

數學美學

蘇步青題



吳開朗 著

北京教育出版社

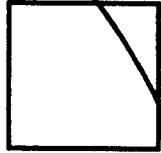
一九九三·北京

内 容 提 要

本书主要内容是研究数学理论的美学标准问题。全书共分11章57节，首先按照历史发展的顺序，介绍世界知名数学家对于数学美的执着追求，以及他们对于数学理论中真善美的研究成果，并结合论述美学在数学发展中的历史作用。数学是一个严谨优美和谐的体系，它虽然可划分为纯粹数学与应用数学两大部分，但二者都是优美多姿的，书中还提出数学美的基本特性有：和谐性、简单性与奇异性等。为了进一步丰富数学美的内涵，对于无限、悖论、数学公理、数学模型，均设立专章进行讨论。为了激发读者对于数学美的憧憬与向往，特意设立两章《数学教学的审美观》、《数学研究的审美观》，对于数学教学中如何培养学生的审美情趣以及数学研究中如何激发数学直觉思维，均作了深入分析。

英国数学教育家大卫·威尔斯教授在为本书所写序言中曾说：“我有幸能把这本书介绍给对于数学美知之甚少的读者，使大家认识到“美”确实是推动数学发展并取得巨大成就的动力之一。”

本书主要读者对象是大中学校数学教师，以及从事数学专业学习的青年学生，亦可供从事哲学、美学、数学方法论、自然辩证法等学科的教学和研究工作者参考！



目 录

序 (一)	【英】 大卫·威尔斯(1)
序 (二)	【美】 孙述寰(3)
作者自序	(4)
第一章 数学美学是一门新兴学科	(1)
第一节 什么是美?	(2)
一、从词源学中来寻觅美的含义	(2)
二、什么是广义的美?	(3)
三、古希腊人对于美的定义	(3)
四、我国美学界对于美的定义问题所进行的新探索	(3)
第二节 什么是美学?	(4)
一、“Aesthetik”一词的来源	(5)
二、“Aesthetios”一词的含意	(5)
三、中国古代美学的渊源	(6)
四、近代应用美学的崛起	(7)
第三节 古希腊数学家已经从数学中认识到美、和谐、 简单、明确以及秩序的存在	(7)
第四节 世界知名数学家论数学理论的美学标准	(15)
一、英国数学家罗素的美学标准	(15)
二、美国数学家布克豪夫的美学标准	(16)
三、英国数学家哈代的美学标准	(17)
四、美国数学家哈尔莫斯的美学标准	(18)
五、英国数学家阿蒂亚的美学标准	(19)
第五节 数学理论美学标准的基本要素	(19)

第六节	数学理论中真善美的辩证统一·····	(30)
第二章	数学在古希腊时代被人们珍视为一门艺术·····	(33)
第一节	毕达哥拉斯对于数学理论美学标准的研究·····	(34)
一、	费尔马大定理的来龙去脉·····	(37)
二、	费尔马小定理和似质数·····	(40)
三、	一个不幸的费尔马猜想·····	(41)
四、	音乐数学的起始·····	(42)
第二节	德谟克利特对于数学理论美学标准的研究·····	(43)
第三节	柏拉图对于数学理论美学标准的研究·····	(47)
第四节	亚里斯多德对于数学理论美学标准的研究·····	(48)
第五节	欧几里得对于数学理论美学标准的研究·····	(51)
第六节	神赐的比例——黄金分割·····	(58)
一、	黄金数的定义及其美学价值·····	(58)
二、	黄金数的推广及其实际应用·····	(61)
第三章	中国古代数学的美学特征以及当时著名美学	
	家兼数学家对于数学发展的贡献·····	(67)
第一节	中国古代数学基本上属于应用数学体系·····	(68)
第二节	中国古代数学的演算程序简捷而巧妙·····	(70)
第三节	中国古代数学的推理具有鲜明的逻辑严谨性·····	(73)
第四节	易图的数学结构·····	(76)
一、	对于易图的二进制解释·····	(77)
二、	对于易图的组合论解释·····	(80)
三、	对于易图的代数学解释·····	(80)
四、	对于易图的几何学解释·····	(80)
五、	对于易图的矩阵论解释·····	(81)
第五节	数学家亦称“洛书”是一个三阶幻方·····	(82)
一、	构造幻方的罗伯法·····	(85)
二、	构造幻方的行列交会法·····	(86)
第六节	《易传》的简单美·····	(87)

第七节	墨翟的美学观点与墨氏几何学·····	(89)
第八节	庄周的美学思想与他在数学上的无限观·····	(90)
第四章	文艺复兴以后一些著名数学家兼美学家对于 数学理论美学标准的研究 ·····	(92)
第一节	达·芬奇与帕乔里对于数学理论美学标准 的研究·····	(93)
第二节	笛卡尔对于数学理论美学标准的研究·····	(95)
一、	笛卡尔创立解析几何理论是为了寻觅两个对 象间恰到好处的协调·····	(95)
二、	笛卡尔认为数学家的任务是努力以美的形式 去描绘宇宙的发展规律·····	(98)
三、	笛卡尔开创了科学研究艺术上的全新时代·····	(100)
第三节	莱布尼兹对数学理论美学标准的研究·····	(101)
一、	莱布尼兹提出了关于数学真理的“清晰明白” 的美学标准·····	(102)
二、	莱布尼兹和牛顿异地同时发现了微积分正是 和谐美的体现,并且也反映出这种发现与其 各自美学标准的深刻联系·····	(103)
三、	莱布尼兹认为数学家选择数学符号是为了最 大限度地减少人们的思维劳动·····	(106)
四、	数学符号是别具一格的“世界语”·····	(107)
第五章	数学家关于纯粹数学美与应用数学美之争辩 ·····	(111)
第一节	数学家谈纯粹数学之美·····	(113)
一、	纯粹数学在发展过程中总是和谐相关的·····	(115)
1.	从初中代数一个定理谈起·····	(115)
2.	欧拉的新发现·····	(116)
3.	拉格朗日对费尔马定理的证明·····	(116)
4.	刘维尔利用费尔马定理获得了新结果·····	(121)
二、	高等学校数学教育中的“老三高”和“新三	

高”是纯粹数学的支柱·····	(122)
1. “新三高”美在哪里?·····	(123)
2. “老三高”美在哪里?·····	(125)
3. 帕斯卡定理的推广·····	(130)
三、纯粹数学这棵大树的枝杈总是向着奇异的方向蔓延·····	(132)
1. 模糊数学亦然具有极大的精确性·····	(132)
2. 非标准分析是分析理论的新结构·····	(133)
3. 突变理论一时间风靡世界·····	(134)
四、离散数学的兴起是现代纯粹数学发展的另一特点·····	(135)
1. 中科院数学所所长王元谈纯粹数学·····	(135)
2. 四色猜想的计算机证明是否意味着纯粹数学 优美时代的结束·····	(136)
第二节 数学家谈应用数学之美·····	(137)
一、信息论、控制论及其在数学教育中的应用·····	(139)
二、图灵与图灵机·····	(140)
第三节 著名物理学家谈数学美·····	(140)
第六章 数学家的乐园——无限 ·····	(144)
第一节 康托把无限理论发展到令人眩晕的高度·····	(145)
第二节 嘲讽和攻击丝毫抹煞不了真理的光辉·····	(155)
第三节 无限终于“被关进了数学家的笼子”·····	(156)
第四节 潜无限论与实无限论之争辩·····	(157)
第七章 数学大厦的裂缝——悖论 ·····	(159)
第一节 悖论乃是不把自相矛盾的真相摆在桌面上·····	(160)
一、诉讼师悖论·····	(160)
二、上帝全能悖论·····	(160)
三、唐·吉珂德悖论·····	(161)
第二节 悖论的古典定义以及对若干古典悖论的分析·····	(161)

一、芝诺悖论	(162)
二、撒谎者悖论	(163)
三、伽利拉宜悖论	(163)
第三节 悖论的现代定义以及当前学术界流行的一些 与此相等价的悖论定义	(164)
第四节 悖论在数学基础研究中所产生的深远影响	(165)
一、罗素悖论	(165)
二、罗素——策墨略悖论	(166)
三、康托悖论	(167)
第五节 由悖论而引起的三次数学危机	(168)
一、希伯索斯悖论与数学发展史上的第一次危机	(168)
二、贝克莱悖论与数学发展史上的第二次危机	(169)
三、罗素悖论和数学发展史上的第三次危机	(171)
第六节 由悖论而导致的三大数学学派的激烈争辩以 及他们各派所坚持的美学标准	(172)
一、逻辑主义学派认为数学美表现为一首逻辑概念 的诗篇	(172)
二、直觉主义学派认为数学美在于构造性程序清楚	(174)
三、形式主义学派认为数学美在于形式上的简单与 相容	(175)
第七节 数学理论体系至今尚未实现最终的完美与和 谐	(177)
第八节 悖论破释在数学教育以及企业管理和社会生 活中的效应	(178)
一、悖论破释在数学教育中的效应	(178)
二、悖论破释在企业管理和社会生活中的效应	(181)
第八章 数学公理的美学标准	(183)
第一节 数学公理化方法的本质	(184)
第二节 建立数学理论系统的抽象思维方法	(186)

第三节	数学公理学的分类	(189)
一、	数以千计的数学家参与试证第五公设最后都以失败而告终	(189)
二、	巴许和皮阿诺的工作与希尔伯特的名著相比只差一步之遥	(190)
第四节	希尔伯特论数学公理的美学标准	(192)
一、	希尔伯特认为数学公理是关于基本概念的定义	(192)
二、	希尔伯特第一次所构造的几何空间是一个多孔空间	(194)
三、	欧氏几何与非欧几何在公理系统上仅仅是一字之差	(195)
四、	苏联数学家H·B·叶非莫夫所提出的关于公理系统的三个基本问题实际上就是数学公理的美学标准	(196)
第五节	希尔伯特设计公理系统的妙诀是极力追求数学的简单美	(199)
一、	什么叫做公理系统的独立性?	(199)
二、	数学家追求公理系统的简单美已具有悠久的历史	(199)
三、	我国中学几何的公理系统与希氏系统之比较	(200)
四、	要从整体上来欣赏希氏系统的简单美	(202)
五、	证明几个“不证自明”的命题	(203)
第六节	布尔巴基学派的结构主义是对数学公理化方法的进一步发展	(208)
一、	布尔巴基学派更加强调数学公理化的美学标准	(210)
二、	布尔巴基学派所面临的新困难正好体现出数学公理化方法的局限性	(211)
第七节	韦尔系统与索克评论	(212)

一、 韦尔思想与韦尔系统·····	(213)
二、 法国数学家索克对于中学几何公理的评论·····	(216)
第八节 数学公理化方法的应用价值·····	(216)
第九章 数学模型的美学标准 ·····	(218)
第一节 建立数学模型时要广泛应用数学抽象法·····	(219)
一、 理想化抽象可以使数学家获得足够精确的结果·····	(220)
二、 哥尼斯堡七桥问题是应用数学抽象法的典范·····	(220)
三、 数学模型在中学解题理论教学中的应用·····	(222)
第二节 数学模型的分类·····	(228)
一、 描述性数学模型的特征及其分类·····	(229)
二、 确定性数学模型的应用范围较广·····	(229)
第三节 描述性数学模型所体现的数学简单美·····	(231)
第四节 利用解释性数学模型来阐明数学公理系统 的和谐美·····	(233)
一、 庞卡莱模型·····	(233)
二、 球面模型·····	(236)
第五节 利用解释型数学模型来阐明数学公理系统 的简单美·····	(238)
一、 证明皮阿诺自然数公理系统的独立性·····	(239)
二、 皮阿诺自然数公理系统的简化形式以及与其相 等价的新系统·····	(242)
三、 证明希尔伯特欧氏几何公理系统的独立性·····	(243)
第六节 利用解释性数学模型来证明公理系统的完 备性·····	(244)
一、 现代数学的特征之一是从研究完备的公理系 统所确定的对象转向研究其公理系统不完备 的对象·····	(245)
二、 证 ¹ 韦尔欧氏几何公理系统的完备性·····	(245)
三、 证明黎氏几何公理系统的完备性·····	(246)

第十章 数学教学的审美观	(248)
第一节 在数学教育的全过程中都要重视审美教育.....	(249)
第二节 充分利用与发挥数学教学表达形式的形式美.....	(251)
第三节 深入挖掘数学教学内容所固有的美.....	(253)
一、对于数学教育内容的表达要侧重于数学思维	
方法的分析与诱导.....	(254)
二、美国控制论专家维纳提出学校教育要灌输新	
颖美好的东西.....	(255)
三、欧几里德提出在几何学中是没有王者所走的	
康庄大道的.....	(255)
四、在数学教育中要重视对称变换在解题中的应用.....	(257)
五、在数学教育中要注意对数学题巧施变形.....	(260)
六、在数学教育中要注意优化解题步骤.....	(262)
七、在数学教育中要注意奇异常数在解题中的妙用.....	(266)
第十一章 数学研究的审美观	(271)
第一节 数学发明即是选择与识别.....	(273)
一、选择的主要标准就是对于美的渴望.....	(274)
二、选择的标准之一是追求简单性.....	(276)
三、选择的另一标准就是寻求差异性.....	(278)
第二节 数学研究中的直觉思维与无意识活动.....	(279)
一、法国数学家庞卡莱论直觉思维.....	(280)
二、法国数学家笛卡尔论直觉思维.....	(281)
三、数学直觉的审美观.....	(281)
四、法国数学家庞卡莱论无意识活动.....	(284)
五、梦境也是一种无意识活动.....	(284)
六、如何发掘与利用无意识活动.....	(285)
附录	(289)
I 参考文献.....	(289)
II 注释.....	(291)

III	美国数学家孙述寰教授为本书作序原文·····	(316)
IV	英国数学家大卫·威尔斯教授为本书作序原文···	(317)
V	希腊字母表·····	(320)
VI	质数表·····	(320)
VII	外国数学家人名索引·····	(321)

序(一)

英国数学教育家大卫·威尔斯教授

自古希腊以来，美作为数学的重要组成部分已得到公认。然而直到今天，亦然有些数学哲学家对数学美不表示多大关注。他们似乎完全忽视了它的存在，甚至在未曾研究过数学美的情况下，就“合理地”推出结论：数学美与他们的哲学无关，这就好像是认为数学美根本不存在一样。

客观地说，自然哲学家的做法也与此雷同。尽管是许多科学家、尤其是许多著名物理学家，他们在研究量子相对论和宇宙尖端科学时，无不是在理论上运用了数学知识，在工作上运用了审美标准。某些举世闻名的自然哲学家在论著中好像只是把科学理论中的美作为一种点缀，而并没有赋予它以特别重要的意义。

事实并非如此，对于美的欣赏不仅是数学和自然科学活动的重要方面，而且它也是富有魅力的。最近，我兴奋地公布了一份调查报告，这是专业数学家对于24个数学问题的评价。*

果然不出所料，对于这个评价，有许多赞同者，也有许多人持强烈反对意见。例如，一个由印度大数学家罗曼尼简(Ramanujan)所提出的定理，在他刚刚去世不久，该定理被誉为“至上美”，但当今的数学家，则对此评价不高。由此可见，人们审美观念的变化是何等迅速啊！数学家个人的审美观也具有一定的独特性，往往是各人爱其所爱！

可喜的是，吴教授不仅具有丰富的鉴赏力，而且他对于数学家们在研究工作中的审美观点也有较全面的了解。我有幸能把他

所写的这本书介绍给对于数学美知之甚少的广大读者，使他们认识到美确实是推动数学发展并取得巨大成就的动力之一。

现在再谈一点我的个人希望，我曾经任教于初级和中级学校，深知学生很容易对数学产生厌烦情绪。这不仅是因为数学教学的墨守成规和枯燥乏味，而且大都是由于在教学中忽视了数学美能够以其特有的奇异和神秘而产生巨大的力量。

我衷心希望广大数学教师都来研究吴教授的著作，并且都能在教学中恰如其份地强调数学的审美情趣，通过这种方法将会使更多的学生喜爱数学，并且循此继续前进，以企在学业上取得更大的成就！



David Wells

大卫·威尔斯 1990. 10. 19

* 大卫·威尔斯：〈这些都是最美的吗？〉《数学情报》第12卷第3期1990。

序(二)

美国数学家孙述寰教授

数学家们总是追求数学的真善美，正如哈尔曼·韦尔所说：“我为真和美而工作，当二者发生冲突时，我宁愿舍真而求美。”很显然，数学家们对于数学美的关注没有一千年，也有几百年了，然而，对于数学的审美问题，人们总是不能取得一致意见。不过，数学美总会一直保留下来的，因为，它就像文学和艺术作品一样，每一个数学家都有同等的权利去欣赏数学中的美。

尽管在数学审美观念方面人们很难形成一致的意见，但有一点是很重要的：我们应该尽早向学生说明，数学与审美是密切相关的，学习数学不应该仅仅只是收集一些枯燥无味的公式和解题诀窍。吴教授关于数学美学的著作，对于数学教育文献，显然是一个重要补充。现代教育理论特别强调科学的趣味性。向学生指出数学中的美，并引导他们去欣赏这些美，将会有助于扩大数学的影响，这样一来，数学将会变成一门更加受人重视的研究领域。

希望由于这本书的出版，将会引起更多的数学家从事于数学美的研究，由此可以发掘出更多的数学美，并使其日臻完善。最后一点，当然也是特殊重要的，希望每一个数学爱好者都能够把自己所研究的审美观点毫无保留地推荐给你们的同行们！

Hugo S. H. Sun

孙述寰

90.8.18

作者自序

毛主席的哲学名著《实践论》，当时为了着重揭露着轻实践的教条主义观点，曾强调指出：“判定认识或理论之是否真理，不是依主观上觉得如何而定，而是依客观上社会实践的结果如何而定。”*但该书的另一写作动机，乃是极力反对轻视理论的经验主义观点，因而书中又提出：“要完全地反映整个的事物，反映事物的本质，反映事物的内部规律性，就必须经过思考作用，将丰富的感觉材料加以去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里的改造制作工夫，造成概念和理论的系统，就必须从感性认识跃进到理性认识。”**这里所说的造成概念和理论系统的抽象思维方法，可以概括为“去”、“取”、“由”、“及”四个字，“去”、“取”是讲如何进行选择？如何进行抽象？“由”、“及”是讲如何进行推理？如何进行计算？这就是科学哲学方法论。

在变量数学时期刚刚发展起来的微积分，当时在推理过程中存在着逻辑矛盾，曾遭到一些数学家的反对。但是大多数学者则认为这种理论能够解决自然科学的实际问题，应积极地构造这种理论的逻辑基础，使之日臻完善，这就是所谓的分析数学的严格化。除此而外，当时盛行的还有代数的抽象化和几何的非欧化，其实质这些都是公理化方法的推广、发展与繁衍的结果，使得整个纯粹数学领域呈现出一派欣欣向荣的景象。这时，数学是演绎科学的观点在数学界已取得支配地位，大多数数学家都承认逻辑的

* 毛泽东：《实践论》1952年人民出版社出版第3页。

** 毛泽东：《实践论》1967年《毛泽东选集》横排袖珍本人民出版社出版第268页。

严密性也是检验数学理论真理性的标准。例如，在苏联出版的《数学——它的内容、方法和意义》一书中，就曾经这样写道：“如果自然科学家为了证明自己的论断，总是求助于实验，那末，数学家证明定理只需要推理和计算。……我们可以极精确地测量成千上万个等腰三角形的底角，但这并不能给我们以关于等腰三角形两底角相等的定理的数学证明。数学要求从几何的基本概念推导出这个结果（现在在几何的严格叙述中基本概念的性质是精确地表述在公理中）。”这里所说的推理和计算，用哲学术语来描述，即可概括为“由此及彼、由表及里”。由此可见，“由”、“及”这两个字的含义，也可以做为检验数学理论真理性标准的一个层次。

英国数学家兼哲学家A·N·怀特海（Whitehead）在美国哈佛大学曾经作过一次著名讲演，这次讲演的题目为《数学与善》，这一篇文章乃是关于数学这一学科一般性质的哲学分析。我国著名数学教授徐利治和郑毓信在评论怀特海的这篇文章时，提出了关于“数学真理及真理性程度”的论点。这个论点认为：

“数学真理的层次结构应该是这样的，

第一层次——逻辑合理性，

第二层次——模式真理性，

第三层次——现实真理性。”

《实践论》中所提出的“由此及彼，由表及里”，是讲推理和计算，相当于这里所说的“第一层次——逻辑合理性”；《实践论》中所提出的“去粗取精，去伪取真”，是讲选择和抽象，相当于这里所说的“第二层次——模式真理性”；《实践论》中所提出的“实践是检验真理的标准”**，相当于这里所说的“第三层次——现实真理性”。因此，我们认为徐利治、郑毓信两位教授所提出的数学真理层次结构论，与《实践论》中所阐述的关于数学真理检验的标准问题，其基本思想是吻合的。

* 中国自然辩证法研究会主办《自然辩证法研究》1988年1月第24页。

** 《毛泽东选集》1967年横排袖珍本人民出版社出版第269页。