数 学 模 型

(第三版)

姜启源　谢金星　叶　俊　　编

高等教育出版社

策划编辑　徐　刚
编　　辑　王　强
封面设计　于文燕
责任绘图　尹　莉
版式设计　王艳红
责任校对　殷　然
责任印制

内容提要

本书第二版出版于1993年，基于10年来从事数学建模教学和组织数学建模竞赛的经验，考虑到计算机技术与数学软件的发展和普及，受到开设数学实验课及国外新版数学建模教材的启示，第三版在大体保持原貌的基础上，作了较大的补充与修改.增加数学规划模型和统计回归模型，及若干模型求解的数值计算、图形演示、灵敏度分析等内容，删节、合并、调整了若干章节，修订原有习题并增设了综合练习.

本书可作为高等学校各专业学生数学建模课程的教材和参加数学建模竞赛的辅导材料，以及科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学模型 姜启源，谢金星，叶俊编.—3版.—北京：高等教育出版社，2003.6

ISBN 7-04-011944-7

Ⅰ.数... Ⅱ.①姜...②谢...③叶... Ⅲ.数学模型 Ⅳ.O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第046760号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷			
		版　　次	1987年4月第1版
开　　本	787×960　1/16		年　月第　版
印　　张	27.75	印　　次	年　月第　次印刷
字　　数	520 000	定　　价	31.60元

第 三 版 序

回忆 1983 年初在清华大学应用数学系开设“数学模型”课程时，还没有一本中文教材.只有一本英文的参考书——E.A.Bender 的《数学模型引论》(其实朱尧辰等的中文译本已于 1982 年冬在科普出版社出版,但当时还未见到).同年暑假，在大连工学院举办了“数学模型”讲习班,参加这个班的一些青年教师对这门课程产生了很大的兴趣,其中的一部分后来就成为各校开设这门课程的第一批骨干教师.1987 年本书的第一版面世,几乎与此同时，还出版了几本各校自编的类似教材.

A.Einstein 有一句名言:想像力比知识更重要,因为知识是有限的,而想像力包括世界的一切，推动着进步，并且是知识的源泉.我想，这句话可以认为是开设“数学模型”这门课程的一个指导思想.

在一些学校陆续开设这门课程的同时，从上海开始，各地又先后组织了全市(省)大学生的“数学建模”竞赛.1992 年国家教委高教司与中国工业与应用数学学会正式联合举办了全国性的大学生“数学建模”竞赛. 十年来参与这个活动的学校越来越多，从而进一步推动了这门课程的建设. 在这种背景下，本书出了第二版.

90 年代中，教育部立项研究面向 21 世纪的大学数学内容及课程体系的改革，部分研究结果的报告已经出版,其中有建议把“数学实验”列为大学数学的一门基础课.虽然在目前已经开设出来的数学实验课程中，在内容上有不少差异，但其目的却大体一致，即通过学生自己动手，利用已有的数学软件来解决一些应用问题,这样自然就产生了“数学模型”与“数学实验”这两门课程之间的关系问题.本书的第三版试图在这方面作一点探索,即把“数学模型”放在更为广泛的数学基础上,从而使学者能从更广阔的数学视野来进行建模.当然,这种试探还在继续,本书第三版的出版,希望能引起大家更多的关注.

萧树铁

2003.2 于清华园

第三版前言

近几十年来，数学的应用不仅在它的传统领域——工程技术、经济建设——发挥着越来越重要的作用，而且不断地向一些新的领域渗透，形成了许多交叉学科——计量经济学、人口控制论、生物数学、地质数学等等.数学与计算机技术相结合,形成了一种普遍的、可以实现的关键技术——数学技术,成为当代高新技术的重要组成部分."高技术本质上是数学技术"的观点已被越来越多的人们所接受.

不论是用数学方法解决哪类实际问题,还是与其它学科相结合形成交叉学科,首要的和关键的一步是用数学的语言表述所研究的对象,即建立数学模型.在高科技,特别是计算机技术迅速发展的今天,计算和建模正在成为数学科学技术转化的主要途径.

教育必须反映社会的实际需要,数学建模进入大学课堂,既顺应时代发展的潮流,也符合教育改革的要求.对于数学教育而言,既应该让学生掌握准确快捷的计算方法和严密的逻辑推理,也需要培养学生用数学工具分析解决实际问题的意识和能力,传统的数学教学体系和内容无疑偏重于前者,开设数学建模课程则是加强后者的一种尝试.

数学建模课程是 20 世纪 80 年代初进入我国大学的.本书第一版出版于 1987 年,是我国第一本数学建模教材,当时只有少数几所学校的数学系开设这门课程.本书第二版出版于 1993 年,其时开设数学建模课程的学校增加到几十所,并且开始推向理工、经管等专业的同学.从 1993 年至今是数学建模教学迅速发展的十年,目前开设这门课程的学校已有几百所,出版的有关教材也有几十本.回顾这十年,对数学建模教学起着重要影响的因素,至少有以下几项:

1. 1992 年开始由教育部高教司和中国工业与应用数学学会举办的、每年一届的全国大学生数学建模竞赛,得到广大同学的热烈欢迎,以及教育部门、教师们的热情关心和支持,成为我国高校规模最大的课外科技活动.竞赛促进了数学建模教学的开展;教学又扩大了受益面,为竞赛奠定了坚实的基础.

2. 举行了 4 次全国数学建模教学与应用会议和多次教师培训班,经验交流和专家讲学促进了各校数学建模教学质量的不断提高.2001 年在北京成功举办的第 10 届国际数学建模教学与应用会议也起了积极影响.

3. 计算机技术及数学软件的飞速发展和普及,为改善、丰富数学建模课程

的内容提供了条件.一些学校数学实验课、数学建模系列课的开设,给数学建模教学内容和方法的改革以很大的启示,原来数学建模课上只作理论分析、课下只作笔头练习的情况得以改进.

4. 数学建模教学和竞赛的开展,对数学教学体系、内容和方法改革起了积极的推动作用,得到众多教育界人士和教师们的认可.将数学建模的思想和方法有机地融入大学数学主干课程中去的研究与实践已经起步,教数学建模课和教数学主干课的教师互相结合与交流,在教学上得以相互借鉴与促进.

编者基于长期从事数学建模教学、数学建模竞赛的组织,以及近年讲授数学实验课的经验,考虑到上述几项因素,听取了一些同行的意见,又参考了国外几本新版的数学建模教材,决定出第三版.该版大体保持第二版的原貌,但是有以下几项大的补充与修改:

1. 增加了数学规划模型和统计回归模型.它们原本就是两类重要的数学模型,在第一、二版中没有涉及到,一是因为当时求解这些模型的数学软件尚不完善和普及,难以对模型的结果进行分析和评价;二是当时数学建模课主要为数学类学生所设,他们另有专门课程学习这些模型.现在通用软件(如 MATLAB, MATHEMATICA)和专用软件(如 LINDO, SAS)已非常成熟和相当普及,使我们不必涉及模型的理论和算法,可以只从建模的角度,通过实例着重于模型和变量的选择和处理技巧,及结果的分析(如灵敏性、误差等).再者,越来越多的非数学类学生在上数学建模课,他们多数不再有专门课程学习这些模型,在这门课里学习这两类建模方法是必要的.

2. 在若干实例中增加了模型求解的数值计算、图形演示, 及参数的灵敏度分析等内容.不论从问题研究的途径和学生接受的角度出发, 先通过数值计算和图形观察对现象进行分析和猜测, 再从理论上给以推导和验证, 都是值得注意和提倡的研究方法, 数学软件的完善和普及已经为此提供了物质条件.

3. 删节、合并、调整了若干章节.考虑到书的容量不要过大, 有增必有减, 由于主要对象已是非数学类的学生, 所以删去了一些需要较多数学知识的实例.从便于教学的角度,将较为复杂、相对次要的章节放在全书或每章的最后.

4. 修订了原有的习题, 增设了综合题目,并编写了习题参考解答(另行出版).学习数学建模必须亲手作一些实际题目,为加强这方面的训练, 除了对原来的习题作增补、修改、删节外,特别编撰了一些较为综合、工作量稍大的题目,放在全书的最后,可供教师选为期中或期末的作业.习题中标以 * 号的仍然是需要读者自己作出假设及建模的题目.

5. 编制了大部分章节的多媒体课件(另行出版).数学建模是一门内容活泼、信息量大, 基本不涉及新的数学概念, 不需要太多数学推导的课程, 有时还可以用数学软件作数值计算和图形演示, 特别适合多媒体教学.由于时间和精

力所限，目前提供的课件存在许多不完善之处，今后将陆续出版增补、改进的版本.

最后，对使用本书作为教材或参考书的教师提几点建议：

1. 数学建模课基本上是案例式教学，内容连贯性不强，书中的章节可以跳跃式地选用，未在课堂上讲授的内容可作为课外阅读材料.从培养学生数学建模的意识、方法和能力的角度看，目前这种阅读材料不是太多，而是少了，因此本书有意包含了一些估计不会在课上讲授的内容.

2. 对于课程学时在 40 以上的非数学类本科生，可讲授第 1,2,3,5,7,8,9 章的部分内容；学时在 40 以下，及大专、高职学生，可讲授第 1,2,3,5,7 章的部分内容.第 4,10 章是用途很广的两类模型，但需要相应的数学软件,是否讲授可视软件条件而定.

3. 对于课程学时在 40 以上的数学类本科生，可讲授第 1,2,3,5,6,7,8,9,11 章的部分内容，第 4,10 章是否讲授，可考虑运筹、统计课的设置及其内容与此有无重复,以及相应的软件条件.

第 4 章由谢金星编写,第 10 章由叶俊编写,其余各章由姜启源增补、修订,全书由姜启源统稿.

萧树铁先生 1983 年在清华大学首次为本科生讲授数学模型课程,是我国高校开设数学模型课程的创始人,20 年来一直关心着课程的发展及教材建设,曾为本书第一、二版作序,现在又为第三版撰写序言,在此表示衷心的谢意.

我们向许多在使用本书第一、二版的过程中提出宝贵建议的教师们致谢,希望大家共同努力,为数学建模教学和竞赛活动取得更大成绩继续奋斗.

编者

2003.2

目　　录

第 1 章　建立数学模型 …… 1
1.1　从现实对象到数学模型 …… 1
1.2　数学建模的重要意义 …… 4
1.3　建模示例之一　椅子能在不平的地面上放稳吗 …… 6
1.4　建模示例之二　商人们怎样安全过河 …… 7
1.5　建模示例之三　如何预报人口的增长 …… 9
1.6　数学建模的基本方法和步骤 …… 16
1.7　数学模型的特点和分类 …… 18
1.8　数学建模能力的培养 …… 21
习题 …… 22
第 2 章　初等模型 …… 24
2.1　公平的席位分配 …… 24
2.2　录像机计数器的用途 …… 27
2.3　双层玻璃窗的功效 …… 30
2.4　汽车刹车距离 …… 32
2.5　划艇比赛的成绩 …… 34
2.6　动物的身长和体重 …… 37
2.7　实物交换 …… 38
2.8　核军备竞赛 …… 40
2.9　扬帆远航 …… 44
2.10　量纲分析与无量纲化 …… 46
习题 …… 55
第 3 章　简单的优化模型 …… 59
3.1　存贮模型 …… 59
3.2　生猪的出售时机 …… 64
3.3　森林救火 …… 66
3.4　最优价格 …… 68
3.5　血管分支 …… 69
3.6　消费者的选择 …… 72
3.7　冰山运输 …… 74
习题 …… 79

第 4 章 数学规划模型 …… 82
4.1 奶制品的生产与销售 …… 82
4.2 自来水输送与货机装运 …… 92
4.3 汽车生产与原油采购 …… 97
4.4 接力队的选拔与选课策略 …… 106
4.5 饮料厂的生产与检修 …… 116
4.6 钢管和易拉罐下料 …… 121
习题 …… 130
第 5 章 微分方程模型 …… 135
5.1 传染病模型 …… 135
5.2 经济增长模型 …… 144
5.3 正规战与游击战 …… 147
5.4 药物在体内的分布与排除 …… 153
5.5 香烟过滤嘴的作用 …… 157
5.6 人口的预测和控制 …… 162
5.7 烟雾的扩散与消失 …… 167
5.8 万有引力定律的发现 …… 170
习题 …… 173
第 6 章 稳定性模型 …… 177
6.1 捕鱼业的持续收获 …… 177
6.2 军备竞赛 …… 181
6.3 种群的相互竞争 …… 184
6.4 种群的相互依存 …… 190
6.5 食饵 - 捕食者模型 …… 192
6.6 微分方程稳定性理论简介 …… 198
习题 …… 201
第 7 章 差分方程模型 …… 203
7.1 市场经济中的蛛网模型 …… 203
7.2 减肥计划——节食与运动 …… 207
7.3 差分形式的阻滞增长模型 …… 210
7.4 按年龄分组的种群增长 …… 216
7.5 差分方程简介 …… 220
习题 …… 222
第 8 章 离散模型 …… 224
8.1 层次分析模型 …… 224
8.2 循环比赛的名次 …… 244
8.3 社会经济系统的冲量过程 …… 248
8.4 效益的合理分配 …… 253

8.5 存在公正的选举规则吗 …… 262
习题 …… 268
第 9 章 概率模型 …… 271
9.1 传送系统的效率 …… 271
9.2 报童的诀窍 …… 273
9.3 随机存贮策略 …… 275
9.4 轧钢中的浪费 …… 278
9.5 随机人口模型 …… 281
9.6 航空公司的预订票策略 …… 284
9.7 广告中的学问 …… 289
习题 …… 292
第 10 章 统计回归模型 …… 294
10.1 牙膏的销售量 …… 294
10.2 软件开发人员的薪金 …… 302
10.3 酶促反应 …… 308
10.4 投资额与生产总值和物价指数 …… 316
10.5 教学评估 …… 322
习题 …… 326
第 11 章 马氏链模型 …… 333
11.1 健康与疾病 …… 333
11.2 钢琴销售的存贮策略 …… 338
11.3 基因遗传 …… 341
11.4 等级结构 …… 345
11.5 资金流通 …… 353
习题 …… 356
第 12 章 动态优化模型 …… 358
12.1 速降线与短程线 …… 358
12.2 生产计划的制订 …… 363
12.3 国民收入的增长 …… 365
12.4 渔船出海 …… 367
12.5 赛跑的速度 …… 370
12.6 多阶段最优生产计划 …… 375
习题 …… 382
第 13 章 其它模型 …… 384
13.1 废水的生物处理 …… 384
13.2 红绿灯下的交通流 …… 389
13.3 鲑鱼数量的周期变化 …… 398
13.4 价格指数 …… 402

13.5　设备检查方案 …… 407
习题 …… 409
综合题目 …… 411
参考文献 …… 425

第 1 章　建立数学模型

随着科学技术的迅速发展,数学模型这个词汇越来越多地出现在现代人的生产、工作和社会活动中.电气工程师必须建立所要控制的生产过程的数学模型,用这个模型对控制装置作出相应的设计和计算,才能实现有效的过程控制.气象工作者为了得到准确的天气预报,一刻也离不开根据气象站、气象卫星汇集的气压、雨量、风速等资料建立的数学模型.生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型,就可以分析药物的疗效,有效地指导临床用药.城市规划工作者需要建立一个包括人口、经济、交通、环境等大系统的数学模型,为领导层对城市发展规划的决策提供科学根据.厂长经理们要是能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息,筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型,一定可以获得更大的经济效益.就是在日常活动如访友、采购当中,人们也会谈论找一个数学模型,优化一下出行的路线.对于广大的科学技术人员和应用数学工作者来说,建立数学模型是沟通摆在面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的桥梁.

本章作为全书的导言和数学模型的概述,主要讨论建立数学模型的意义、方法和步骤,给读者以建立数学模型的全面的、初步的了解.1.1 节介绍现实对象和它的模型的关系,给出一些模型形式,说明什么是数学模型;1.2 节阐述建立数学模型的重要意义;1.3～1.5 节通过几个示例说明用数学语言和数学方法表述和解决实际问题,即建立数学模型的过程;1.6 节阐述建立数学模型的一般方法和步骤;1.7 节介绍数学模型的特点及数学模型的分类;1.8 节讨论建立数学模型能力的培养.

1.1　从现实对象到数学模型

人类生活在丰富多彩、变化万千的现实世界里,无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界,从而不断地创造出日新月异、五彩缤纷的物质文明和精神文明.博览会常常是集中展示这些成果的场所之一,那些五光十色、精美绝伦的展品给我们留下了深刻的印象.工业博览会上,豪华、舒适的新型汽车叫人赞叹不已;农业博览会上,硕大、娇艳的各种水果令人流连忘返;科技展览厅里,大型水电站模型雄伟壮观,人造卫星模型高高耸立,清晰的数字和图表显示

着电力工业的迅速发展,和整面墙壁一样大的地图上鲜明地标出了新建的铁路和新辟的航线,核电站工程的彩色巨照前,手持原子结构模型的讲解员深入浅出地介绍反应堆的运行机理;电影演播室里,播放着一部现代化炼钢厂实现生产自动控制的科技影片,其中既有火花四溅的钢坯浇铸情景,也有展示计算机管理和控制的框图、公式和程序.

参观博览会,像汽车、水果那些原封不动地从现实世界搬到展厅里的物品固然给人以亲切真实的感受,可是从开阔眼界、丰富知识的角度看,电站、卫星、铁路、钢厂……这些在现实世界被人们认识、建造、控制的对象,以它们的各种形式的模型——实物模型、照片、图表、公式、程序……汇集在人们面前,这些模型在短短几小时里所起的作用,恐怕是置身现实世界多少天也无法做到的.

与形形色色的模型相对应,它们在现实世界里的原始参照物通称为原型.本节先讨论原型和模型,特别是数学模型的关系,再介绍数学模型的意义.

原型和模型 原型(Prototype)和模型(Model)是一对对偶体.原型指人们在现实世界里关心、研究或者从事生产、管理的实际对象.在科技领域通常使用系统(System)、过程(Process)等词汇,如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统,又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等.本书所述的现实对象、研究对象、实际问题等均指原型.模型则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而构造的原型替代物.

这里特别强调构造模型的目的性.模型不是原型原封不动的复制品,原型有各个方面和各种层次的特征,而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面和层次.一个原型,为了不同的目的可以有许多不同的模型.如放在展厅里的飞机模型应该在外形上逼真,但是不一定会飞.而参加航模竞赛的模型飞机要具有良好的飞行性能,在外观上不必苛求.至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模拟,则只要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性,毫不涉及飞机的实体.所以模型的基本特征是由构造模型的目的决定的.

我们已经看到模型有各种形式.用模型替代原型的方式来分类,模型可以分为物质模型(形象模型)和理想模型(抽象模型).前者包括直观模型、物理模型等,后者包括思维模型、符号模型、数学模型等.

直观模型 指那些供展览用的实物模型,以及玩具、照片等,通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大,主要追求外观上的逼真.这类模型的效果是一目了然的.

物理模型 主要指科技工作者为一定目的根据相似原理构造的模型,它不仅可以显示原型的外形或某些特征,而且可以用来进行模拟实验,间接地研究原型的某些规律.如波浪水箱中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能,

风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的空气动力学特性.有些现象直接用原型研究非常困难,更可借助于这类模型,如地震模拟装置、核爆炸反应模拟设备等.应注意验证原型与模型间的相似关系,以确定模拟实验结果的可靠性.物理模型常可得到实用上很有价值的结果,但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点.

思维模型　指通过人们对原型的反复认识,将获取的知识以经验形式直接贮存于人脑中,从而可以根据思维或直觉作出相应的决策.如汽车司机对方向盘的操纵、一些技艺性较强的工种(如钳工)的操作,大体上是靠这类模型进行的.通常说的某些领导者凭经验作决策也是如此.思维模型便于接受,也可以在一定条件下获得满意的结果,但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点,难以对它的假设条件进行检验,并且不便于人们的相互沟通.

符号模型　是在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等,按一定形式组合起来描述原型.如地图、电路图、化学结构式等,具有简明、方便、目的性强及非量化等特点.

本书要专门讨论的数学模型则是由数字、字母或其它数学符号组成的,描述现实对象数量规律的数学公式、图形或算法.

什么是数学模型　其实你早在学习初等代数的时候就已经碰到过数学模型了.当然其中许多问题是老师为了教会学生知识而人为设置的.譬如你一定解过这样的所谓"航行问题":

甲乙两地相距 750 km,船从甲到乙顺水航行需 30 h,从乙到甲逆水航行需 50 h,问船速、水速各若干?

用 x, y 分别代表船速和水速,可以列出方程

$$(x+y)\cdot 30 = 750, \quad (x-y)\cdot 50 = 750$$

实际上,这组方程就是上述航行问题的数学模型.列出方程,原问题已转化为纯粹的数学问题.方程的解 $x = 20$ km/h, $y = 5$ km/h,最终给出了航行问题的答案.

当然,真正实际问题的数学模型通常要复杂得多,但是建立数学模型的基本内容已经包含在解这个代数应用题的过程中了.那就是:根据建立数学模型的目的和问题的背景作出必要的简化假设(航行中设船速和水速为常数);用字母表示待求的未知量(x, y 代表船速和水速);利用相应的物理或其它规律(匀速运动的距离等于速度乘以时间),列出数学式子(二元一次方程);求出数学上的解答($x = 20, y = 5$);用这个答案解释原问题(船速和水速分别为 20 km/h 和 5 km/h);最后还要用实际现象来验证上述结果.

一般地说,数学模型可以描述为,对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定目的,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工

具,得到的一个数学结构.

需要指出,本书的重点不在于介绍现实对象的数学模型(Mathematical Model)是什么样子,而是要讨论建立数学模型(Mathematical Modelling)的全过程.建立数学模型下面简称为数学建模或建模.

与数学模型有密切关系的数学模拟,主要指运用数字式计算机的计算机模拟(Computer Simulation).它根据实际系统或过程的特性,按照一定的数学规律用计算机程序语言模拟实际运行状况,并依据大量模拟结果对系统或过程进行定量分析.例如通过各种工件在不同机器上按一定工艺顺序加工的模拟,能够识别生产过程中的瓶颈环节;通过高速公路上交通流的模拟,可以分析车辆在路段上的分布特别是堵塞的状况.与用物理模型的模拟实验相比,计算机模拟有明显的优点:成本低、时间短、重复性高、灵活性强.有人把计算机模拟作为建立数学模型的手段之一,但是数学模型在某种意义下描述了对象内在特性的数量关系,其结果容易推广,特别是得到了解析形式答案时,更易推广.而计算机模拟则完全模仿对象的实际演变过程,难以从得到的数字结果分析对象的内在规律.当然,对于那些因内部机理过于复杂,目前尚难以建立数学模型的实际对象,用计算机模拟获得一些定量结果,可称是解决问题的有效手段.

1.2 数学建模的重要意义

数学,作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学,在它产生和发展的历史长河中,一直是和人们生活的实际需要密切相关的.作为用数学方法解决实际问题的第一步,数学建模自然有着与数学同样悠久的历史.两千多年以前创立的欧几里德几何,17 世纪发现的牛顿万有引力定律,都是科学发展史上数学建模的成功范例.

进入 20 世纪以来,随着数学以空前的广度和深度向一切领域的渗透,和电子计算机的出现与飞速发展,数学建模越来越受到人们的重视,可以从以下几方面来看数学建模在现实世界中的重要意义.

1) 在一般工程技术领域,数学建模仍然大有用武之地.

在以声、光、热、力、电这些物理学科为基础的诸如机械、电机、土木、水利等工程技术领域中,数学建模的普遍性和重要性不言而喻.虽然这里的基本模型是已有的,但是由于新技术、新工艺的不断涌现,提出了许多需要用数学方法解决的新问题;高速、大型计算机的飞速发展,使得过去即便有了数学模型也无法求解的课题(如大型水坝的应力计算,中长期天气预报等)迎刃而解;建立在数学模型和计算机模拟基础上的 CAD 技术,以其快速、经济、方便等优势,大量地替代了传统工程设计中的现场实验、物理模拟等手段.

2) 在高新技术领域,数学建模几乎是必不可少的工具.

无论是发展通讯、航天、微电子、自动化等高新技术本身,还是将高新技术用于传统工业去创造新工艺、开发新产品,计算机技术支持下的建模和模拟都是经常使用的有效手段.数学建模、数值计算和计算机图形学等相结合形成的计算机软件,已经被固化于产品中,在许多高新技术领域起着核心作用,被认为是高新技术的特征之一.在这个意义上,数学不再仅仅作为一门科学,是许多技术的基础,而且直接走向了技术的前台.国际上一位学者就提出了“高技术本质上是一种数学技术”的观点.

3) 数学迅速进入一些新领域,为数学建模开拓了许多新的处女地.

随着数学向诸如经济、人口、生态、地质等所谓非物理领域的渗透,一些交叉学科如计量经济学、人口控制论、数学生态学、数学地质学等应运而生.这里一般地说不存在作为支配关系的物理定律,当用数学方法研究这些领域中的定量关系时,数学建模就成为首要的、关键的步骤和这些学科发展与应用的基础.在这些领域里建立不同类型、不同方法、不同深浅程度的模型的余地相当大,为数学建模提供了广阔的新天地.马克思说过:“一门科学只有成功地运用数学时,才算达到了完善的地步”.展望 21 世纪,数学必将大踏步地进入所有学科,数学建模将迎来蓬勃发展的新时期.

今天,在国民经济和社会活动的以下诸多方面,数学建模都有着非常具体的应用.

分析与设计　例如描述药物浓度在人体内的变化规律以分析药物的疗效;建立跨音速流和激波的数学模型,用数值模拟设计新的飞机翼型.

预报与决策　生产过程中产品质量指标的预报、气象预报、人口预报、经济增长预报等等,都要有预报模型;使经济效益最大的价格策略、使费用最少的设备维修方案,是决策模型的例子.

控制与优化　电力、化工生产过程的最优控制、零件设计中的参数优化,要以数学模型为前提.建立大系统控制与优化的数学模型,是迫切需要和十分棘手的课题.

规划与管理　生产计划、资源配置、运输网络规划、水库优化调度,以及排队策略、物资管理等,都可以用数学规划模型解决.

数学建模与计算机技术的关系密不可分.一方面,像新型飞机设计、石油勘探数据处理中数学模型的求解当然离不开巨型计算机,而微型电脑的普及更使数学建模逐步进入人们的日常活动.比如当一位公司经理根据客户提出的产品数量、质量、交货期等要求,用手提电脑与客户进行价格谈判时,您不会怀疑他的电脑中贮存了由公司的各种资源、产品工艺流程及客户需求等数据研制的数学模型——快速报价系统和生产计划系统.另一方面,以数字化为特征的信息正以

爆炸之势涌入计算机,去伪存真、归纳整理、分析现象、显示结果……,计算机需要人们给它以思维的能力,这些当然要求助于数学模型.所以把计算机技术与数学建模在知识经济中的作用比喻为如虎添翼,是恰如其分的.

美国科学院一位院士总结了将数学科学转化为生产力过程中的成功和失败,得出了"数学是一种关键的、普遍的、可以应用的技术"的结论,认为数学"由研究到工业领域的技术转化,对加强经济竞争力具有重要意义",而"计算和建模重新成为中心课题,它们是数学科学技术转化的主要途径".

1.3　建模示例之一　椅子能在不平的地面上放稳吗

本节和下面两节将给出三个数学建模的例子,重点说明如何作出合理的、简化的假设,用数学语言确切地表述实际问题,以及模型的结果怎样解释实际现象.

本节讨论的问题来源于日常生活中一件普通的事实:把椅子往不平的地面上一放,通常只有三只脚着地,放不稳,然而只需稍挪动几次,就可以使四只脚同时着地,放稳了.这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言给以表述,并用数学工具来证实吗?让我们试试看[32].

模型假设　对椅子和地面应该作一些必要的假设:

1. 椅子四条腿一样长,椅脚与地面接触处可视为一个点,四脚的连线呈正方形.

2. 地面高度是连续变化的,沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况),即地面可视为数学上的连续曲面.

3. 对于椅脚的间距和椅腿的长度而言,地面是相对平坦的,使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

假设1显然是合理的.假设2相当于给出了椅子能放稳的条件,因为如果地面高度不连续,譬如在有台阶的地方是无法使四只脚同时着地的.至于假设3是要排除这样的情况:地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内,出现深沟或凸峰(即使是连续变化的),致使三只脚无法同时着地.

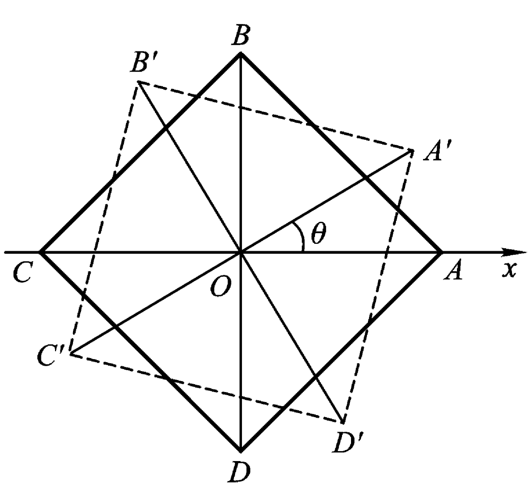

图1　变量θ表示椅子的位置

模型构成　中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来.

首先要用变量表示椅子的位置.注意到椅脚连线呈正方形,以中心为对称点,正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变,于是