数学建模基础

郑家茂

东南大学出版社

数学建模基础

郑家茂

东 南 大 学 出 版 社

内容提要

应用数学知识和计算机研究实际问题时，常常要用到数学模型。现在它已广泛应用于各种自然科学，以及工程技术、交通、商业、环境保护乃至经济、政治、军事等社会科学的研究中。本书是一本数学建模课程的基础教材，其主要目的是介绍如何应用数学工具去建立、分析并评价数学模型。在以实际问题为例，着重介绍建立数学模型的基本方法与基本思想的同时也兼顾到拓宽知识面。书中选取典型的模型60多个。用到的数学知识除了高等数学与线性代数外，还涉及到无量纲化方法、差分方法、曲线拟合方法、积分变换方法、相空间方法、摄动方法、渐近分析方法、特征线方法等。这些知识均已穿插在建模过程中逐一介绍，读者可直接读懂。

本书选例广泛而且贴近实际，问题交待清楚，数学处理细微，有利于学生阅读理解，也便于教师备课和教学，是一本合适的数学模型基础课程教材。应用数学专业以及理、工科大学生均可阅读。

数学建模基础

郑家茂

*

东南大学出版社出版发行

（南京四牌楼2号　邮编210096）

华东有色地质勘查局研究所印刷厂印刷

*

开本850×1168毫米1/32　印张12.25　字数318千

1997年8月第1版　1997年8月第1次印刷

ISBN　7－81050－261－1/O・15

定价：16.00元

前　言

近半个世纪以来，随着计算机等科学技术的迅速发展，数学的形象也发生了很大的变化。数学已不再仅是数学家和少数物理学家、天文学家、力学家等人手中的神秘武器，它已被越来越广泛、越来越深入地应用到各行各业之中，尤其是应用到生物、经济、政治、军事等数学应用的非传统领域。与这种发展相适应，国内、外高等教育都在注重加强培养学生从实际问题中提炼数学模型的能力和运用数学工具解决实际问题的能力。为此，数学模型被列入大学课程。这门课程通常可通过一些具体的例子说明建模过程中的三个基本步骤：

1. 把实际中碰到的具体问题，通过事物系统的特征与数量依存关系概括为数学问题，借助于数学概念与符号，建立起数学模型即某种数学结构来。

2. 引进适当的数学工具去处理模型，通过逻辑推理和论证计算，从中引导出一些定性或定量的结论。

3. 由于模型的建立经过了抽象分析过程，扬弃了次要的环节，所以得到的模型只是现实问题的相对反映，故必须返回原问题，通过实践的检验，对模型作出评价与修正。

本书立足于让学生基本了解数学模型方法在自然科学、技术科学、经济管理、社会实践等方面应用的全过程和掌握数学建模的基本方法，同时，注重培养学生丰富的想象力，调动学生的创造性，拓宽学生的知识面，使其能多科性地综合处理面临的各种建模问题，为提高学生独立工作能力和进行交叉学科数学建模能力打下良好基础。全书共 10 章，选择了典型的模型 60 多个，侧重于确定型的模型(其中图论、运筹与优化、概率统计类模型将有专门课程

讲授)。用到的数学知识除了高等数学与线性代数外,还涉及到了无量纲化方法、差分方法、曲线拟合方法、积分变换方法、相空间方法、摄动方法、渐近分析方法、特征线方法等。这些知识均已穿插在建模过程中逐一介绍,读者可直接读懂。书中就数学模型而言,只是强调建模过程及基本方法、基本思想、基本内容。但注意留下窗口,指出进一步考虑的方向和参考文献。书中还配有一定数量的习题,以帮助读者进一步深刻理解内容。

本书是为应用数学专业、数学建模与计算机应用辅修专业的数学建模基础课程编写的教材,约需64学时方能讲完。由于本书强调建模基础,处理建模方法细致,因此特别方便于教师备课和学生自学,也可作为相应的公共选修课程的教材。如果学时不够,可适当略讲带*号的内容。

在编写过程中,东南大学王元明教授、王政贤教授,河海大学刘景麟教授等给予许多关心和帮助,提供了一些基本素材,通览了全部书稿并提出修改意见,作者在此一并表示衷心感谢!限于作者水平,诸多方面考虑不周,恳请读者指正。

编　者

1997年5月于南京

目　录

1 绪论 …… 1
1.1 现实对象与数学模型 …… 2
1.2 建模示例 …… 6
1.3 建立数学模型的方法和步骤 …… 22
1.4 数学模型的特点与建模能力的培养 …… 25
1.5 数学模型的分类 …… 29
习题 …… 31
2 初等模型 …… 33
2.1 包装成本模型 …… 33
2.2 动物的身长和体重 …… 36
2.3 实物交换 …… 38
2.4 商业中心的影响范围 …… 40
2.5 核竞争模型 …… 43
2.6 经济学中的“蛛网模型” …… 45
2.7 零售物价指数预报 …… 50
2.8 选举中的席位分配 …… 57
2.9 过河模型 …… 63
习题 …… 68
3 量纲分析法建模 …… 70
3.1 量纲分析法原理 …… 70
3.2 单摆运动的周期 …… 74
3.3 航船的阻力 …… 75
3.4 点热源的热扩散 …… 79
3.5 无量纲化方法 …… 82
习题 …… 89

4 静态优化法建模……………………………………………… 91
4.1 不允许缺货的存贮模型……………………………………… 91
4.2 允许缺货的存贮模型……………………………………… 93
4.3 森林救火……………………………………………… 95
4.4 最优价格(Ⅰ)……………………………………………… 98
4.5 消费者的选择……………………………………………… 99
4.6 血管分支 ……………………………………………… 103
4.7 跑步与走路步长的选择 ……………………………… 106
4.8 冰山运输 ……………………………………………… 109
习题……………………………………………………… 114
5 曲线拟合法建模 ………………………………………… 117
5.1 确定经验公式的形式 ………………………………… 117
5.2 确定参数的图示法 …………………………………… 127
5.3 最小二乘法 …………………………………………… 132
5.4 确定参数的均值法与差分法 ………………………… 141
5.5 举重成绩的比较 ……………………………………… 148
5.6 估计水塔的水流量 …………………………………… 153
习题……………………………………………………… 159
6 线性代数模型 …………………………………………… 160
6.1 Dürer 魔方 …………………………………………… 160
6.2 遗传模型 ……………………………………………… 166
6.3 森林管理 ……………………………………………… 180
6.4 静态投入产出模型 …………………………………… 186
6.5 层次分析法建模 ……………………………………… 194
习题……………………………………………………… 211
7 常微分方程模型 ………………………………………… 213
7.1 赝品的鉴定 …………………………………………… 213
7.2 传染病的流行与预防宣传 …………………………… 222
7.3 糖尿病的诊断 ………………………………………… 227

* 7.4 “一要吃饭，二要建设”的数学模型…… 236
* 7.5 人民战争 …… 250
* 7.6 弱肉强食——生物圈的稳定问题 …… 253
* 7.7 行星运动——从 Kepler 三定律到 Newton 万有引力定律 …… 264
* 7.8 水星近日点的进动——从 Newton 万有引力定律到 Einstein 广义相对论 …… 275
习题…… 288

8 偏微分方程模型 …… 292
* 8.1 交通模型 …… 292
* 8.2 休渔与鱼群恢复 …… 318
* 8.3 烟雾的扩散与消失 …… 333
习题…… 339

9 差分方程模型 …… 340
9.1 线性差分方程的有关知识 …… 340
9.2 国民经济的差分方程模型 …… 346
9.3 改进的“蛛网模型” …… 347
* 9.4 差分形式的阻滞增长模型 …… 350
习题…… 356

10 变分法模型…… 357
10.1 变分法的基本知识…… 357
10.2 最速降线问题…… 364
10.3 生产计划的制订…… 366
10.4 生产与贮存的控制…… 370
10.5 最优价格模型(Ⅱ)…… 373
10.6 国民收入的增长…… 375
10.7 渔业资源的开发…… 377
习题…… 382

参考文献…… 383

1 绪 论

随着现代科学技术的高速发展，数学越来越得到广泛深入的应用。它不仅在力学、物理学、天文学等学科领域中仍起着举足轻重的作用，而且已逐步应用到化学、生物学、医学、环境科学、航天科学以及诸多尖端科学技术等方面，就是在政治、军事、经济管理、工业、农业、商业以及交通运输等各个社会领域也都普遍要使用数学。因此，数学模型做为沟通实际问题和数学方法的桥梁也就越来越普及。电气工程师通过建立所要控制的生产过程的数学模型，对控制装置进行相应的设计和计算，就能够对生产过程实现有效的控制。气象工作者给出的准确的天气预报也是根据气象台站和气象卫星汇集的气象资料建立的数学模型所得到的。天文学家可以通过天体运行数学模型推测行星的位置，探索宇宙的奥妙。地球物理学家根据地球科学中的数学模型可以进行地球时间、空间演化过程的研究，以及地球物理勘探。生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型，就可以分析药物的疗效，有效地指导临床用药。城市规划者需要建立一个包括人口、经济、交通环境等大系统的数学模型，为领导层决策城市发展规划提供科学根据。厂长、经理要是能够根据产品的需求状况、生产条件和成本、贮存费用等信息，筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，一定可避免生产中经常出现的盲目管理，从而获得更大的经济效益。就是在日常活动中如访友、出去采购，人们也会想找一个数学模型，优化一下出行的路线。可见数学模型已经渗透到非常广泛的领域，并起着十分重要的作用。做为现代的大学生、科技工作者、工程技术人员以及应用数学工作者都应该对数学模型有足够的了解，并学会建模以解决实际问题。

本章做为全书的绪论和数学模型的概述，主要讨论建立数学模型的意义、方法和步骤，使读者对建立数学模型有个较全面的、初步的了解。1.1 节从现实对象和它的模型开始，着重介绍数学模型的含义；1.2 节通过两个示例说明用数学语言和数学方法表述和解决实际问题的过程，即建立数学模型的过程；1.3 节介绍建立数学模型的一般方法和步骤；1.4 节主要讨论数学模型的特点及培养建立数学模型能力的问题；1.5 节简要介绍数学模型的分类情况。

1.1 现实对象与数学模型

人们生活在丰富多彩、变化万千的世界里，无时无刻不在运用智慧和力量去认识世界，改造世界。在认识世界、改造世界的过程中，由模型到原型是一条十分有效的途径。所谓原型是指人们在现实世界里所关心、研究或者从事生产、管理的实际对象，诸如桌子、球、产品、生产机械、生产过程等等。在科技领域中通常使用系统(System)、过程(Process)等词汇表示那些复杂的综合的现实问题。如机械系统、电力系统、生态系统、生命系统、社会经济系统等，又如钢铁冶炼过程、导弹飞行过程、化学反应过程、污染扩散过程、生产销售过程、计划决策过程等等。我们后面所述的现实对象、研究对象、实际问题均指原型。所谓模型是指为了某种特定目的将原型的某一部分信息简化、压缩、提炼而构造成的原型替代物。需要特别强调的是构造模型要针对具体的要求，也就是目的要明确。模型不是原型原封不动的复制品。原型有各个方面和各种层次的特征，而模型只要求反映与某种目的有关的那些方面与层次。对同一个原型，为了不同的目的可以构造出许多不同的模型。如放在展览厅里的飞机模型应该在外形上与原型逼真，但是不一定会飞。而参加航模比赛的模型飞机则要求具有良好的飞行性能，在外观上不必苛求。至于在飞机设计、试制过程中用到的数学模型和计算机模

拟，则只要求在数量规律上真实反映飞机的飞行动态特性，毫不涉及飞机的实体。所以说模型的基本特征是由构造模型的目的决定的。

我们已经看到模型具有各种各样的形式。按照模型替代原型的方式，模型可以简单分为形象模型和抽象模型两类。前者包括直观模型、物理模型等，后者包括思维模型、符号模型、数学模型等。

直观模型是指那些供展览用的实物模型，以及玩具、照片等。通常是把原型的尺寸按比例缩小或放大，主要追求外观上的逼真，这类模型的效果是一目了然的。

物理模型主要是指科技工作者为一定的目的根据相似原理或等效的结构图构造的模型。它不仅可以显示原型的外形或某些特征，而且可以用来进行模拟实验，间接地研究原型的某些物理规律。如水箱（人为波浪）中的舰艇模型用来模拟波浪冲击下舰艇的航行性能，风洞中的飞机模型用来试验飞机在气流中的空气动力学特性 。有些现象直接用原型研究非常困难，就可借助于物理模型进行研究，如地震模拟装置、核爆炸反应模拟设备等。在运用物理模型时特别要注意验证原型与模型间的相似关系，以确定模拟实验结果的可靠性。利用物理模型常常可得到实用上很有价值的结果，但也存在成本高、时间长、不灵活等缺点。

思维模型是指通过人们对原型的反复认识，将获取的知识以经验的形式直接贮存在大脑中的模型。人们根据思维或直觉作出相应的决策或行动就是通过思维模型实现的。如汽车司机对方向盘的操纵，一些技艺性较强的工种（如钳工）的操作大体上就是靠这类模型进行的，通常说的某些领导凭经验决策也是如此。思维模型便于接受，也可以在一定的条件下获得满意的结果，但是它往往带有模糊性、片面性、主观性、偶然性等缺点。

符号模型是指在一些约定或假设下借助于专门的符号、线条等，按照一定形式组合起来描述原形的模型。如地图、电路图、化学结构式等，它具有简明、方便、目的性强及非量化等特点。

数学模型一般是指由数字、字母或其他数学符号组成的，描述现实对象（原形）数量规律的数学结构。具体地说，数学模型也可以描述为：对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设后，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。对数学模型做数学分析或数学模拟就可以找到原型的某些数量的本质规律。如通过各种工件在不同机器上按一定顺序加工的数学模拟能够识别生产过程中的瓶颈环节；通过高速公路上交通流的数学模拟，可以分析车辆在路段上的分布情况，特别是堵塞情况。与用物理模型的模拟实验相比，数学模拟有明显的优点：成本低、时间短、重复性高、灵活性强，结果易推广。

由此可见数学模型是诸多模型中的一种。我们在此无意继续讨论各种模型的分类或特点，因为上面的描述对于初步认识数学模型已经足够了。接下来我们要用具体的例子帮助大家更深刻地认识数学模型。在举例之前，我们先简单看一下建立数学模型应该遵循的过程。

一般来说数学建模的过程可以分为表述、求解、解释、验证几个阶段。通过这些阶段完成从现实对象到数学模型，再从数学模型回到现实对象的不断循环、不断完善的过程。如图 1.1 所示。

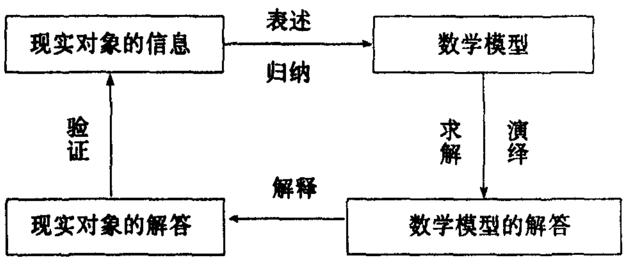

图1.1 现实对象和数学模型的关系

图中表述（Formulation）是指根据建模的目的和掌握的信息

（如数据、现象），将实际问题翻译转化成数学问题，用数学语言确切地表述出来。

求解(Solution)即选择适当的数学方法（包括计算机求解方法）求得数学模型的解答。

解释(Interpretation)是指把数学语言表述的解答翻译回到现实对象，给出实际问题的解答。

验证(Verification)是指用现实对象的信息检验得到的解答，以确认结果的正确性。

表述属于归纳法，求解属于演绎法。归纳是依据一系列的个别现象推断一般规律，演绎则是按照一般原理考察特定对象，导出结论。因为任何事物的本质都要通过现象来反映，这就必然要透过偶然来表露，所以正确归纳不是主观、盲目的，而是有客观基础的，但是也往往是不精细的、带感性的、不易直接检验其正确性的。演绎是利用严格的逻辑推理，对解释现象作出具有重要意义的科学预见。但是它要以归纳的结论作为公理化形式的前提，只能在这个前提下保证其正确性。因此归纳与演绎是一个辩证统一的过程，归纳是演绎的基础，演绎是归纳的指导。

图 1.1 揭示了现实对象和数学模型的关系。数学模型是将现实对象的信息加以翻译、归纳的产物，它源于现实，又高于现实，因为它用精确的语言表述了对象的内在特性。数学模型经过求解，演绎，得到数学上的解答，再经过翻译回到现实对象，给出分析、预报、决策、控制等结果。最后，这些结果必须经受实际的检验，完成实践——理论——实践这一不断完善的循环过程。如果检验结果正确或基本正确，就可以用来指导实际，否则应重复上述过程进行修正。建立数学模型需要遵循这一过程，也只有遵循这一过程才能建立具有实际意义的数学模型。

接下来我们通过具体的例子来进一步认识数学模型和建立数学模型的过程。重点放在建立数学模型的过程上。

1.2 建模示例

本节将给出两个建立数学模型的例子，说明从现实对象到数学模型的全过程。重点是突出如何作出合理的、简化的假设，如何用数学语言确切地表述实际问题，以及用模型的结果怎样解释实际现象。首先从日常生活中的一件最普通的事实开始。

例 1 椅子模型问题：将一张 4 条腿一样长的椅子放在不平的地面上，通常只有 3 只脚着地，然而只需稍为挪动几次就可以使 4 只脚同时着地放稳了，这个看来似乎与数学无关的现象能否用数学语言给以表述，并用数学工具来证实呢？让我们试试看：

模型假设 对椅子和地面应该作一些必要的假设：

(1) 椅子 4 条腿一样长，椅脚与地面接触处可视为一个点，4 脚的连线呈正方形。

(2) 地面凹凸坡面是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可视为数学上的连续曲面。

(3) 相对椅脚的间距和椅腿的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有 3 只脚同时着地。

假设(1)显然是合理的。假设(2)相当于给出了椅子能放稳的条件，因为如果地面高度不连续（譬如在有台阶的地方）是无法使四只脚同时着地的。至于假设(3)是要排除这样的情况：地面上与椅脚间距和椅腿长度的尺寸大小相当的范围内，出现深沟或凸峰（即使是连续变化的），致使 3 只脚无法同时着地。

模型构成 中心问题是用数学语言把椅子 4 只脚同时着地的条件和结论表示出来。首先要用变量表示椅子的位置，注意椅脚连线呈正方形，以中心为对称点，正方形绕中心的旋转可以代表椅子位置的改变，于是可以用旋转角度这一变量表示椅子的位置。在图 1.2 中椅脚连线为正方形 $ABCD$，在如图所示的坐标系下对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心 O 旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转至

$A'B'C'D'$ 的位置，所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置。

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来。如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，那么当这个距离为零时就是椅脚着地了。椅子在不同位置时椅脚与地面的距离不同，所以这个距离是椅子位置变量 θ 的函数。

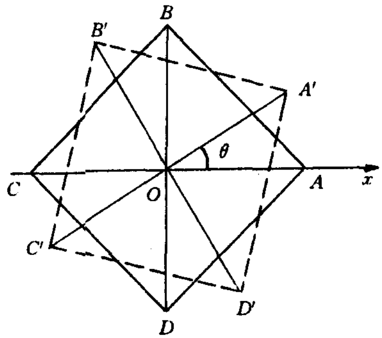

图 1.2

虽然椅子有 4 只脚，因而有 4 个距离，但是由于正方形的中心对称性，只要设 2 个距离函数就行了。记 A、C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B、D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，$f(\theta)$、$g(\theta) \geqslant 0$。由假设(2)，f 和 g 都是连续函数。由假设(3)，椅子在任何位置至少有 3 只脚着地，所以对于任意的 θ，$f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 中至少有一个为零。当 $\theta = 0$ 时不妨设 $g(\theta) = 0, f(\theta) > 0$。由对称性知到，旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度后，相当于 AC 和 BD 互换一个位置，故有 $g(\frac{\pi}{2}) > 0, f(\frac{\pi}{2}) = 0$，这样，改变椅子的位置使 4 只脚同时着地，就归结为证明如下的数学命题：

已知 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ，有 $f(\theta) \cdot g(\theta) = 0$，且 $g(0) = 0, f(0) > 0$；$g(\frac{\pi}{2}) > 0, f(\frac{\pi}{2}) = 0$，则存在 θ_0，使 $f(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$。

可以看到，引入了变量 θ 和函数 $f(\theta)$、$g(\theta)$，就把模型的假设条件和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表述出来，从而构成了这个实际问题的数学模型。

模型求解 上述命题有多种证明方法，这里介绍其中的一

种。

将椅子旋转 $90°(\pi/2)$，对角线 AC 与 BD 互换。由 $g(0)=0$ 和 $f(0)>0$ 可知 $g(\pi/2)>0$ 和 $f(\pi/2)=0$。

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则 $h(0)>0$ 和 $h(\pi/2)<0$。由 f 和 g 的连续性知 h 也是连续函数。根据连续函数的基本性质，必存在 $\theta_0(0<\theta_0<\pi/2)$ 使 $h(\theta_0)=0$，即 $f(\theta_0)=g(\theta_0)$。又因为 $f(\theta_0)\cdot g(\theta_0)=0$，所以 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

由于这个实际问题非常直观和简单，模型解释和验证就略去了。

评注 这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子 4 只脚与地面的距离（倘若不这样情形如何?）。利用正方形的中心对称性及旋转 90° 并不是本质的。读者可以考虑 4 脚呈长方形的情形（习题 2）。

从上例可见，利用数学模型合理解释日常现象的关键在于做出合理的假设，用简洁的数学语言表述实际问题。是不是所有的数学建模都这样简单有效呢?果真如此的话，数学建模也就没有这样的生命力了。更一般的情形需要对模型不断修正，才能达到预期目的。下面我们看一个稍为复杂一些的例子，由此将看到建立数学模型的不断修正的过程。

例 2 人口模型：当今世界面临五大问题：(1) 人口问题，(2) 工业化的资金问题，(3) 粮食问题，(4) 不可再生的资源问题，(5) 环境污染问题（即生态平衡问题）。人口问题名列榜首。我国建国以来的历史和当前的现实也已经证明，这个问题也是我国社会主义现代化建设必须认真思考和慎重对待的重大问题。过去曾经认为，人多好办事，对呼吁控制人口增长的经济学家马寅初错误地开展批判，结果造成我国人口迅速超过 10 亿，背上了沉重的包袱。人均粮食不足，人均资源不足，工业化资金有限，生态平衡被破坏等等，都与人口太多有关。我国要实现四个现代化，应有效地控制人口增长，就必须制定正确的人口政策。建立人口增长的数学模型，用以

描述人口增长过程，通过分析对人口增长进行预测，制定相应的人口政策以控制人口增长，于国于民均有利。

影响人口增长的因素很多：现有人口的多少，出生率的高低，人口男女比例的大小，人口年龄组成情况，工农业生产水平高低，各民族的风俗习惯，自然灾害、战争、人口迁移等等。如果一开始把众多因素都考虑，则无从下手。我们先把问题简化，只考虑影响人口增长的主要因素 —— 增长率（出生率减去死亡率），其余因素暂不考虑，建立一个较粗的数学模型。在这个模型的基础上再逐步考虑次要因素的影响，从而建立一个比一个与实际更加吻合的数学模型。

人口的增长可用微分方程来描述。初看起来，人口增长是不能用微分方程来描述的。因为人口总数是按整数变化的，不是时间的可微函数。然而，如果总数很大，可以近似认为它是时间的连续函数，甚至是可微函数。

设 $N(t)$、$r(t,N(t))$ 表示 t 时刻的人口总数和增长率，假设只考虑增长率，其他因素的影响均不考虑，则在 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内人口总数增长为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=r(t,N)N(t)\Delta t$$

两端同除以 Δt，并令 $\Delta t\to 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r(t,N)N(t) \tag{1.1}$$

我们将逐步深入讨论上面这个模型。

1.2.1 Malthus 模型

英国早期经济学家 Malthus(1766 ～ 1834) 担任牧师期间，查看了教堂 100 多年人口出生统计资料，他发现这样一个现象，即人口出生率是一个常数。于是在 1798 年发表了《人口的原理》一书，其中提出了哄动于世的 Malthus 人口模型。

该模型是在式(1) 中令 $r(t,N)=r$(常数)，得