

内容提要

本书是与高等教育出版社出版的程其襄等编写的《实变函数与泛函分析基础》(2003年第二版)配套的学习指导书。按照教材体例,逐章对应编写。每章包括内容小结、学习要点、例题选讲、习题解答和补充习题五部分。书末给出补充习题的详细提示。

本书可作为师范院校数学系各专业学生、自学读者、函授学员以及其他高等院校有关读者学习实变函数与泛函分析的辅导书,也可以作为教师授课的参考书。

图书在版编目 (CIP) 数据

实变函数与泛函分析学习指导 魏国强,胡善文编.
—北京:高等教育出版社,2004.11
ISBN 7 - 04 - 015555 - 9

实... 魏... 胡... 实变函数 - 高
等学校 - 教学参考资料 泛函分析 - 高等学校 - 教学参
考资料 . O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 099867 号

出版行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http: www.hep.edu.cn
总机	010 - 58581000		http: www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
印 刷

开 本	850 × 1168 1/32	版 次	年 月第 1 版
印 张	6875	印 次	年 月第 次印刷
字 数	170 000	定 价	10.70 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。
版权所有 侵权必究

策划编辑 李蕊
责任编辑 姚晖
封面设计 于文燕
版式设计 王艳红
责任校对 王效珍
责任印制



第一章 | 集 合

集合的概念是 19 世纪 70 年代由康托尔首先导入的,而后集合的观点和方法立即迅速渗透到数学的各个分支,从而改变了数学的面貌,它对现代数学的发展起了巨大的推动作用.实变函数及泛函分析也是在集合论的观点和方法渗透入数学分析的基础上产生的.

本章介绍了一些集合理论,主要是为了本课程的需要,但也为读者学习其他近代数学理论作一些准备.

一、内容小结

1. 这一章复习了集合的概念、表示方法、集合的运算(并、交、差、补);引入了集合列的上极限与下极限和极限的运算;对集合运算规则作了仔细的讨论,特别是德摩根公式.

2. 引入了集合对等的概念,证明了判别两个集合对等的有力工具——伯恩斯坦定理.

3. 引入了集合基数的概念,深入地研究了可数基数和连续基数.

二、学习要点

1. 必须准确熟练地掌握集合的运算法则,特别要注意集合运算既有和代数运算在形式上有许多类似的公式,但也有许多本质

不同的公式.读者千万不要不加证明地把代数恒等式搬到集合运算中来.例如,在代数运算中有等式 $(a+b) - a = b$,但对集合 A 及 B ,等式 $(A \cup B) - A = B$ 却不一定成立,这个等式成立的充要条件为 A 与 B 不相交.

2. 可数集是所有无限集中基数最小的无限集,这一点必须引起注意.所以从一无限集中去掉一个可数子集后,若剩下的仍为无限集,则剩下无限集的基数与原无限集的基数相等.类似地,无限集并上一可数集后,其基数也不变.

3. 存在不可数无限集.事实上,没有最大的基数.

以下介绍学习本章时读者应掌握的论证方法.

4. 学习本书中的概念既要从肯定方面又要从否定方面加以考虑,这样不但能对概念加深理解,并能在此基础上总结出论证某些问题的基本思路与方法.例如,设 A, B 是两个集合,若已知对每个 A 中的元素 x ,必有 $x \in B$,则由集合的包含定义,有 $A \subseteq B$.但若已知任何不属于 B 的元素 x 必不属于 A ,同样也可得到 $A \subseteq B$.于是,要证 $A \subseteq B$,既可以证明对任何 $x \in A$,必有 $x \in B$;也可以证明对任何 $x \notin B$,必有 $x \notin A$ 得到.同样的例子还有很多,希望读者在学习基本概念时加以注意和总结.

5. 一系列集合的上限集、下限集及极限是用集合运算来解决分析中许多问题的基础,应该很好地掌握.对上限集与下限集有两种不同的描述方法.一种是用语言描述,例如,集列 $\{A_n\}$ 的上限集是由属于 $\{A_n\}$ 中无限多个集的那种元素的全体所组成的集; $\overline{\lim}_n A_n$

也可用集合运算描述: $\overline{\lim}_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.前者便于分析问题,后者便于用集合运算解决问题.类似地,对下限集也有两种不同的描述方法.读者应学会把一些分析问题转化为用上限集和下限集表述的能力,这在第四章中是特别重要的.

6. 对集合基数部分的学习,应注意论证集合对等的基本技能的训练.证明集合 A 与 B 对等的基本方法可分为三种:一是根据

对等的定义,直接构造两集合间的 1—1 对应;二是利用对等的传递性,即欲证 $A \sim C$,此时已知 $A \sim B$,于是只需证明 $B \sim C$ 即可;三是利用伯恩斯坦定理,即欲证 $A \sim B$,只要证 A 与 B 各与对方一子集对等即可.

7. 要学会证明一个集合是可数集.其方法一是将集合 A 中元素排成一个无穷序列;二是设法使 A 与一已知可数集,例如与有理数集或有理端点区间所成集等等对等;三是利用有限或可数个可数集的并仍为可数集等可数集运算性质;四是利用 § 4 中定理 6.

8. 证明一集合 A 的基数为 c 时常常用到区间、 \mathbf{R}^n 、 E 的基数为 c ,也常常设法把 A 与 p 进位无穷小数对等.

三、例题选讲

例 1 证明 $A \cap \left(\bigcup_I B \right) = \bigcup_I (A \cap B)$.

证法一 先证明左式 = 右式.设 $x \in A \cap \left(\bigcup_I B \right)$,则 $x \in A$ 或 $x \in \bigcup_I B$,若 $x \in A$,则对一切 I ,有 $x \in A \cap B$,所以 $x \in \bigcup_I (A \cap B)$;若 $x \in \bigcup_I B$,则由 $x \in \bigcup_I B$,可得对任何 I ,有 $x \in B$,所以 $x \in A \cap B$,因此 $x \in \bigcup_I (A \cap B)$,因而左式 = 右式.

再证右式 = 左式.设 $x \in \bigcup_I (A \cap B)$,则对任何 I ,都有 $x \in A \cap B$,因此 $x \in A$ 或 $x \in B$.若 $x \in A$,则 $x \in A \cap \left(\bigcup_I B \right)$;若 $x \in B$,则 $x \in B$ 对任何 I 成立,所以 $x \in \bigcup_I B \cap A = \bigcup_I (A \cap B)$,即右式 = 左式.

综上得结论成立.

证法二 先证左式 右式. 设 $x \in \bigcap_I (A \cap B)$, 则存在 $\alpha \in I$, 使 $x \in A \cap B_\alpha$, 由于 $A \cap (\bigcup_I B) = A \cap B_\alpha$, 故 $x \in A \cap (\bigcup_I B)$, 所以左式 右式.

再证右式 左式. 若 $x \in A \cap (\bigcup_I B)$, 则 $x \in A$ 且 $x \in B_\alpha$, 因此存在 $\alpha \in I$, 使 $x \in B_\alpha$. 所以 $x \in A \cap B_\alpha$, 因而 $x \in \bigcap_I (A \cap B)$, 所以右式 左式. 由此得结论成立.

证法三 显然, 对任何 I , 恒有 $A \cap (\bigcup_I B) \supseteq A \cap B$, 因此由交的定义, 有 $A \cap (\bigcup_I B) \supseteq \bigcap_I (A \cap B)$; 反之, 若存在 $x \in \bigcap_I (A \cap B)$, 但 $x \notin A \cap (\bigcup_I B)$, 则由证法二, 知 $x \in \bigcap_I (A \cap B)$. 这与假设矛盾.

证法四 由德摩根公式及 §1 的定理 1(3),

$$\begin{aligned} \bigcap_I (A \cap B) &= \bigcap_I (A \cap B) = \bigcap_I (\bigcap_{\alpha \in I} A \cap \bigcap_{\beta \in I} B) \\ &= \bigcap_I A \cap \bigcap_I \bigcap_{\beta \in I} B = \bigcap_I A \cap \bigcap_I B \\ &= \bigcap_I (A \cap B). \end{aligned}$$

所以 $\bigcap_I (A \cap B) = \bigcap_I (A \cap B)$.

例 2 设 $\{f_j(x)\}$ 是定义在 \mathbf{R}^n 上的函数列. 试用点集 $x \mid f_j(x) > \frac{1}{k}, k=1, 2, \dots$ 表示点集 $\{x \mid \overline{\lim}_j f_j(x) > 0\}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \{x \mid \overline{\lim}_j f_j(x) > 0\} &= \bigcap_{k=1} \bigcup_{N=1} \bigcap_{j=N} \{x \mid f_j(x) > \frac{1}{k}\} \\ &= \bigcap_{k=1} \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \{x \mid f_j(x) > \frac{1}{k}\}. \end{aligned}$$

例 4 作出实数全体与无理数全体间的 1—1 映射 .

解 在 \mathbf{R} 中取出可数子集 $A = \{e, e^2, e^3, \dots, e^n, \dots\}$, 则 $A \cap \mathbf{Q}$ 也是可数集, 其中 \mathbf{Q} 表示有理数全体 . 所以 $A \cap \mathbf{Q} \sim A$, 因而存在 A 到 $A \cap \mathbf{Q}$ 上的 1—1 映射, 例如, 设 $\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\}$, 则可取

$$(e^{2^{k-1}}) = e^k, \quad (e^{2^k}) = r_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

则 f 是 A 到 $A \cap \mathbf{Q}$ 上的 1—1 映射 . 令

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{R} \setminus (A \cap \mathbf{Q}) \\ (x), & x \in A \end{cases}$$

则 f 是 $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ 到 \mathbf{R} 上的 1—1 映射 .

例 5 设 $E \subset \mathbf{R}$ 是不可数的无限集 . 令

$$D = \{x \mid x \in E \text{ 且 } \exists \delta > 0, (x - \delta, x + \delta) \cap E \text{ 是不可数无限集}\},$$

试证 D 是不可数无限集 .

证明 先证 $E \setminus D$ 为至多可数集 . 事实上, 对任意 $x \in E \setminus D$, 由 D 的定义, 存在 $\delta > 0$, 使 $(x - \delta, x + \delta) \cap E$ 至多是可数集, 由于 $x \in E$, 所以存在有理数 r_x 与 \bar{r}_x , 使 $x - \delta < r_x < x < \bar{r}_x < x + \delta$, 于是 $(r_x, \bar{r}_x) \cap E$ 也至多可数 . 但 $\{(r_x, \bar{r}_x) \mid x \in E \setminus D\}$ 至多为可数集, 设

$$\{(r_x, \bar{r}_x) \mid x \in E \setminus D\} = \{(r_{x_1}, \bar{r}_{x_1}), (r_{x_2}, \bar{r}_{x_2}), \dots, (r_{x_n}, \bar{r}_{x_n}), \dots\},$$

则

$$E \setminus D = \bigcup_{x \in E \setminus D} [(r_x, \bar{r}_x) \cap E] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(r_{x_n}, \bar{r}_{x_n}) \cap E].$$

由于 $\bigcup_{n=1}^{\infty} [(r_{x_n}, \bar{r}_{x_n}) \cap E]$ 为有限个或可数个至多可数集的并, 所以仍为至多可数集 . 因此 $E \setminus D$ 是至多可数集 . 于是 $D = E \setminus (E \setminus D)$ 为无限不可数集 . 证毕 .

四、习题解答

1. 证明: $A - (B - C) = (A - B) - (A - C)$.

证明 设 $x \in A - (B - C)$. 若 $x \in A$, 则 $x \notin A - B$, $x \notin A - C$, 从而 $x \notin (A - B) - (A - C)$.

若 $x \notin B - C$, 则同样有 $x \notin A - B$ 且 $x \notin A - C$, 得 $x \notin (A - B) - (A - C)$, 因此

$$A - (B - C) \subseteq (A - B) - (A - C).$$

设 $x \in (A - B) - (A - C)$. 若 $x \in A$, 当然有 $x \in (A - B) - (A - C)$. 若 $x \notin A$, 由 $x \in A - B$ 且 $x \in A - C$, 可知 $x \in B$ 且 $x \in C$, 所以 $x \in B - C$, 同样有 $x \in A - (B - C)$, 因此 $(A - B) - (A - C) \subseteq A - (B - C)$. 所以 $A - (B - C) = (A - B) - (A - C)$. 证毕.

2. 证明:

$$(1) A - B = A - (A - B) = (A - B) - B;$$

$$(2) A - (B - C) = (A - B) - (A - C);$$

$$(3) (A - B) - C = A - (B - C);$$

$$(4) A - (B - C) = (A - B) - (A - C);$$

$$(5) (A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D);$$

$$(6) A - (A - B) = A - B.$$

$$\begin{aligned} \text{证明 (1) } A - (A - B) &= A \text{ 等}_s(A - B) \\ &= A \text{ (等}_s A \text{ 等}_s B) \\ &= (A \text{ 等}_s A) \text{ (A 等}_s B) \\ &= A - B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A - B) - B &= (A - B) \text{ 等}_s B \\ &= (A \text{ 等}_s B) \text{ (B 等}_s B) \\ &= A - B; \end{aligned}$$

$$(2) \quad (A - B) - (A - C)$$

$$\begin{aligned}
 &= (A \cup B) \cap (A \cap C) \\
 &= (A \cup B) \cap (\cap_s A \cap_s C) \\
 &= (A \cup B \cap_s A) \cap (A \cup B \cap_s C) \\
 &= A \cap (B \cap_s C) = A \cap (B - C);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad (A - B) - C &= (A \cap_s B) \cap_s C \\
 &= A \cap_s (B - C) \\
 &= A - (B \cap C);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad A - (B - C) &= A - (B \cap_s C) \\
 &= A \cap_s (B \cap_s C) \\
 &= A \cap (B \cap C) \\
 &= (A \cap_s B) \cap (A \cap C) \\
 &= (A - B) \cap (A \cap C);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad (A - B) \cap (C - D) &= (A \cap_s B) \cap (C \cap_s D) \\
 &= (A \cap C) \cap_s (B \cap D) \\
 &= (A \cap C) - (B \cap D);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad A - (A - B) &= A \cap_s (A \cap_s B) \\
 &= A \cap (\cap_s A \cap B) = A \cap B \text{ .证毕 .}
 \end{aligned}$$

3. 证明: $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$;

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C) .$$

证明 $(A \cup B) - C = (A \cup B) \cap_s C$

$$= (A \cap_s C) \cup (B \cap_s C)$$

$$= (A - C) \cup (B - C);$$

$$(A - B) \cap (A - C) = (A \cap_s B) \cap (A \cap_s C)$$

$$= A \cap_s B \cap_s C$$

$$= A \cap_s (B \cap C)$$

$$= A - (B \cap C) \text{ .证毕 .}$$

4. 证明: $\cap_{i=1}^n A_i = \cap_{i=1}^n A_i$.

证明 若 $i > j$, 不妨设 $i < j$. 显然 $B_i = A_i \quad (1 \leq i \leq n)$.

$$\begin{aligned} B_i &= B_j \cap A_i = A_j \cap A_i = \bigcap_{n=1}^{j-1} A_n \cap A_i \\ &= A_i \cap A_j \cap \bigcap_{s=1}^i A_s \cap \bigcap_{s=i+1}^j A_s \cap \bigcap_{s=j+1}^n A_s \\ &= \bigcap_{s=1}^i A_s \cap \bigcap_{s=i+1}^j A_s \cap \bigcap_{s=j+1}^n A_s \end{aligned}$$

由 $B_i = A_i \quad (1 \leq i \leq n)$ 得 $\bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$.

设 $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, 若 $x \in A_i$, 则 $x \in B_i = \bigcap_{i=1}^n B_i$. 若 $x \notin A_i$, 令 i_n

是最小自然数使 $x \notin A_{i_n}$, 即 $x \in \bigcap_{i=1}^{i_n-1} A_i$ 而 $x \notin A_{i_n}$. 这样 $x \in \bigcap_{i=1}^{i_n-1} A_i =$

$\bigcap_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n A_i$. 所以 $\bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n B_i$. 证毕.

7. 设 $A_{2n-1} = (0, \frac{1}{n})$, $A_{2n} = (0, n)$, $n = 1, 2, \dots$, 求出集列 $\{A_n\}$ 的上限集和下限集.

12

解 $\overline{\lim} A_n = (0, \infty)$;

设 $x \in (0, \infty)$, 则存在 N , 使 $x < N$, 因此 $n > N$ 时, $0 < x < n$, 即 $x \in A_{2n}$, 所以 x 属于下标比 N 大的一切偶指标集, 从而 x 属于无限多 A_n , 得 $x \in \overline{\lim} A_n$. 又显然 $\overline{\lim} A_n = (0, \infty)$, 所以 $\overline{\lim} A_n = (0, \infty)$.

$\underline{\lim} A_n = \emptyset$;

若有 $x \in \underline{\lim} A_n$, 则存在 N , 使任意 $n > N$, 有 $x \in A_n$. 因此若 $2n-1 > N$ 时, $x \in A_{2n-1}$, 即 $0 < x < \frac{1}{n}$. 令 $n \rightarrow \infty$ 得 $0 < x < 0$, 此不可能, 所以 $\underline{\lim} A_n = \emptyset$.

8. 证明 $\underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$.

证明 设 A_n 是 n 次有理系数多项式的全体, $n=1, 2, \dots$, 则 $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. A_n 由 $n+1$ 个独立的记号所决定, 即 n 次多项式的 $n+1$ 个有理数系数, 其中首项系数可取除 0 以外的一切有理数, 其他系数可取一切有理数, 因此每个记号独立地跑遍一个可数集, 因此由 §4 定理 6, $\overline{A_n} = a$, 又由 §4 定理 4, $\overline{A} = a$. 证毕.

13. 设 A 是平面上以有理点 (即坐标都是有理数) 为中心, 有理数为半径的圆的全体, 则 A 是可数集.

证明 任意 A 中的圆, 由三个独立记号所决定: (x, y, r) . 其中 (x, y) 是圆心的坐标, r 是圆半径, x, y 各自跑遍有理数, 而 r 跑遍大于 0 的有理数, 因而都是可数集. 所以 $\overline{A} = a$. 证毕.

14. 证明: 增函数的不连续点最多只有可数多个.

证明 设 f 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数. 记不连续点全体为 E , 由数学分析可知:

(1) 任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x+x) = f(x+0)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x-x) = f(x-0)$ 都存在.

(2) $x \in E$ 的充分必要条件为 $f(x+0) > f(x-0)$.

(3) 任意 $x_1, x_2 \in E$, 若 $x_1 < x_2$, 则 $f(x_1-0) < f(x_1+0) < f(x_2-0) < f(x_2+0)$, 因此每一 $x \in E$, 对应于直线上的开区间 $(f(x-0), f(x+0))$, 且由 (3) 可知 E 中点 x 对应的这样的开区间是互相不交的. 因此由第 11 题可知至多是可数的. 证毕.

15. 试找出使 $(0, 1)$ 和 $[0, 1]$ 之间 1—1 对应的一种方法.

解 记 $(0, 1)$ 中有理数全体 $R = \{r_1, r_2, \dots\}$

令

$$f(0) = r_1$$

$$f(1) = r_2$$

$$f(r_n) = r_{n+2}, n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) = x, \quad x \text{ 为 } [0, 1] \text{ 中无理数,}$$

显然 f 是 $[0, 1]$ 到 $(0, 1)$ 上的 1—1 映射.