泥版表明巴比伦人已是高度熟练的计算者。其中有一块大概是汉谟拉比①（约公元前 圆园园园年）时代的，上面载有一串数字，前 苑个是 员，源，怨，员远，圆缘，猿远，源怨。由此显然可知，巴比伦人已经知道自然数平方的数列。但在 源怨或 苑圆之后，发现这个数列中断了。在我们预期要发现 远源的地方，看到的却是 员.源，其后跟着 员.圆员，再后是 员.源园，直到最后是 缘愿.员。这个数列是无法理解的，除非假定有一个基数 远园，亦即

员.源越员伊远园垣源越远源越愿圆

员.圆员越员伊远园垣圆员越愿员越怨圆

直到 缘愿.员越缘愿伊远园垣员越猿源愿员越缘怨圆

因此，巴比伦人显然已经有了记数的位置观念，这使我们想起埃及人对这点还是完全不知道的。然而，这个重要原则不久就被遗忘了，没有证据说明它曾在希腊或罗马使用过。但是，要把 圆园园园年以前预见到现代的记数制度这一点归功于巴比伦人，那会是过分的。他们

---

① 巴比伦第一王朝国王。——译注

的记数制模糊而不明确，容许有多种多样甚至矛盾的解释。他们用来表示单位的符号也同样用来表示 远园，$远园^{圆}$，……甚至用来表示$\frac{员}{远园}$，$\frac{员}{远园^{圆}}$等。同样，代表 苑的符号同时可以表示 苑·源圆园(苑伊远园)，圆缘圆园园(苑伊$远园^{圆}$)或苑伊$\frac{员}{远园}$更不用说可以表示一大堆其他的数。那时没有表示零的符号。根据与上述泥版不同的来源可以看出，巴比伦人是用留空隙的方法表示数字中间的零，遇到不明确的时候，数字的真正数值就要从上下文的语气来确定。的确，在这么多的可能性里进行选择是很困难的，因此文句往往要能使读者不致把数字混淆起来，譬如把 缘和 猿园园(缘伊远园)或缘伊$\frac{员}{远园}$混淆起来。

因此，巴比伦人虽然在书写数字方面发展了重要的位置原则，但数字的真正数值仍要靠智力来推测。森开莱泥版不能帮助我们解决零究竟是如何表示的问题。即使这些泥版是照原样保存下来的，也不能解决这个问题，因为在一个一直写到 $缘怨^{猿}$或 圆园缘猿苑怨的立方数列中，没有发现一个例子其中第二位是空着的，所发现的全是三位数。所以问题仍然存在，在没有解决这个问题之前，把这个在西方直到中世纪尚未出现的发现归功于巴比伦人会是过早的。

巴比伦人似乎已是数学表的积极编纂者。在他们的泥版中，刻有乘法表、平方根表、倒数表等。他们表现出对几何级数是熟悉的。分数经常用到，不过埃及人是令分子为常数并等于 员而巴比伦人则是令分母为常数并等于 远园。人们提出了许多理由来解释这种选择。毫无疑问，有一个能被许多因子整除的分母是很方便的。然而，康托尔曾提出一个意见说，这样做的根源可能是由于以下事实：早期的巴比伦人认为一年共有 猿远园天，在这段时间里太阳围绕地球转了一整圈。这便导致圆之分割为 猿远园度，每一度代表一天中太阳所走过的距离。巴比伦人似乎已经知道这样的事实：等于圆半径的弦能够绕圆周截 远次，因此圆可分成 远个扇形，每个扇形的中心角为 远园毅。

像埃及人一样，巴比伦人已经具有相当高的解题技巧。有证据说明，他们已能解决一些在系数为整数的极简单情形下导致的三次以下的方程的问题。他们的几何学已经发展到大致和埃及人相同的水平。在阿拉伯的泰陆发掘出来的、目前保存在君士坦丁堡奥陶曼博物馆里的一块泥版表明，巴比伦人已经有了确定许多平面图形面积的正确法

则。这块泥版可以回溯到公元前 圆园园园年左右。其中载有一幅被分成员缘部分的大片土地的平面图，有 苑个部分为直角三角形，源个非常近似于矩形，还有 源个是梯形，其一边垂直于两平行边。每个图形的面积都被正确地算出了，计算法则很可能是靠经验发现的。巴比伦人早在公元前 圆园园园年就有了毕达哥拉斯定理的知识，因为在那个时期，曾有一个问题解出了一个边长为 源园和 员园的矩形门的对角线是 源员援圆缘，即 源员$\frac{\text{员缘}}{\text{远园}}$，这个数值接近于准确值 源员援圆猿员。他们把圆的面积取为圆周平方的$\frac{\text{员}}{\text{员圆}}$，由此似乎可以看出，他们认为圆周是直径的 猿倍。他们也知道怎样计算许多立体图形的体积，包括圆柱体和平行六面体的体积。

可以认为，巴比伦人已经知道如何去解含两个未知数的二次方程。这个知识的产生是由于他们企图解决如下的问题：给定矩形的周长和面积，试求边长，即解方程组 曾垣赠越葬，曾赠越遭。这个问题在上古时代是很普通的，它也许是由于想反驳这样一种普遍流行的看法引起的，即认为平面图形的面积唯一依赖于它的边长，因而具有同样边长的图形就有相同的面积，就像圆和正方形的情形那样。只要这种看法继续存在，它就会给投机商人提供无限的活动范围。这个问题曾遭到希腊人的系统驳斥。巴比伦人的办法是靠经验，他们曾定出，边长保持为常数的图形可以有不同的面积值。例如对一个周长为 源园的矩形，所得的结果可列表如下：

葬垣遭越圆园

葬	遭	面积 葬遭
员园	员园	员园园
愿	员圆	怨远
远	员源	愿源
源	员远	远源

等等。

巴比伦人的天文知识是渊博的。它附属于占星学。虽然如此，他们对星体运动的耐心观测却为我们以后在喜帕恰斯和托勒密的工作中所遇到的问题的科学解决办法提供了必要的轮廓。巴比伦人的记录是精确而连续的，他们根据对天体运动的观测非常准确地定出了天

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com