普通高等教育“九五”教育部重点教材

数学模型讲义

雷功炎　编著

北京大学出版社
北　　京

内 容 提 要

本书系作者在近年来为北京大学本科生开设的“数学模型”课程所用讲义基础上，经补充、修改编写而成. 全书共分十二章，分别介绍线性及整数规划、图论、计算机成像、密码学、统计分类、神经网络、排队论、化学反应速率与模拟退火、生物进化、混沌、格气等多种成功模型及应用数学方法，各章独立成篇. 本书内容充实，结构合理，选材适当，其中包括了一些较新的材料. 在叙述上，既注重建模方法，又注意理论与应用并重，强调对问题的理解，力求有尽可能广的适用范围.

本书可作为综合大学及师范类院校理工各系科“数学模型”教科书，或者用作学生参加数学建模竞赛的辅导材料，也可供高等院校师生及各类工程科技人员工作时参考.

图书在版编目 (CIP) 数据

数学模型讲义 / 雷功炎编著. —北京：北京大学出版社，1999.4

ISBN 7-301-04044-X

I. 数… II. 雷… III. 数学模型 - 高等学校 - 教材 IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (1999) 第 03732 号

书 名：数学模型讲义
著作责任者：雷功炎 编著
责 任 编 辑：刘 勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-04044-X/O·428
出 版 者：北京大学出版社
地 址：北京市海淀区中关村北京大学校内 100871
网 址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电 话：出版部 62752015 发行部 62754140 编辑室 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印 刷 者：北京大学印刷厂
发 行 者：北京大学出版社
经 销 者：新华书店
850 ×1168 32 开本 10.125 印张 250 千字
1999 年 4 月第一版 1999 年 4 月第一次印刷
印 数：0001 — 4000 册
定 价：15.00 元

序

整个数学发展的历史，贯穿着理性探索与现实需要这两股推动力，贯穿着对真善美与对功利用的两种追求. 当今的数学已经渗透到社会生活的方方面面，数学技术已成为高技术的核心成分. 传统的只强调演绎推理的数学教学，显然已不能满足时代的要求. 因此产生了《数学模型》这门课程，以帮助学生领会数学方法的威力，鼓励他们以后创造性地运用数学. 这门课也反映出校园里理论联系实际的新风尚。

数学模型的思想，由来已久. 光辉的先驱，是坐标方法－空间关系的数量模型，从此人类得以精确地描述位置和运动. 如果说这还只是数学内部的模型，那么最辉煌的数学模型应该说是牛顿力学在微积分基础上的创立. 牛顿力学在工业革命中的丰功伟绩决定了微积分在数学中的中心地位，尽管其逻辑基础一个半世纪以后才得以奠定. 然而数学模型之大行其道，则有赖于计算机的发展，强大的计算能力使数学模型得以转化为现实生产力. 数学模型已经成为科学研究和技术开发的一种基本方法.

雷功炎同志在北京大学开设《数学模型》课近十年，极受欢迎. 他的课不仅是提供一组案例，一些技巧，而且着眼于传播一种思想方法，一种观点、态度. 学生跟着他敞开了思路，加深了对数学的理解，也提高了解决实际问题的能力. 他的这本教材反映了他的想法、经验和风格，很有份量，很有见解. 特此向读者推荐.

姜伯驹

1999 年 1 月

前　　言

80 年代以来，由于萧树铁先生的积极倡导，汲取发达国家经验，作为数学教育改革的一部分，国内高校数学与应用数学诸系相继开设了“数学建模”课程．这一课程以及同一名称的国内外大学生竞赛，在我国高等数学教育中产生了越来越大的影响，这已是不争的事实．

这一改革所以被迅速而广泛地接受，就笔者个人看来，主要由于以下两方面原因：首先，世界发展到今日，随着计算机技术的迅速普及与发展，数学已被用于生产过程及社会生活的各个方面，它已成为关系国民经济技术基础与国防，关系国家实力的重要学科．今日之数学已不仅仅是纯粹的理论，同时还是一种普遍可行的关键技术；而在数学向现代技术转化的链条上，数学建模和在模型基础上进行的计算与模拟，处于中心环节．这一看法已被各界人士所认同．另一方面，随着时代的变迁，数学思想，数学研究的内容和方法，都在悄然发生变化，这一点必然引起数学教育的变革．然而数学教育如何变革，则存在多种不同，甚至截然相反的理解．

对数学教育改革认识上的差异自然反映在数学建模课程的设置上，实际上在同一课程名目下，存在着极为不同的指导思想与做法．只要对国内外出版的有关书籍稍加浏览，就可明白这一点．一种最为普遍的看法是，把建模课程目的理解为训练学生用数学语言表述及解决实际问题，特别是非传统数学物理问题的能力，所强调的是数学知识及方法的应用，这样的教材主要由数学各分支的不同应用实例所组成；与此相反的风格则是以某一数学分支

的内容和方法为主线，建模只是提供了某种背景，或者起着实例的作用，其侧重是在讲数学．还有若干出版物，主要讨论数学建模的方法论或者其直接目的是指导学生如何参加建模竞赛．对于数学建模的不同理解是很正常的，这既反映了建模课程本身内涵之丰富，也说明这一课程正处于发展建设之中．

眼前的这本教材，是笔者近年来在北京大学为本科生讲授数学建模的讲义．从它的酝酿到定稿，虽已过了近十年的时间，但其中仍多有令人不满意之处，它的出版既是为了便于教学，更是为了听取批评指导，以利修订．

几年来的教学实践使笔者逐渐领悟到，作为一门高等数学教育的改革课程，其成败的关键首先在于弄清它的指导思想，即开设这门课的目的是什么？它与传统数学课程的根本差别在那里？只有回答了这一根本问题之后，才可明白什么是恰当的教材和教法．

为回答数学建模与传统数学课程在指导思想上的差异，必然要涉及数学是什么，数学的本质，以及认识论，方法论，理论与实践的关系等一系列重大哲学问题，这似乎超出了讨论范围，也大大超过了笔者的知识与能力．然而，任何人做任何事，无论自觉与否，必然持有一定的哲学观点，这是无法避免的．因此，把个人对有关问题的一些零碎想法加以整理，引起讨论，就教于大方，也并非全无意义．罗素说过，哲学史不过告诉人们，过去曾经有人提出过什么样的问题，并且给出过什么样的答案．这不应当妨碍后来人探讨亲身感受到的同样问题．

数学哲学有各种流派，逻辑主义，直觉主义，形式主义，集合论公理化主义，以及历史更为悠久的柏拉图主义和经验主义等等．流派纷呈反映了数学与现实世界的关系．客观世界是丰富多采的，人类实践是多种多样的，观察认识问题的角度，深度各不相同，因而意见不同．各种观点似乎都有其合理的一面，过分强调任何片面都会导致谬误．对上述各个流派此处不可能，也无须

一一讨论. 为说明影响数学教育的哲学思想，下面仅以一种模型化的方式，对数学哲学作一极为简单，漫画式的描述. 我们描述两种相互对立的观点，分别采用理性主义和经验主义的称谓. 从专家看来，这是学龄前儿童的图画，是名词的滥用，对此我只好请求原谅. 请把所用两个名称仅仅看作代号，它们既不表示哲学上原来赋予的含意，也不表示任何褒贬. 它更像一个识字无几的家长，把子女起名为阿福与阿宝.

从一个持理性主义观点的数学工作者看来，数学有如下特征：首先，数学是基础学科. 其具体含义是：数学是宇宙间最基本，最普遍的规律. 这种看法起源于毕达哥拉斯与柏拉图. 毕达哥拉斯学派认为万物皆数，数是真实物质对象的终极组成部分. 而柏拉图学派更试图通过数的语言来理解世界. 在他们看来，上帝是数学家，他是按照数学原则创造万事万物的. 美学中的黄金分割，音调，弦长与调和级数的关系，都是这一观点的生动例证. 进而，数学甚至被赋予了道德内涵，既然真理的本质是通过数学概念表达的，那么，数学知识越多也就越接近“善”. 类似的观点一直持续到近代，怀特海认为数学与“宇宙背景的本质”相联系；而理论物理学家则始终在探求由完美数学形式表达的基本粒子规律. 把数学视为基础学科还有另外的含义，即学科是有等级顺序的，这一顺序是：数学，物理，化学，生物和社会科学. 顺序在前的学科可以解释，但不依赖于后面的学科，反之则不然. 数学雄踞序列的首位，它独立于任何学科之外，它不必也不允许引证其他学科，反之，它是其他一切学科的基础.

上述观点的一个自然引申是：既然数学是宇宙的基本规律，那么数学便不是“创造”出来的. 数学研究只能是“发现”与“认识”先验地处于“绝对”地位的真理. 这样的性质也就决定了数学的研究方法，它应当从公理开始，继之以一系列的定义与定理，所有的结论都应是逻辑演绎的结果. 它强调纯粹的思维，反对使用工具，从欧几里得几何限定圆规直尺作图，直到现代某些数学

家对四色问题计算机证明的责难，同出一辙．在这种哲学思想指导下，数学研究的目的是构造一个包罗万象，自封的完美体系．这样的哲学观念形成了自已的审美观，理性主义数学家认为，上帝不会以一种丑恶的方式构造世界，由此对终极与完美的追求就成了其内在发展的动力．与这种对美的追求相适应，数学概念要求清晰、确定；所使用的语言必须简洁、准确、通用、完善；纯粹数学的论文从不使用“世俗”语言，对与现实世界有关的概念稍加解释，一切表达在严格定义的符号体系之中．

在此，让我们暂时脱离主题，附带讨论一个与数学表达有关的问题．在外文数学书籍与论文中，定义的叙述通常采用如下方式，即“称 A 为 B，如果……”．当一些中文译本照此直译时，常被批评为外国式句法．笔者认为，这种批评似值得商榷．事实上，这种表达，首先不是一个语言习惯问题，而是一种思维方式．此时定义的目的，是在介绍一个已经存在的客体，所以开门见山，立即把读者吸引到所论对象上，然后才是对象本身的界定．这就如同带领儿童游览动物园，家长一定是先指着某种怪兽，说出它的名字，再让幼儿注意它的毛色、爪牙和其他特点．反之，习惯的中文说法把条件放在前面，然后定义概念，所表达的是一种归纳逻辑，这与理性主义的数学观点是不甚一致的．

理性主义观点数学家推崇理论研究，把应用视为第二等级的事情．他们认为应用数学离不开纯粹数学，而纯粹数学则可不考虑应用数学而生存．应用数学至多不过影响纯粹数学各研究领域的人数与热情，最好的比喻是食蚁兽与蚂蚁的生态学关系．有些纯粹数学家甚至认为只有摆脱了现实世界的负累，数学思想才能得以升华．

另一种与此对立的数学观点，无妨称之为经验主义的．经验主义与现代数学的关系也十分密切，它起源于文艺复兴时期，或许还可上溯到印度与阿拉伯人主宰数学的时代．这种观点不关心“数学是什么”，而更关心“数学做什么”．它不把数学科学视为一项

成品，不把数学结论视为支配世界的绝对的先验规律，而主张数学是对外部世界的一种近似，一种描述．研究对象是数学与外部世界的联系，而不是作为基础概念的数学本身．也正因此，经验主义的数学求助于外部世界，所使用的假设是外部条件的数学归纳，甚至是实验性的；所有的方法与结论都具相对性，一切因问题而异．经验主义的数学以实用为目的，不追求体系与形式的完美，不排斥使用工具，从函数表到计算机，所有能够带来实际好处的都在欢迎之列．经验主义的数学家认为，数学是人创造出来的，因此不保证是天然正确的．数学的真理只在于它有用，而不一定是逻辑的结果，因此必须由实践来检验．只有“做”才能增进“知”，重要的是用数学去解决各种各样的实际问题．经验主义数学家把数学视为一种工具，一种技巧．在解决实际问题时，数学的计算与变换只是一些中间阶段，只起一套规则的作用，不认为其本身含有什么更深刻的意义．

上面我们漫画式地罗列了两种对立的数学观点，现实情况远较这一描述复杂，存在有各种各样的中间形态，两种极端或许反而是特例．然而，这两种观点绝非杜撰，稍加思考便会发现，二者都对今天的高等数学教育产生了不可忽视的影响．或许，对一些理科院校数学系，理性主义的影响更为深远，而在一些工科的数学教学中，起主导作用的则是经验主义．

问题在于，作为一项改革措施，数学建模应该遵循的指导思想是什么？答曰：它既不应是纯粹理性主义的，也不应是完全经验主义的，让我们按照本来的面貌讲授数学．

经验是自然界可靠知识的唯一源泉，自伽里略时代以来这一观点日益深入人心，并已占据了统治地位．事实上，数学也不例外，数学的发展从未脱离外部世界．就主流而言，一部数学史雄辩地说明，数学与现实世界一直是紧密联系，相互作用的．从阿基米德、牛顿、高斯、直到希尔伯特、冯·诺依曼，统统既是理论上的大师，又都热衷于应用领域的研究．另一方面，我们不否认学

科发展的相对独立性，不否认学科内在的发展动力．强调知识的经验起源并不贬低“理性思维”的作用．数学概念与规律不仅仅是眼前经验的综合，而是来自于更广泛的一般模式．一项好的数学工作必须具有“内在的完备性”——这意味着它是以最自然，最严格的方式从普遍规律中导出的，也就是说，它是从人类知识的全部“历史”中导出的；同时，这一工作又必须有“外部的证实”——即它必须经受实践的检验．我们提倡的是“内在完备”与“外部证实”的统一，数学工作者必须承认绝对化了的数学概念，又必须理解数学概念、方法与结论的相对性．

就笔者个人看来，建模课程的直接目的，自然是要通过介绍若干有代表性的数学模型及成功的应用数学方法，培养学生用数学语言描述及解决实际问题的能力；但这仅仅是问题的一方面，本课还应力图使学生正确把握数学与现实世界的关系．既要认识到数学是人类观察与认识世界的一种独特方法，它为创造性地研究自然和社会的各种问题提供了基础与指导；也要理解外部世界为数学提供了原始课题、启示和动力．只有全面地认识这两个方面，才是正确的观点．

为达到建模课程的目的，必须认真选择教材．讲授的内容不能简单地仅以“数学模型”这样的用语来概括．事实上，任何数学或物理课程都在讲授某种模型．纯粹数学讲授的是更基本，更抽象，因而也更一般的模型，例如函数，向量，导数，微分，积分，线性空间，流形等等．而数学建模，则应选择更现实，更具体，与自然科学或社会科学诸领域关系直接，同时有重大意义的模型与问题．这样的题材能够更有说服力地揭示数学问题的起源，数学与现实世界的相互作用，体现数学科学的不断发展，激发学生参与探索的兴趣．应当力图使学生理解，大量重要的数学问题，是从具体的实际需要引起的，并非心灵的自由创造，或者仅只是逻辑的需要．当然也应使学生懂得，数学科学不仅仅是为了技术而存在．事实上，数学是一种精神，一种彻底的理性精神，它对人类

社会的物质生产，道德和文化具有广泛而深远的影响，就某种意义上说来，数学必然影响人们世界观的形成.

建模课程应当力图从实际问题中归纳出所要采用的假设以及解题的线索，试验各种可能的途径，预测可能的结果；尽量引用物理的、化学的、生物学以至社会学的有关结论. 这些做法的目的在于向学生展示一种有别于传统数学课程单纯逻辑推理的思维方式，使学生理解外部启示对数学思维的重大作用. 建模课程还应尽量引用实际资料检测数学结果，以使学生懂得，模型只是问题在一定条件下的近似描述，是主观和客观的结合，它不是先验的，唯一的，结论也只是相对的. 应当说明在客观实际与数学简化之间选择恰当的平衡点，是建模成功与否的关键，它体现了建模工作的想象力和创造性. 作为一门数学课程，建模还应利用一切可能的机会，加深学生对数学概念及定理本质的“直观”理解，使学生看到数学与现实密切相关，极其生动活泼的一面. 专门数学知识及特殊技巧的讲授则不是本课的直接目的.

在某种意义上，数学建模应当是一门“综合”课程. 让我们引用柯朗在“数学物理方法”一书德文版序言中的一段话对此加以阐明. 柯朗写道：“从 17 世纪以来，物理的直观，对于数学问题和方法是富有生命力的根源. 然而近年来的趋向和时尚，已将数学与物理学间的联系减弱了；数学家离开了数学的直观根源，而集中在推理精致和着重于数学的公设方面，甚至有时忽视数学与物理学以及其他科学领域的整体性. 在许多情况下，物理学家也不再体会数学家的观点. 这种分裂，无疑地对于整个科学是一个严重的威胁；科学发展的洪流，可能逐渐分裂成为细小而又细小的溪渠，以至干涸. 因此，有必要引导我们的努力转向于将许多有特点的和各式各样的科学事实的共同点及其相互关联加以阐明，以重新统一这种分离的趋向.”(译文引自该书中译本) 或许，我们今天所应做的，正是柯朗早已指出的事.

在数学建模课程中，应当允许使用“不严格”的数学. 这不仅

仅是出于实际可能的考虑，无须为此而不安．事实上，数学史中有大量的生动实例，说明许多重大数学概念与结论，包括无理数、虚数、无穷小概念、广义函数等等，开始都是不严格的．不恰当的严格要求将会扼杀可贵的创造欲望，事实上，理想化的绝对严格从未存在也不可能存在．然而，必须指出，允许不严格，不等于允许不正确，无依据或逻辑混乱．在无法进行严格的数学推理时，必须代之以对问题本身的分析，归纳，类比，猜测，尝试，事后检验等等．应当强调对问题数学本质的“理解”，以此取代形式严密，但掩盖了思想本质的证明．这实际对课程提出了更高的要求．

数学建模给予学生的是一种综合训练．为了成功地解决任何建模问题，参与者必须对问题本身有足够的知识，并有将其抽象成数学问题，并以恰当形式表述的能力．有解题所需要的数学素养，能够熟练使用计算机，还要有一定的语言表达能力．具有一定规模的建模问题一般都不能由个人独立完成，因此还要求参加者具有组织，协同的素养．通过完成适当数量的课外练习，学生可以在上述诸方面都得到一定训练．因此，在课堂讲授之外，必须强调实际动手之重要．学生只有完成足够数量的建模练习，才会真正有所收获．但应明确，全面素质的提高，绝非一门课程，一朝一夕之事．切勿对课程的效果预期过高．

数学建模课程中，在强调重视实际的同时，要使学生理解：数学绝不仅仅是工具．要从所做的数学推导和所得到的数学结论中，指出所包含的更一般更深刻的内在规律，指出从具体问题进一步抽象化，形式化，上升到更一般规律性认识的必要与可能．使学生理解，好的数学工作是如何源于现实而又高于现实的．数学建模课程应当更加恰当地对待理论和应用．我们不应仅以培养应用工作者为目标，我们还应希望培养出揭示基本自然规律的大师，如果我们贬低理论思维，这一目标决不可能实现．

简言之，数学建模作为一项教学改革课程，其最主要之点是课程指导思想的改革，它应当更全面地体现数学科学与现实世界

的关系，更均衡地对待理论和应用；它应当不仅对面向应用的学生有益，也应对学习纯粹数学的学生有益．它应有利于学生开阔眼界，开阔思路，养成正确的思维方式，对数学本质有更全面完整的理解，有利于学生综合能力的提高．

就笔者的理想而言，应当编出一本充分体现上述思想的教材．它应包括一系列精选的典型课题，涵盖尽可能广的理论与应用领域，深入浅出地讲授有关的数学建模问题．既介绍问题的背景与起源，也讨论有关的数学表达与演绎；既叙述问题的历史和现状，也指出尚待解决的课题与前景；既深入讨论某一途径的思想与方法，也介绍解决同类问题的其他处理；它不仅考虑应用数学专业的需要，也对学习纯粹数学的学生有益；它是一本真正作到将理论与应用有机结合起来的教材．笔者自知他本人远不具备为达到这一理想所必须的学识与能力，现在的这本教材便是明证．然而笔者坚信，上述设想是合理的，它应该实现，而且可能实现．也正因此，他才不揣冒昧，写下了这样一篇不合常规的序言，其目的在于抛砖引玉，使对数学建模课程的讨论深入一步，吸引学有专长的专家学者关心数学建模的课程建设，早日产生更为理想的教材．至于笔者所编写的这本讲义，如果能有三年寿命，则已是大喜过望了．

本书各章主要内容均有所本，每章后列出的只是编写时所依据的主要文献，实际上所涉及的书籍与论文远不止此，由于本书的性质，故未将它们一一列出．我的工作主要在于材料的选择与整理上．另外，在某些内容的叙述方式上，作了些许尝试．

本书将内容上有关联的章节连续编排，但各章均可独立讲授．各章所需的学时也有较大的灵活性，一方面它取决于学生的知识水平；另一方面也取决于教员所选择的讲授方法：详细讲授还是讲座式的概要介绍．对于愿意尝试使用这本教材的同行，请将本书仅仅视为一个“纲要”，一个“建议”或“提示”，而不将其视为最终的“演出本”．对于使用本书的同学，我希望他们将重点放在对

问题的整体把握上，用理解取代一时未能弄懂的数学细节．在阅读的同时要积极独立地进行思考，不要把书中的内容视为不可移易的唯一正确表述．事实上，限于作者的水平，书中定有许多处理不当以至错误之处，衷心地欢迎一切读者批评指正．

书后将美国大学生数学建模竞赛 (MCM) 历年试题作为附录，可供学生课外练习之用．在将这些题目收入本书时，参考叶其孝、谭永基以及姜启源诸先生的译文，重新做了翻译．我国历年大学生建模竞赛题目也是学生练习的极好材料，但因易于获取，且限于本书篇幅，未予收录．

本书在编写过程中自始至终得到了以姜伯驹先生为首的数学科学院各级领导的关怀和支持，姜先生还在百忙之中为本书写了序；高立、程乾生、王杰、钱敏平、黄文灶、朱照宣、徐树方和应隆安诸位先生给予了诸多指导和帮助；叶其孝与滕振寰先生对原稿进行了审阅，提出了许多中肯且有益的修改意见；责任编辑刘勇先生为本书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并表示诚挚的谢意．

雷功炎

1999 年 1 月

目　录