数學美學

蘇步青題

吴开朗 著

北 京 教 育 出 版 社

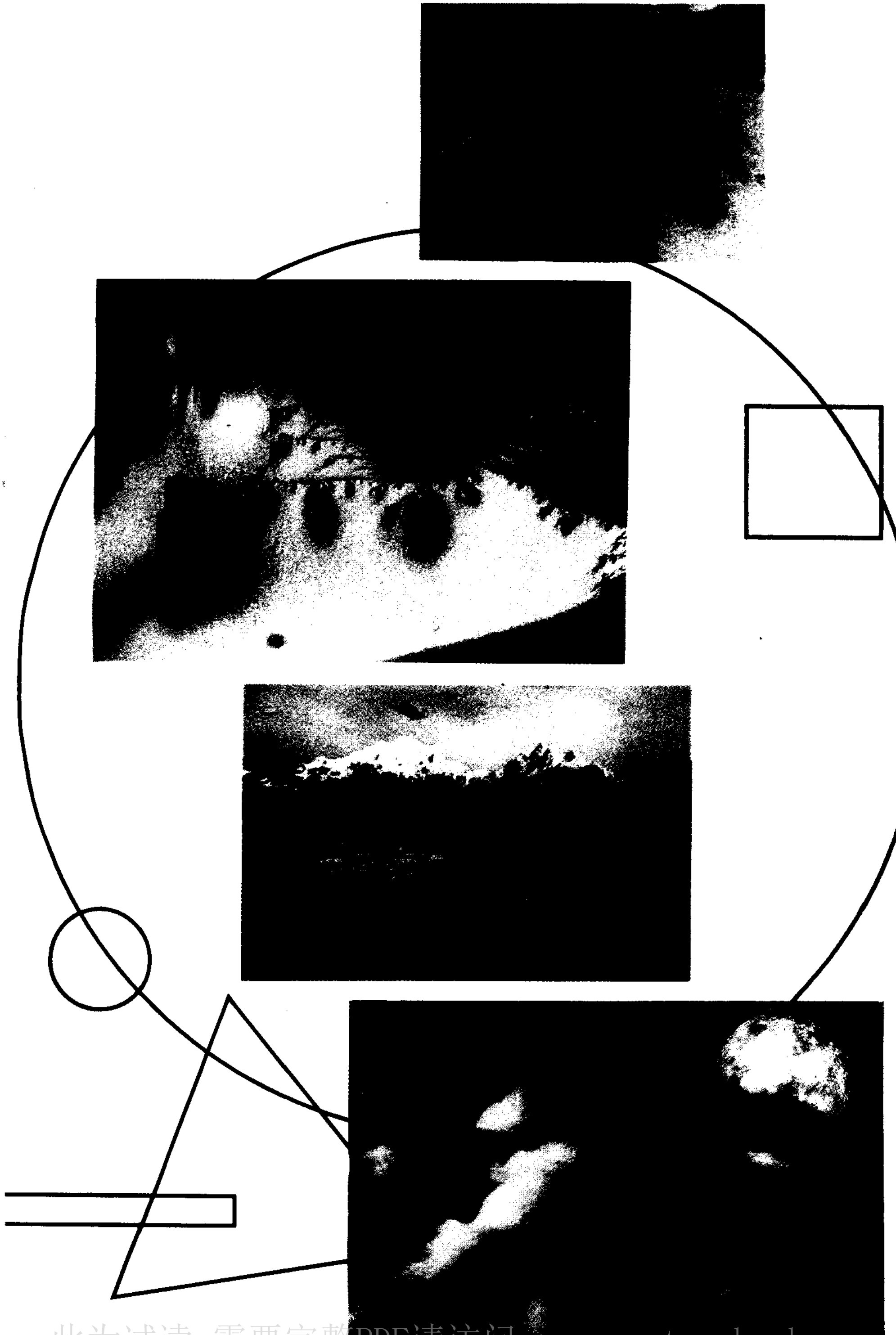
一 九 九 三 · 北京

内 容 提 要

本书主要内容是研究数学理论的美学标准问题。全书共分11章57节，首先按照历史发展的顺序，介绍世界知名数学家对于数学美的执着追求，以及他们对于数学理论中真善美的研究成果，并结合论述美学在数学发展中的历史作用。数学是一个严谨优美和谐的体系，它虽然可划分为纯粹数学与应用数学两大部分，但二者都是优美多姿的，书中还提出数学美的基本特性有：和谐性、简单性与奇异性等。为了进一步丰富数学美的内涵，对于无限、悖论、数学公理、数学模型，均设立专章进行讨论。为了激发读者对于数学美的憧憬与向往，特意设立两章《数学教学的审美观》、《数学研究的审美观》，对于数学教学中如何培养学生的审美情趣以及数学研究中如何激发数学直觉思维，均作了深入分析。

英国数学教育家大卫·威尔斯教授在为本书所写序言中曾说："我有幸能把这本书介绍给对于数学美知之甚少的读者，使大家认识到"美"确实是推动数学发展并取得巨大成就的动力之一。"

本书主要读者对象是大中学校数学教师，以及从事数学专业学习的青年学生，亦可供从事哲学、美学、数学方法论、自然辩证法等学科的教学和研究工作者参考！



目　录

序(一)

英国数学教育家大卫·威尔斯教授

自古希腊以来，美作为数学的重要组成部分已得到公认。然而直到今天，亦然有些数学哲学家对数学美不表示多大关注。他们似乎完全忽视了它的存在，甚至在未曾研究过数学美的情况下，就“合理地”推出结论：数学美与他们的哲学无关，这就好像是认为数学美根本不存在一样。

客观地说，自然哲学家的做法也与此雷同。尽管是许多科学家、尤其是许多著名物理学家，他们在研究量子相对论和宇宙尖端科学时，无不是在理论上运用了数学知识，在工作上运用了审美标准。某些举世闻名的自然哲学家在论著中好像只是把科学理论中的美作为一种点缀，而并没有赋予它以特别重要的意义。

事实并非如此，对于美的欣赏不仅是数学和自然科学活动的重要方面，而且它也是富有魅力的。最近，我兴奋地公布了一份调查报告，这是专业数学家对于24个数学问题的评价。*

果然不出所料，对于这个评价，有许多赞同者，也有许多人持强烈反对意见。例如，一个由印度大数学家罗曼尼简(Ramanujan)所提出的定理，在他刚刚去世不久，该定理被誉为“至上美”，但当今的数学家，则对此评价不高。由此可见，人们审美观念的变化是何等迅速啊！数学家个人的审美观也具有一定的独特性，往往是各人爱其所爱！

可喜的是，吴教授不仅具有丰富的鉴赏力，而且他对于数学家们在研究工作中的审美观点也有较全面的了解。我有幸能把他

所写的这本书介绍给对于数学美知之甚少的广大读者，使他们认识到美确实是推动数学发展并取得巨大成就的动力之一。

现在再谈一点我的个人希望，我曾经任教于初级和中级学校，深知学生很容易对数学产生厌烦情绪。这不仅是因为数学教学的墨守成规和枯燥乏味，而且大都是由于在教学中忽视了数学美能够以其特有的奇异和神秘而产生巨大的力量。

我衷心希望广大数学教师都来研究吴教授的著作，并且都能在教学中恰如其份地强调数学的审美情趣，通过这种方法将会使更多的学生喜爱数学，并且循此继续前进，以企在学业上取得更大的成就！

David Wells

大卫·威尔斯　1990. 10. 19

* 大卫·威尔斯：《这些都是最美的吗？》《数学情报》第12卷第3期1990。

序(二)

美国数学家孙述寰教授

数学家们总是追求数学的真善美，正如哈尔曼·韦尔所说：“我为真和美而工作，当二者发生冲突时，我宁愿舍真而求美。”很显然，数学家们对于数学美的关注没有一千年，也有几百年了，然而，对于数学的审美问题，人们总是不能取得 致意见。不过，数学美总会一直保留下来的，因为，它就像文学和美术作品一样，每一个数学家都有同等的权利去欣赏数学中的美。

尽管在数学审美观念方面人们很难形成一致的意见，但有一点是很重要的：我们应该尽早向学生说明，数学与审美是密切相关的，学习数学不应该仅仅只是收集一些枯燥无味的公式和解题诀窍。吴教授关于数学美学的著作，对于数学教育文献，显然是一个重要补充。现代教育理论特别强调科学的趣味性。向学生指出数学中的美，并引导他们去欣赏这些美，将会有助于扩大数学的影响，这样一来，数学将会变成一门更加受人重视的研究领域。

希望由于这本书的出版，将会引起更多的数学家从事于数学美的研究，由此可以发掘出更多的数学美，并使其日臻完善。最后一点，当然也是特殊重要的，希望每一个数学爱好者都能够把自己所研究的审美观点毫无保留地推荐给你的同行们！

Hugo S. H. Sun

孙述寰 90.8.18

作者自序

毛主席的哲学名著《实践论》，当时为了着重揭露看轻实践的教条主义观点，曾强调指出："判定认识或理论之是否真理，不是依主观上觉得如何而定，而是依客观上社会实践的结果如何而定。"*但该书的另一写作动机，乃是极力反对轻视理论的经验主义观点，因而书中又提出："要完全地反映整个的事物，反映事物的本质，反映事物的内部规律性，就必须经过思考作用，将丰富的感觉材料加以去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理论的系统，就必须从感性认识跃进到理性认识。"**这里所说的造成概念和理论系统的抽象思维方法，可以概括为"去"、"取"、"由"、"及"四个字，"去"、"取"是讲如何进行选择？如何进行抽象？"由"、"及"是讲如何进行推理？如何进行计算？这就是科学哲学方法论。

在变量数学时期刚刚发展起来的微积分，当时在推理过程中存在着逻辑矛盾，曾遭到一些数学家的反对。但是大多数学者则认为这种理论能够解决自然科学的实际问题，应积极地构造这种理论的逻辑基础，使之日臻完善，这就是所谓的分析数学的严格化。除此而外，当时盛行的还有代数的抽象化和几何的非欧化，其实质这些都是公理化方法的推广、发展与繁衍的结果，使得整个纯粹数学领域呈现出一派欣欣向荣的景象。这时，数学是演绎科学的观点在数学界已取得支配地位，大多数数学家都承认逻辑的

* 毛泽东：《实践论》1952年人民出版社出版第3页。

** 毛泽东：《实践论》1967年《毛泽东选集》横排袖珍本人民出版社出版第268页。

严密性也是检验数学理论真理性的标准。例如，在苏联出版的《数学——它的内容、方法和意义》一书中，就曾经这样写道："如果自然科学家为了证明自己的论断，总是求助于实验，那末，数学家证明定理只需要推理和计算。……我们可以极精确地测量成千上万个等腰三角形的底角，但这并不能给我们以关于等腰三角形两底角相等的定理的数学证明。数学要求从几何的基本概念推导出这个结果（现在在几何的严格叙述中基本概念的性质是精确地表述在公理中）。"这里所说的推理和计算，用哲学术语来描述，即可概括为"由此及彼、由表及里"。由此可见，"由"、"及"这两个字的含义，也可以做为检验数学理论真理性标准的一个层次。

英国数学家兼哲学家A·N·怀特海（Whitehead）在美国哈佛大学曾经作过一次著名讲演，这次讲演的题目为《数学与善》，这一篇文章乃是关于数学这一学科一般性质的哲学分析。我国著名数学教授徐利治和郑毓信在评论怀特海的这篇文章时，提出了关于"数学真理及真理性程度"的论点。这个论点认为：

"数学真理的层次结构应该是这样的：

第一层次——逻辑合理性，

第二层次——模式真理性，

第三层次——现实真理性。"*

《实践论》中所提出的"由此及彼，由表及里"，是讲推理和计算，相当于这里所说的"第一层次——逻辑合理性"；《实践论》中所提出的"去粗取精，去伪取真"，是讲选择和抽象，相当于这里所说的"第二层次——模式真理性"；《实践论》中所提出的"实践是检验真理的标准"**，相当于这里所说的"第三层次——现实真理性"。因此，我们认为徐利治、郑毓信两位教授所提出的数学真理层次结构论，与《实践论》中所阐述的关于数学真理检验的标准问题，其基本思想是吻合的。

---

* 中国自然辩证法研究会主办《自然辩证法研究》1988年1月第24页。

** 《毛泽东选集》1967年横排袖珍本人民出版社出版第269页。