数学历史篇

第一章至第三章

第一章　数概念的发展与数性的因袭
—— 从自然数到八元数

数，人类文明的伟大创造。人类在漫长而艰难的争取生存、进行生产生活的具体实践中，终于超越了原始的史前的动物数觉阶段，而创造了数，拥有了代表人类文明的计数技能。人类对数的认识，经历了一个由表及里、由浅入深的过程。今天，我们所拥有的数系，已经构造得如此完备和缜密，以至于在科学技术和社会活动的一切领域中，它都已成为一种基本的语言和必不可少的工具。远古的计数技能也已经演变到当今的数字化技术。我们今天在得心应手地享用这份经过长期历史沿革的现成财富时，往往未曾想到前人在形成和发展数的道路上所历经的曲折和艰辛。本章的任务就是要对这一伟大的历程作一简要的描述。

一、数觉：人类数学的起源

“人类在进化的蒙昧时期，就已经具有一种才能，这种才能，因为没有更恰当的名字，我姑且叫它为数觉。”美国数学家丹齐克（T. Dantzig）在《数，科学的语言》一开头就说出的这句话，道出了数学起源的真谛。数之道，起始于数觉。

1. 从数觉到基数

数觉与计数完全不是一回事。计数是人们很晚以后才有的一种能力，是人类特有的智力活动。数觉则不是人类特有的，一些动物就具有很好的数觉。如某些鸟类就具有数觉——鸟还是动物中数觉较差的一类。有人做过实验，鸟巢里若有 4 个鸟蛋，那么你可以安然地拿走一个；但是你若拿走两个或三个，这鸟就要逃走了。鸟具有区分二三的一种数觉能力。人类的数觉就是这样一种源于动物的简单数觉。动物数觉是人类计数的史前史。据丹齐克认为，人的数觉很少能超过 4，大体与动物数觉相当。如果人类停留在数觉这个水平上，那么在计算方面，就不会比鸟类有多少进步。可喜的是，人类终究学会了一种技巧，这技巧就是计数，并且正是因为有了计数，才使得人类未来的生活发生了空前巨大的变化，使我们赢得了用数表达我们的宇宙的惊人成就。如今的信息数字化技术与观念，是否可以追溯到远古时期的原始计数技巧呢？

具体的东西总在抽象的东西之前。这是没有疑问的，但是，抽象的东西是怎样产生于具体的东西，却是有着不同的看法。关于自然数产生的最原始的根源，人们普遍接受的是一种“抽象说”和“发现说”。认为自然数是产生于发现了 5 条鱼的 5 与 5 头牛的 5

（以及 5 棵树的 5 等等）是同一个 5；或者说是从这些具体的 5 中抽象出了数学的 5。然而数学的 5 是如何从具体的 5 中抽象出的或发现的，却没有一个令人满意的回答。我们认为，这种抽象说或发现说纯粹是近现代人强加于远古人的。远古人的思维水平和认知能力是远远没有达到具有“数学抽象”和“数学发现”这个层次的。他们不可能直接从 5 条鱼、5 头牛、5 棵树中抽象出一个数学 5 或发现一个数学 5。

从具体 5 （严格讲，是不能说“5”这个概念，而只能说“5 头牛”或“5 棵树”等概念）到抽象 5 的认识，有一个漫长而艰难的认知历程。根据有关资料，我们推测性地认为，整个过程至少包括五个阶段。第一阶段是史前阶段，这时人们还没有明确的数字概念，有的只是“多少”这个十分模糊的概念。“多少”只是用“一群，“一堆”“一帮”这样的概念来表示。这是一种具体的直观的（主要是视觉直观）概念。这有来自原始语言研究方面的证据。

第二个阶段是具体数觉阶段。这时人们开始从“多少”过渡到对四五个具体事物能够分清的阶段，但这时还没有任何计数法。处于数觉的高级阶段。

第三个阶段是具体计数阶段。这时人们大体认识到一二十（或更多一些）个具体事物的多少，并有了最初的记数法。如石子记数、结绳记数、刻骨记数等。但这时的记数并不是我们现在意义上的记数。而只是这 5 个大石头记这 5 头牛，那 5 个小石头记那 5 条鱼。尚不懂得这 5 个大石子既可以代表 5 头牛，也可以代表 5 条鱼。特定的一组记数，记特定的一组事物。

第四阶段是一般记数阶段。由于社会的发展，需要记数的具体事物越来越多，越来越复杂。不仅具体的事物需要记数，而且看不见的“抽象的”时间、活动等也要记数，人们不仅用 5 个石子代表 5 头牛、5 棵树等具体实物，而且开始用它代表 5 天、5 次狩猎。当这种经验十分丰富之后，人们便开始懂得并用同一堆（如 5 个）石

子分别代表不同的 5 个实物。同时还会认识到，5 头牛不仅可以用 5个石子记数，而且可以用 5 条痕迹记数（刻骨）。这里需要特别表明的是，这时人们认识到同一堆（如 5个）石子既可以记数 5 头牛，也可以记数 5 条鱼，甚至还可以记数 5 天等等，并不是因为人们事先发现这堆石子具有一般地记数各种事物的功能，然后才去这样运用这堆石子记数，而是在于以往不断使用石子记数的过程中给这堆石子不断地赋予各种各样的意义（5 头牛、5 条鱼、5 天等等），也就是说，作为用来一般记数的 5 个石子，它的一般性——既可以记数这种事物，也可以记数那种实物——不是被抽象出来的和发现的，而是被远古人的生活、生产实践所不断赋予的，是无意识地强加上去的。即一般性不是抽象出来的，而是被赋予的。认识到 5 个石子具有一般地记数的功能，便离抽象计数——自然数的产生不远了。

第五个阶段是抽象记数阶段。这主要是从实物记数（石子、绳结、刻迹）向文字（符号）记数的过渡，这个过渡的完成标志着抽象记数的开始，也即自然数的产生。这时人们认识到 5 这个文字符号（当然，不同民族有不同的记号）可以记数一切“ 5 个 ”个体的事物。至此，记数达到了它成熟的阶段。

2. 序数的产生与计数方法的成熟

以上所叙述的数还只是一种叫做基数的数，基数所根据的是一一对应原则，根本上讲，它还不包含计数，记数与计数并不是一回事，即使认识到 5个石子（刻迹、符号）可以记数任何 5 个事物，要是它们总是乱七八糟的排列着，还是不能够创造出一种计数术。人们必须发明一种数制，就是说，我们那些记数的标准集合（如 5 个石头）必须排成有前后次序的序列，即从小到大的序列，也就是传统的自然序列：1，2，3，…数制一旦有了，计数某一类事物，就等于将该类中每个成员分别和有顺序的次序的自然序列中的一项

相对应，一直到全部事物对应完了为止。对应于该类中最后一个成员的自然序列的项，就称为该类事物的序数。

只要按照有顺序的次第记住前几个数字，再制定一个语言系统，使得能从任何一个较大的数读出它的后一个数（后继数），那么序数制就出来了。人们就是这样很自然地从基数转到了序数，因此，两者好像是一件东西。现在如果要决定某一集合的事物的多少（即它的基数），我们不用再找一个标准集合麻烦地来做一一对应了，我们只要将它加以计算就行了。数系的发展实在应当归功于人类知道了数的这两方面的统一。在实用上，虽然基数很有用，但它不能创造出算术来，算术的运用就是依据我们总是可以由一个数数到它的后继数这一默认的假定出发的，而这个假定就是序数概念的本质。对应与序列，这两大原理已经深深渗透进全部数学之中，交错地编织在我们的数系的锦绣天衣之上。

不能忘却的是，在人类获得计数技能的过程中，屈指计数起到过决定性的作用。人们大都认为，人类在计算方面之所以成功，应当归功于十指分明。就是这十个手指，才使人类学会计数，从而把数的范围无限地扩大开来。广泛流传下来的十进制计数就是最深刻的证明。正如丹齐克所言：“人类采用十进制乃是一种生理上的凑巧。”在数字语言中，人的十个手指留下了不可磨灭的印迹。“人是万物的尺度”，十进制作为这一哲学名言的活的见证将永存下去。早期还有一些五进制、二十进制等数进制，这些被认为是根源于一些民族习惯于用一只手计数，或手指脚趾并用计数。不过这些只是些未占主导地位的数进制。十进制在生理上的便利是无与伦比的。

有了计数法，如果没有有效的书写或表示方式，那么计算依然是十分困难的事。古代有代表性的希腊序数制和罗马基数制都是一些十分落后的记数制。希腊古代用 24 个希腊字母加上 3 个外来字母来表示数字，计算十分繁琐、困难。古罗马使用罗马数字符号进行计算，也是很不方便，十分繁杂。与此同时，中国则采用的是一

种十分先进的位置制，形式如下：

纵式(用于个位、百位、万位等)：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

横式（用于十位、千位、十万位等）：

𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

例如 4716 表示为 𝍬𝍦𝍩𝍥，405 表示为 𝍣 𝍤。在 8 世纪以后，“零”用空位表示。

位置制的实质在于，一个数字的值不但依赖于它所表示的自然序列中的那个元素，同时也依赖于它在数组中相对其他符号所处的位置。同一个 2，在 342、725、269 三个数中的意义是各不相同的。另外，在 0 的表示方法发明之前，计算依然还是很难进行的，十分困难的。因为总会遇到这样的障碍：“𝍫 𝍡”这样一个记号可以代表下列任何一个数字：32、302、320、3002 等等。要避免这种含糊之处，必须找出某种办法，以便正确地表示出 0 的意义。没有 0 的正确表示，任何进步都是难以取得的。中国在八世纪用空位表示 0 的方法的发现，无疑是人类文化史上一项最伟大的发现之一。遗憾的是，西方各国对古代中国在十进位置制和零的表示法方面的贡献几乎没有注意，他们大都认为这些成就最早是由印度人发现的。我们发现，有大量的史料表明，十进位置制的采用中国要比印度早数个世纪，零的表示法可能是在中国、印度各自独立几乎同时发现的。欧洲几乎到了 13 至 15 世纪才掌握了科学的十进位置制。

十进位置制在数学发展史上的伟大作用，得到了后来者的普遍称誉。18 世纪著名数学家拉普拉斯（Laplace）曾经说过这么一段话：“用十个记号来表示一切的数，每个记号不但有绝对的值，而且有位置的值，这种巧妙的方法出自印度。这是一个深远而又重要的思想，它今天看来如此简单，以致我们忽视了它的真正伟绩。但

恰恰是它的简单性以及对一切计算都提供了极大的方便，才使我们的算术在一切有用的发明中列在首位；而当我们想到它竟逃过了古代最伟大的两位人物阿基米得（Archimedes）和阿波罗尼（Apollonius）的天才思想的关注时，我们更感到这成就的伟大了。”马克思（K . Marx）也曾称赞：十进位置制记数法是人类“最美妙的发明之

十进位置制的发现是在数系发展过程中的第一块里程碑，是人类走向文明的推动器。从此，人类拥有了区别于动物数觉的计数技能，并因此而创造了灿烂的人类文化。

二、从自然数到复数

数之道起始于数觉，数觉是一个起点，而这条道路的开通则是由于自然数的产生。自然数作为数之道的第一道，无疑有着极其重大的意义。如今按现代数理逻辑的观点，所有的数学命题最终必须转化为有关自然数的命题，几乎已成为一个指导原则。“上帝创造了自然数，其余一切都是由人创造的。”克罗内克（L．kronecker）的这句名言道出了数学大厦赖以建立的可靠基础就是自然数。

1．对自然数与有理数的认识

自然数的数学理论称为算术。按现代的观点讲，自然数的算术理论是以自然数的加法和乘法的有关规律为逻辑基础的。一是交换律：$a+b=b+a$，$ab=ba$ ；二是结合律，$a+(b+c)=(a+b)+c$，$a(bc)=(ab)c$ ；三是分配律：$a(b+c)=ab+ac$．

在两个自然数加法的基础上，可以定义不等的关系：$a<b$，或 $b>a$．这是指数 b 可以通过加上适当选取的第三个数 c 而得到，即 $b=a+c$．这时可记作 $c=b-a$ ，于是定义了减法运算。对于自然数，$b-a$ 只有当 $b>a$ 时才有意义。当 $b<a$ 时，$b-a$ 便成为负整数。人们引入新记号 -1，-2，-3，…，表示负整数。当 $b=a$ 时，引入记号 0，并约定 $a-a=0$．自然数第一次进行了扩张，得到了关于整数的概念及算术理论。注意，这时原有的运算规律保持不变。但在处理负整数乘法运算时，又引入了一条新的乘法规律：$(-1)\times(-1)=1$。应该指出，数学家是在花了很长时间后，才认识到这条规则是不能证明的，即无法从前面三条算术运算的基本规律中推出，它是人们为了保持算术基本规律而创造的。

据现有资料表明，分数最先出现于公元前 17 世纪的古埃及。中国《九章算术》中也有分数运算的内容。分数的使用导源于除法运算的需要。正如负整数和零的引入，为没有限制的减法开拓了道路，同样，分数的引入，为除法扫清了类似的算术障碍。两个整数 a 和 b 的商 $x=b/a$ ，由方程 $ax=b$ 定义，仅当 a 是 b 的因子时，才存在整数解 x ，否则，便需要引入新的记号 b/a ，称为分数。分数的引入，使得整个有理数——整数和分数——组成的数系得以构成。在此扩张中，不仅原有的结合律、交换律和分配律依然成立，而且在有理数范围内，四则运算可以无条件的进行，且其运算结果始终不越出这个范围。数的这种封闭性的范围在代数学中称为域。

新的数引入，扩充了原有数系的范围，但却能使在原有范围内用的规律在扩大后的范围内依然成立，这便是数学中扩充原理的重要特征。应该指出的是，尽管有理数的运算在理论上和实践上完全满足自然数运算的规律，但今天的人们很难相信，迟至 17 世纪，有理数并没有被普遍承认，没有获得与自然数同样的合法地位，许多人在运用了有理数以后，还怀着若干疑虑和惊异的态度。这正如数学家柯朗（R. Courant）所言：“人类先天倾向于抱住‘具体’不放，例如对待自然数那样，这说明为什么迈出不可避免的一步是如此缓慢。事实证明只有在抽象的范畴内才能创造出合理的算术系统。”

2. 无理数与复数的发现

大约在公元前 530 年左右，著名的毕达哥拉斯（Pythagoras）学派在研究两条线段之比时发现，等腰直角三角形斜边与一直角边之比、正方形对角线与其一边之比不能用整数之比来表示（即不可通约）。这一发现使他们震惊万分与不安。因为毕达哥拉斯学派的信条是：宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。这一标志着无理数诞生的重大发现，在数学史上被称之为数学的第一次危

机。有人说，不可通约性是希帕索斯（Hippasus）发现的，为此他的同伴把他抛进了大海。但更多的人认为，毕达哥拉斯早已知道了这个事实，希帕索斯是因泄密而被处死。可见，这个发现对古希腊的数学观有着多么大的冲击。这一事实表明，几何量不能完全由整数及整数之比来表示，反之数却可以由几何量表示出来。自然数的尊崇地位受到挑战，于是几何学开始在希腊数学中占据特殊地位。同时这也反映出直觉和经验不一定靠得住，推理证明才是可靠的。从此，希腊人开始由“自明的”公理出发，经过演绎推理，并由此建立了欧几里得几何学体系。这也是第一次数学危机的自然产物。

尽管古希腊数学为了回避无理数而带来的困难走上了几何学研究的道路，但无理数的存在却是不可回避的事实，尤其是为了求解二次方程等代数运算的需要，更是不可回避无理数。这时人们意识到有理数系需要作进一步的扩充。从有理数扩充到实数，经历了较长的时间。虽然在 15 世纪前后，数学家已较多地使用无理数了，但对于无理数是否确实是数仍深有疑虑。有些人就认为无理数仅仅是一种记号。严格的无理数的定义，是到 19 世纪以后，才由数学家戴德金（R. Dedekind)、康托(G. Cantor)、外尔斯特拉斯（K. Weievstrass）分别给出，那时实数理论才算真正地建立起来。扩充后的实数系依然符合先前的各种运算规律。

在世人还没有完全克服无理数和负数带来的困惑时，人们又晕头晕脑地陷入了如今称之为复数的问题。首先需要运用复数的地方是解二次方程。一个简单的方程，如 $X^2=-1$，就没有实数解。为了保证二次方程理论的完备，必须扩充实数域。否则就只能满足于此简单方程不可解的说法。事实上，人们选择了扩充数的概念的通常途径，引入新数使此方程有解。这就是定义 $i^2=-1$，即引入新符号 i。虚数 i 添入实数系就得到了复数系。在对形如 $a+bi$ 的复数定义了加、减、乘、除之后，人们发现，复数运算也符合交换律、结合律和分配律。尽管如此，人们在心理上还是颇为疑虑。要

知道，虚数的引进与数系的前几次扩张在性质上是有所不同的，它首先不是出于代数的需要（i 纯粹是一个受基本法则 $i^2=-1$ 支配的符号），而是为了解决数学本身所提出的问题。由于这种数不能直接参与计数或直接解释为测量的结果，因此被人们称为“虚数”，意即“虚幻的数”,而非“现实的数”。甚至有些数学家拒绝使用虚数。直到 18 世纪后半叶，基于数学家高斯（C. F. Gauss）等人找到了复数的几何表示，并在实际问题中得到广泛的应用之后，复数才被人们真正接受。如今复数已成为完整地理解数系必不可少的一个概念，成为解决繁难问题的有力手段，成为对相离甚远的一些数学分支寻找其密切联系的一个关键点，尽管它的开端只是一个近乎幻想的符号。这正是：假想是一种寻求解释的形式。

3. 对代数数与超越数的认识

在 17 世纪末，我们所熟悉的数系的所有成员——整数、分数、无理数、负数和复数，都已被人们发现。18 世纪在弄清楚无理数概念方面没有什么成就，但是对一些具体的无理数还是做出了某些进展，尤其是在这个过程中又认识了代数数和超越数。1737 年欧拉基本上证明了 e 和 e^2 是无理数，兰伯特（Lambert）证明了 π 是无理数。勒让德（Legendre）猜测说 π 可能不是有理数方程的根，他的猜测导致了无理数的分类。任何有理系数代数（多项式）方程的任何一个根（不管是实的还是复的）叫做一个代数数。即方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根叫做代数数，其中 a_i 是有理数。所有的有理数和一部分无理数是代数数；一切用根式表示的数（多项式的根）都是代数数；但是因为代数方程的根并不都能用根式来表示，所以代数数还包含许多不能用根式表示的数，即并不是所有的代数无理数都可以通过对有理数进行代数运算而得到。

不是代数数的数叫做超越数。因为“它们超越了代数方法的能

力 ”（欧 拉 语）。不 过，18 世纪还不知道有哪一个数是超越数。直到 1844 年前，是否存在超越数的问题还没有解决，在这一年，法国数学家刘维尔（Liouville）证明了下述形式的任何一个数都是超越数：

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots$$

其中 a_i 是从 0 到 9 的任意整数。之后，1873 年法国数学家厄尔米特（Hermite）证明了 e 为超越数。1882 年德国数学家林德曼（Lindemann）证明了 π 是超越数。在此之前，1874 年德国数学家康托发表了题为《关于所有实代数数所成集合的一个性质》的论文，证明了所有代数数组成一个可数集。同时又证明了全体实数是一个不可能与可数集对等的无限集。由此便立即推导出在实数中一定存在着超越数。因为数轴上的任何可数集合的测度都为 0，因此全体实代数数在数轴上是太微不足道了。它只不过是一个不占任何长度的零测度集，从而说明了几乎所有的实数都是超越数。1895 年人们进一步认识到，下列诸数均为超越数：

（1）e，π；

（2）e^{α}，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\mathrm{tg}\alpha$，$\mathrm{sh}\alpha$，$\mathrm{ch}\alpha$，$\mathrm{th}\alpha$，…其中 α 为非零代数数；

（3）$\ln\alpha$，$\arcsin\alpha$，…等。“2”中所列函数的反函数，其中 α 为不等于 0 和 1 的代数数。

到 20 世纪 30 年代，人们又认识到，若 α、β 为代数数，$\alpha\neq0,1$；β 不为实有理数，则 α^{β} 为一超越数。人类对超越数的认识有了进步，但总的来说，还是比较贫乏的。如对于熟知的欧拉（Euler）常数 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}1/k-\ln n\right)$，不仅至今尚无法证明其是否为超越数，连它是无理数还是有理数也不清楚。在代数数和超越数理论中，还有许多问题有待于人们去探索。

三、复数之后还能走多远？

至此，我们已历经了从自然数到有理数、实数和复数的扩充过程。这一系列的数系扩充在本质上讲都是代数扩充。所谓代数扩充，就是在数域中引进某个多项式方程（其系数均为此数域中的数）的根（这个根不属于此数系）而扩张成一个新数域。也许可能有人会问，对复数 21 可以进行代数扩充吗？高斯的“代数基本定理”回答了这个问题。代数基本定理告诉我们：

复数域上的每个 n 次代数方程

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

在复数域中至少有一个根。

由此，很容易知道，每个 n 次代数方程在复数域中有 n 个根，且只有 n 个根（包含重根）。这就是说，复数域中代数方程根还是复数。既然根本身就是复数，因此不能通过“引进”它而使数系扩充。由此可以看到，复数域不能再沿着代数扩充这条道进行扩充了。数系的发展和扩充，在代数扩充的意义下至复数域即告结束。数之道走到了尽头吗？

1. 哈密顿四元数的创立

原有的扩张途径刚刚宣告结束，新的扩张途径便应运而生。数之道并未走到尽头！由于力学和几何理论发展的需要，人类再一次扩充了数系。1843 年由哈密顿（S. W. Hamilton）首创的四元数便是这次复数域得以扩充的实例。在高斯提供了复数的表示之后，数学家们并认识到复数能用来表示平面上的向量和研究向量。可以说，复数对于平面向量所做的事情，就是提供了表示向量及其运算

的一个代数。人们不一定要几何地做出这些运算，而是能够代数地研究它们。就像曲线的方程能用来表示曲线和研究曲线。然而复数的利用是受限制的。如在力学中，设有几个力作用于一物体，这些力不一定在一个平面上。代数上为了处理这些力需要复数的一个三维类似物，以便能用点的通常的笛卡儿坐标（x，y，z）来代表从原点到该点的向量。但现实不存在这种用来表示向量运算的三元数组的运算。这种运算应该和复数的情况一样，表面上要包括四则运算，并且服从通常的运算规律，使代数的运算能自由而有效地运用。为此，数学家们开始寻找所谓的三维复数以及它的代数。哈密顿为此付出了巨大的努力，前后持续了大约 15 年之久。

当时数学家们所知道的全部数都具有乘法交换性，因而对于哈密顿来说也自然地相信他要寻找的三维或三分量的数应同样具有交换性，同时具有实数和复数的其他性质。然而经过一些年的钻研之后，哈密顿发现自己不得不作两个让步：其一是他的新数必须包含四个分量，而不是开始设想的三个分离；其二是他必须放弃乘法交换律，即新的数不具有交换性。这两个特点对代数学都是革命性的。他称这个新的数为四元数。哈密顿后来回顾四元数的发现时作了这样一番描述："1843 年 10 月 16 日，当我和妻子步行去都柏林途中来到勃洛翰桥的时候，它们就来到了人世间，或者说出生了，发育成熟了。这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 I、J、K 之间的基本方程式；恰恰就是我此后使用它们的那个样子。我当场抽出笔记本，它还在，就将这些做了记录，同一时刻，我感到也许值得花上未来的至少 10 年，也许 15 年的劳动。但当时已完全可以说，这是因我感觉到一个问题就在那一刻已经解决了，该缓口气了，它已经纠缠我至少 15 年了。" 1843 年哈密顿在爱尔兰皇家科学院会议上宣告了四元数的发明。由此，复数之后的第一个新数—— 四元数代数 H 诞生了。

哈密顿四元数代数的基础数域是实数域 R，H 作为 R 上的线

空间是四维的，以元 1、i、j、k 为一组基，任意一个四元数可唯一地表示为

$$\alpha=\alpha_1 1+\alpha_2 i+\alpha_3 j+\alpha_4 k\ ,\quad \alpha_i\in R\ .$$

基元的乘法定义为

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	i	-1

不难看出，四元数之间的乘法符合结合律，因而 H 是结合代数，但 H 不满足交换律，如 $ij\neq ji$，所以 H 是非交换代数。H 还是可除代数，H 可表示为：$H=\{\alpha=\alpha_1 1+\alpha_2 i+\alpha_3 j+\alpha_4 k,\ |\alpha_i\in R\}$. 当 $\alpha_3=\alpha_4=0$ 时，得到 H 的子集复数域 C。由于四元数的发现，许多重要的代数因而得以发展。而且它直接促进了量子力学等自然科学的发展，可以说，如果没有四元数的发现，就不会有现代量子物理学。现在许多人都知道所谓的“测不准原理”，而且写出了大量文章来讲述其哲学意义，但是似乎很少有人知道在数学上刻画测不准性质时用的正是表征某些物理量的算子（或算符）的“乘法之不可交换性”。

从纯粹代数的观点看，四元数是令人兴奋的，因为它提供了一个除了乘法的交换性而外具有实数和复数性质的代数的例子。从此，为了看到沿着这条路能创造出些什么样的数系，大量超复数系统被探索出来了。

2. 凯莱八元数的提出

凯莱（A . Cayley）提出了一个八元数系 O，一个任意的八元数 $\alpha=\alpha_0 1+\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\cdots+\alpha_7 e_7$. 其中 1，e_1，e_2，$\cdots$，e_7 为数