第一讲　　问题解决与数学建模

1.1　数学教育的改革与问题解决

20 世纪以来，科学技术得到了迅猛的发展，数学在这个发展过程中发挥了不可替代的作用，同时数学的本身及其各分支也得到了空前的发展. 随着计算机的快速发展和普及，大大增强了数学解决实际问题的能力. 数学向社会、经济和人们生活中各个领域的渗透，使数学应用于经济建设、社会发展和人们生活的范围和方式发生了深刻的变化. 随着新的学科分支纷纷出现，与数学相结合也产生了大量新的应用数学分支，如数理经济学、保险精算、数理地震学、数理语言学、金融数学等. 当今世界，“国家的繁荣富强，关键在于高新的科学技术和高效率的经济管理”已是有识之士的共同见解，也为发达国家的历史所证实. 大量的事实表明，高技术是保持国家竞争力的关键因素. 高新技术的基础是应用科学，而应用科学的基础是数学，因此“高科技本质上是数学技术”（David，曾任美国总统顾问）这一看法已成为越来越多的人的共识. 另外，当代社会和经济发展的一个显著特点就是定量化和定量思维越来越重要，这使得受过数学科学训练而受益的直观思维、逻辑推理、精确计算等素质而成为科技人员和经济管理人员的必备素质. 因此，可以预言：数学以及数学应用在科学技术、经济建设、商业贸易和日常生活中所起的作用将愈来愈大，数学科学作为技术创新、经济发展以及工业竞争的推动力的重要性也将日益显现出来，“数学能力成为人们取胜的法宝”（姜伯驹，中科院院士）. 这一切要求人们对数学有一个全面、正确的了解和认识.

在当今世界，由于数学科学与其他科学技术和经济建设的紧密结合，数学科学已成为经济竞争中不可缺少的、一种关键性的、普遍的、能够实行的技术，高技术的出现把我们的社会推进到数学技术的时代，数学又被赋予科学和技术的双重身份.

面对新技术革命的挑战，世界各国之间基于高科技的经济竞争日趋激烈，一个国家要想在竞争之中立于不败之地，关键在于掌握高新技术和培养高素质的人才，由于数学在发展高新技术以及培养高素质的人才中的重要地位，世界各国政府都把数学教育的发展和改革看成为新世纪能否在科学技术和经济的激烈竞争中战胜对手的一个极为重要的环节. 数学教育改革已成为世界关注的热门话题. 它涉及到高等数学教育、基础数学教育和其它各个层次的数学教育.

在当今的数学教育中，问题解决（Problem Solving）已成为其中的一个热点. 在国际上，日本已把提高问题解决的能力纳入到1994 年实施的《中小学课程改善的方案》，日本当前数学教育研究的两个中心问题，其中之一就是问题解决. 在美国的中学课程标准中，问题解决已作为“一切数学活动的组成部分，应当成为数学课程的核心”并把问题解决当作一种教学模式和教学的指导思想. 美国全国教师联合协会（NCTM）1980 年 4 月公布的文件《行动的议程》（An Agenda for Action）中明确指出：把“问题解决”作为“学校数学的核心”，“应当在各年级都介绍数学的应用，把学生引到问题解决中去”，“数学课程应当围绕问题解决来组织”. 1982 年，英国数学教育的纲领性文件《Cockcroft 报告》着重指出，“应将问题解决作为课程论的重要组成部分”，强调“数学只有在解决各种实际问题的情况下才是有用的. 1988 年召开的第六届国际数学教育大会就把“问题解决、建模和应用”列入大会七个主要研究的课题之一，认为“问题解决、建模和应用必须成为从中学到大学所有学生的数学课程的一部分”. 在我国，原国家教委基础教育课

程教材研究中心在 1993 年组织过专题讲习班，并出版了用于问题解决的“问题集”，1996 年 6 月在西班牙召开的第八届国际数学教育大会上，我国代表叶其孝教授在“数学建模与应用专业组”的报告中，介绍了我国首创的中学数学知识应用竞赛的情况，受到与会代表的欢迎，引起了很好的反响.

我国的上海市从 1991 年以来，已组织了多届“金桥杯”中学生数学知识应用竞赛，参加者最多时达 4 000 余人. 北京市在 1994 年组织了第一届“方正杯”中学生数学知识应用竞赛，有 2 000 多人参赛. 从 1997 年起，由北京数学会等五家单位组织，将《中学数学知识应用竞赛》作为正式的科普活动，定期举行，它已涉及天津、河北、山西、陕西、辽宁、吉林、四川、湖北、浙江、江苏、云南、福建等省市. 同时，国内的不少数学教育期刊在近年来也纷纷开设了数学知识应用和数学建模的专栏（如《数学通报》和《中学生数学》）. 近几年的高考题中，数学知识的应用题已成为稳定的出题内容，一批面向中学的数学建模的入门读物也相继问世.

值得注意的是，我们在看到数学建模与问题解决已成为国际数学教育中稳定的内容和热点之一时，相比较而言，国内的中学数学建模与问题解决活动虽然已经起步，但在内容、形式、范围和与课堂教学内容真正意义的结合上，还有许多问题有待探索，如何结合我国数学教育的优势和文化传统，发挥数学建模在数学素质教育中的作用，还有待大家扎实的努力和创造性的工作.

1.2 问题解决与数学模型

在美国 1980 年公布的《行动的议程》这份文件中对数学的“问题解决”的内涵作了进一步的阐述：“数学上‘问题解决’这个词汇应当发展和扩充到包括各方面数学应用的广泛策略、过程和描

述模型. 离开应用的计算活动不能叫问题解决. 问题解决的定义不应当局限于通常的‘应用题’’. “问题解决包括把数学应用于现实世界，为现在和将来的理论和实践科学服务，和解决伸延到数学科学本身的前沿中的问题”. 大体说来，有以下的特点：一是创造性，它往往是非常规的. 由于问题解决一般讨论的是现实世界中的实际问题，现实世界的复杂性往往使得所提的问题并不像常规的“应用题”那样规范，后者一般都是数学算法或法则的直接套用. 而前者一般不是靠熟练操作就能完成的，需要较多的创新的工作. 二是应用性，即给出的问题往往不是数学化的“已知”、“求证”的模式，而是给出一种现实的情景，一种实际的需求，以训练学生面对“现实的实际问题”，选择适当的数学方法解决问题的能力. 三是开放性，问题不一定有解，答案不必唯一，条件既可能不足又可以冗余，有较强的探究性. 这样一个对“问题解决”的内涵及其特征的理解，实际上与当前在数学教学上经常提到的“数学模型”或“数学建模”的内涵和特点是一致的. 因此我们可以认为“数学模型”是实现“数学问题解决”的基本手段和主要内容，甚至可以把“数学模型”理解为“数学问题解决”的同义语. 掌握了常见的数学模型和数学建模的方法将会激发学生的创造能力，有助于应用数学解决实际问题能力的提高. 从而达到加强“数学问题解决”教育的目的. 这也是本书的指导思想和基本定位.

“模型”是人们用以认识世界的重要手段之一. 这里的模型是针对原型而言的. 所谓原型是指人们所关心和研究的实际对象. 而模型是人们为一定的目的对原型进行的一个抽象. 例如大家熟知的航空模型就是飞机的一个抽象. 除了机翼与机身的形状及其相对位置关系外的一切因素，包括飞机的实际大小都在抽象的过程中被忽略掉了. 虽然它与原型的实际飞机已经相距甚远，但是在飞行过程中机翼的位置与形状如何影响飞机在空中平稳地滑翔可以给人们以启迪. 城市的交通图是这个城市的一个模型. 在这个模型中城市的

人口、车辆、树木、建筑物的形状等都不重要. 但图中所展示的街道和一目了然的公共交通线路是任何一个实际置身于城市中的人很难搞清楚的. 由此可见模型来源于原型，但它不是对原型简单的模仿，它是人们为了深刻地认识和理解原型而对它所作的一个抽象、升华. 有了它就可以使我们通过对模型的分析、研究加深对原型的理解和认识.

在数学的“问题解决”中，应用数学知识去解决各门学科和社会生产中的实际问题，首先要把实际问题中的数学问题明确地表述出来，也就是说，要通过对实际问题的分析、归纳给出用以描述这个问题的数学提法；然后才能使用数学的理论和方法或者计算机进行分析、得出结论；最后再返回去解决现实的实际问题. 由于实际问题的复杂性，往往很难把现成的数学理论直接套用到这些问题上. 必须要在数学理论和所要解决的实际问题之间构架一个桥梁加以沟通，以便把实际问题中的数学结构明确地表示出来. 这个桥梁就是数学模型.

一般来说，所谓数学模型是指通过抽象和简化，使用数学语言对实际现象的一个近似的刻划，以便于人们更深刻地认识所研究的对象. 数学模型不是对现实系统的简单的模拟，它是人们对现实对象进行分析、提炼、归纳、升华的结果，是以数学的语言来精确地描述现实对象的内在特征，以便于通过数学上的演绎推理和分析求解深化对所研究的实际现象的认识. 例如力学中著名的牛顿第二定律使用公式 $F=m\mathrm{d}x^2/\mathrm{d}t^2$ 来描述受力物体的运动规律就是一个成功的数学模型，其中 $x(t)$ 表示运动的物体在时刻 t 的位置，m 为物体的质量，而 F 表示运动期间物体所受的外力. 模型忽略了物体的质地、形状、大小和运动过程中的次要的干扰因素. 由于它抓住了物体受力运动的主要因素，这一定律的出现大大深化了力与物体运动规律的研究工作. 又如描述人口 $N(t)$ 随时间 t 自由增长过程的数学模型 $\mathrm{d}N(t)/\mathrm{d}t=rN(t)$，尽管由于它忽略了性别、

年龄、社会、经济和自然界的约束条件等许多与人口增长有密切关系的因素，相对于实际人口的动态来说大大地被简化了. 但它所揭示出的人口成等比级数的增长的结论是人们不得不面对的严酷事实.

数学模型并不是新的事物，很久以来它就一直伴随在我们身边. 可以说有了数学并要用数学去解决实际问题时就一定要使用数学的语言和方法去近似地刻划这个实际问题，这就是数学模型. 数（整数、有理数、实数等）、几何图形、导数、积分、数学物理方程以至于广义相对论、规范场等都是非常成功的数学模型. 运筹学以及统计学的大部分内容都是关于数学模型的讨论和分析. 可以说在数学的发展进程中无时无刻不留下数学模型的印记，在数学应用的各个领域到处都可以找到数学模型的身影. 只不过在当前随着科学技术的发展，各门学科的定量化分析的加强以及使用数学工具来解决各种问题的要求日益普遍的条件下，数学模型作为数学实现其技术化职能的主要手段之一，它的作用显得愈发突出，从而受到了更加普遍的重视.

大量的事实告诉我们，任何一个数学模型都有它自己的实际背景，都是从特定的实际问题中抽象出来的. 与数学理论不同，离开了实际背景而定义的或想象出来的数学表达不可能准确地描述特定的实际问题. 因此，一个好的数学模型必须具有实际背景、有明确的针对性，要接受实践的检验，并且被证明是正确的、可用的. 这就是它的实践性. 这种实践性并非就事论事地讨论实际问题，而是用数学的语言描述实际问题的本质特征的一次升华. 这实质上是一个抽象的过程. 这个抽象不同于数学理论中的抽象思维. 它是要求人们从实际问题中抽象出其中的数学内涵. 应用性是数学模型的另一个重要的特征. 我们组建数学模型的目的是要应用数学的知识去解决实际问题. 必须要注意到实际问题的要求，必须要使对模型的分析和讨论落实到使所研究的实际问题得到满意的解答上，才能实

理论上的自然的结论和常规的研究方法与实际问题的要求并不总是一致的 因此模型的实用价值即它的实用性是不容忽视的一个特征 所谓综合性是指一个数学模型所牵涉到的数学不一定只是数学的某一个分支的内容，往往是数学知识的综合的应用 特别是遇到参数估计、模型分析、模型检验和数值结果的计算时更是如此，而应用于一个实际问题的数学模型也不一定只是一个模型，它可能是多个数学模型一步步地综合分析的结果 因此学习数学模型需要具备较宽的数学基础知识，而使用数学模型解决实际问题时也应该是有关数学知识的一个综合的应用

一个好的数学模型不在于它使用了多么高深的数学 作为一个成功的模型应该有较强的实际背景，最好是直接针对某个实际问题的；模型应该是经过实际检验表明是可以接受的；模型应该能够使我们对所研究的问题有进一步的了解；而且也应该是尽可能的简单以利于使用者理解和接受的

数学建模

数学建模是指根据人们的需要针对实际问题组建数学模型的过程 需要指出的是，这里所说的“ 数学 ”是指广义的数学，即除去通常所说的经典数学

验证、再分析、修改假设、再求解的迭代过程，它完整地体现了学数学和用数学的关系，从而体现一种“微型”科研的过程.

由于实际问题的多样性，使得数学建模涉及的范围相当宽，所涉及到的数学知识非常广，尽管所研究问题的内容及所用数学方法千差万别，但它们之间有一点是共同的，那就是它们都是针对一个实际问题，通过辨识问题中变量之间的关系而把实际问题转化为由数学语言描述的形式. 一般来说都要经历这样一个过程. 与数学方法的使用相比，这个过程是建模工作的一个明显特征. 在这个过程中对每个问题的处理在方式上有一个非常相似之处就是通过一个程序化的过程来组建数学模型. 这是数学建模工作中的一种有效的处理问题的方式. 每当我们面对新的实际问题需要用数学的手段来处理时，这一程序化的处理方式将为我们提供一条有效地组建数学模型的途径.

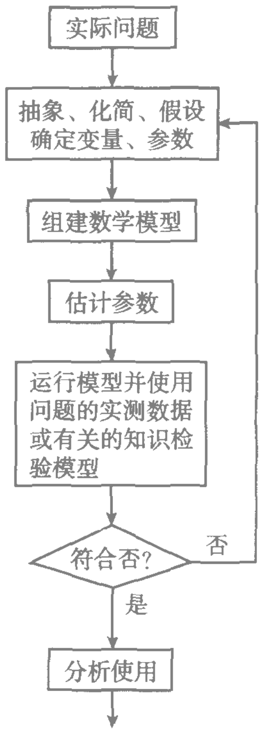

图 1-1　数学建模过程流程图

数学建模的过程一般包含有若干个有着明显区别的处理阶段. 我们可以用如下的流程图（图 1-1）来表示. 经验告诉我们，这个流程图为我们提供了一个思考问题的框架，它不仅能够帮助我们成功地组建有关的数学模型，而且当你面对一个实际的问题感到困惑而无法入手建模时，它将给你提供一条思考的途径.

流程图中的每一个方框表示建模过程的一个阶段. 下面我们将对每个阶段作一个简要的说明.

1. 对于面临的实际问题，我们首先需要明确研究的对象和研究的目的. 问题所

依据的事实和数据资料的来源是什么，它们是否真实、以及与问题有关的背景知识. 需要明确我们所研究问题的类型：是确定型的还是随机的，是需要建模还是需要模拟.

2. 辨识并列出与问题有关的因素，通过假设把所研究的问题进行简化，明确模型中需要考虑的因素以及它们在问题中的作用，以变量和参数的形式表示这些因素. 通常在建模之初总是把问题尽量简化，在最简单的情形下组建模型以降低建模工作的难度. 然后通过不断地调整假设使模型尽可能地接近实际.

3. 运用数学知识和数学上的技能技巧来描述问题中变量之间的关系. 通常它可以用数学表达式来描述，如：比例关系、线性或非线性关系、经验关系、输入输出原理、平衡原理、牛顿运动定律、微分或差分方程、矩阵、概率、统计分布等. 从而得到所研究问题的数学模型.

4. 使用观测数据或实际问题的有关的背景知识对模型中的参数给出估计值.

5. 运行所得到的模型、解释模型的结果或把模型的运行结果与实际观测进行比较. 如果模型结果的解释与实际状况相符合或结果与实际观测基本一致，这表明模型经检验是符合实际问题的，可以将它用于对实际问题进行进一步的分析讨论. 如果模型的结果很难与实际相符合或与实际观测差异较大，表明这个模型与所研究的实际问题是不符合的，不能直接将它应用于所研究的实际问题. 这时如果数学模型的组建过程没有问题的话，就需要返回到建模前关于问题的假设. 检查我们关于问题所作的假设是否恰当，检查是否忽略了不应该忽略的因素或者还保留着不应该保留的因素. 对假设给出必要的修正，重复前面的建模过程，直到组建出经检验是符合实际问题的模型为止.

将一个数学模型应用于实际问题时主要是通过对模型作进一步的分析和讨论得到的，使用代数的、分析的或数值的方法给出模型

的解. 从理论上讨论解的性质，必要时也可以写出计算程序或者使用恰当的软件包由计算机进行模拟，把数学上和计算机运算所得到的结果再回到实际问题中去，用以对实际问题给出解释，解决实际问题或加深我们对问题的认识，从而达到使用数学模型研究实际问题的目的. 需要注意，我们从数学模型得到结论的主要目的是解决实际问题，因此当用它来解决实际问题时的语言应该是非数学工作者所能理解的. 这时，过多、过深地使用数学语言将影响模型的使用效果. 要学会使用通俗的语言来表达数学上的结论，使得它能为更多的人所接受.

1.4 数学建模举例

下面，我们通过“铅球的投掷问题”这样一个例子来说明如何应用上面所指出的过程来组建数学模型.

一、问题的背景与提出

众所周知，铅球运动是指运动员单手托住 7.264 kg（或 16 磅）重的铅球在直径为 2.135 m 的投掷圆内将铅球掷出，并且使铅球落在开角为 45°的有效扇形区域内，以铅球的落地点与投掷圆间的距离度量铅球投掷的远度，并以铅球投掷远度的大小来评定运动员的成绩优劣.

在铅球投掷的训练和比赛中，铅球投掷距离的远与近是人们最为关心的问题，而对于教练和运动员，他们最为关心的问题是如何使铅球投掷得最远. 同时影响铅球投掷远度的因素有哪些？哪些是影响远度的主要因素？在平时的训练中，应该更注重哪些方面的训练？

下面，我们将通过组建数学模型来进行分析.

二、建模与分析

由于投掷过程是一个较复杂的运动力学的问题．下面我们组建两个模型由浅入深地给出分析．

1．模型 I——抛射模型

在这个模型中，我们不考虑投掷者在投掷圆内用力阶段的力学过程；只考虑铅球脱手时的初速度和投掷的角度对铅球投掷远度的影响．为此，我们不妨把铅球视为一个抛射体，关于它的运动可以在如下三个假设之下来分析：

（1）铅球被看成是一个质点．

（2）铅球运行过程中忽略空气的阻力．

（3）投掷角和初速度是相互独立的．

由铅球投掷的常识可以知道，假设的前两条是可以接受的，而假设（3）主要是为了简化问题的分析．

以铅球出手点的铅垂方向为 y 轴（向上为正），以 y 轴与地面的交点到铅球落地点方向为 x 轴构成平面直角坐标系．在此坐标系内考虑铅球的运动，记 v 为铅球出手时的速度，α 为投掷角，h 为铅球出手的高度，t 为铅球运动的时间（$t=0$ 时铅球出手）．则由物理学的知识可以得到铅球的运动方程

$$\begin{cases} x=(v\cos\alpha)t, \\ y=(v\sin\alpha)t-\dfrac{1}{2}gt^2+h, \end{cases}$$

其中 $g=9.8$ 米／秒^2 是重力加速度．方程组中消去 t 可以得到铅球运动轨迹的方程

$$y=-\frac{gx^2}{2v^2\cos^2\alpha}+(\tan\alpha)x+h. \tag{1.1}$$

若铅球投掷的远度为 s，则轨迹将于（s，0）点与 x 轴相交．将它代入（1.1），解出 s 可得

$$s=\frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}+\sqrt{\left(\frac{v^2\sin 2\alpha}{2g}\right)^2+2h\frac{v^2\cos^2\alpha}{g}}. \quad (1.2)$$

它描述了铅球投掷的远度 s 如何依赖于投掷时的出手速度和投掷角度的关系．也就是我们所要的铅球投掷的模型．

表 1-1 列出了由我国优秀的女子铅球运动员李梅素和另一女子铅球运动员斯卢皮亚内克的几组实测数据．表中的远度是指根据公式（1.2）算出的模型值．与实测成绩相比较，仅差 20 厘米左右．这是因为远度 s 中并没有包括铅球出手的瞬间超出抵趾板内沿的距离．因此可见，用模型（1.2）来讨论 v，h，α 三个因素，与投掷铅球成绩的关系是可行的．

表 1-1　李梅素与斯卢皮亚内克铅球投掷成绩

姓名	出手速度 v/(m/s)	出手高度 h/(m)	出手角度 α/(°)	最佳角度 α/(°)	远度 s/(m)	实测成绩 s/(m)
李梅素	13.75	1.90	37.60		20.68	20.95
				42.43	21.10	
李梅素	13.52	2.00	38.69		20.22	20.30
				42.37	20.55	
斯卢皮亚内克	13.77	2.06	40.00		21.25	21.41
				42.25	21.31	

这个模型能给我们什么关于铅球投掷的进一步的认识呢？它可以通过对模型的分析得到．

模型Ⅰ的分析：

（1）最佳出手角度

由模型（1.2）可以看出，铅球的出手速度 v 和出手高度 h 越大，远度 s 就越大．现在的问题是当 v，h 一定时，如何选择最佳的出手角度，使远度达到最大．这是一个函数求极值的问题．不难得出，最佳出手角度 α 将满足如下方程

$$\cos 2\alpha\sqrt{v^4\sin^2 2\alpha+8hgv^2\cos^2\alpha}+v^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha-2gh\sin 2\alpha=0.$$

将此方程有理化，并整理可得

$$\cos 2\alpha=\frac{gh}{gh+v^2}=\frac{g}{g+\frac{v^2}{h}}. \tag{1.3}$$

理论上分析（1.3）式不难得到：

由于 $h>0$，$\alpha>0$，故有 $0<\alpha\leqslant 45^\circ$. 特别当 $h=0$ 时（出手点与落地点在同一高度），最佳出手角度 $\alpha=45^\circ$.

给定铅球的出手高度 h，出手速度 v 变大，相应的最佳出手角度 α 也随之变大.

如果给定出手速度 v，增加铅球的出手高度，相应的出手角度反而变小.

（2）投掷铅球的最佳模式

为了教练使用方便，利用模型（1.2）和式（1.3）可以提供一个投掷铅球的最佳模式表.

根据当前来自优秀女子铅球运动员的技术数据，选定出手速度（10～15 m/s）和出手高度（1.90～2.1 m）. 利用（1.3）可以算出最佳出手角度 α(°)，然后利用（1.2）求出相应的远度 s(m)，其结果如表 1-2 所示：

表 1-2　投掷铅球的最佳模式

h \ v (α,s)	10	11	12	13	14	14.5	15
1.9	40.48 11.95	41.16 14.11	41.71 16.48	42.15 19.05	42.51 21.81	42.76 23.27	42.80 24.78
2.0	40.28 12.03	40.99 14.20	41.55 16.57	42.01 19.14	42.39 21.90	42.55 23.36	42.70 24.87
2.1	40.08 12.12	40.82 14.29	41.40 16.65	41.88 19.29	42.27 22.00	42.44 23.46	42.59 24.97

表格中每一格内上排的数字是最佳的出手角度，下排的数字给出了铅球相应的投掷远度.

有了这个表，教练就可以用来指导训练. 例如，已知一个运动员的铅球出手高度 $h=2$ m，出手速度 $v=13$ m/s，那么从表中就可以查出最佳的出手角度 $\alpha=42.01°$，这时远度 $s=19.14$ m，再如一个运动员要想成绩突破 23 m大关，从表 1-2 中可以查出他的出手速度必须接近 14.5 m/s.

(3 主要因素分析

模型 (1.2) 中给出了铅球投掷的远度与影响它的三个因素(出手高度 h、出手速度 v 和出手角度 α）之间的关系. 尽管前面我们使用数学的工具着重分析了有关最佳出手角度的问题. 但 h，v，α 这三个因素中哪个是最主要的？哪个是次要的？可能是教练和运动员更关心的问题，这个问题可以通过模型对各个变量的灵敏度分析来得到解答. 也就是说，逐步讨论各变量变化时对远度 s 的影响的大小. 影响大的因素在模型中称之为灵敏的，而影响小的称之为不灵敏的. 由于模型的数学表达式较为复杂，直接使用数学方法分析较为困难。不妨使用数值的方法来分析. 也就是说，让 h，v，α 三个变量在可能的范围内变化，使用计算机计算它们的远度的模型值，并计算每个变量变化时所引起的远度改变量的极差，通过极差的分析比较就能判断各因素对于铅球投掷远度的重要性。

表 1-3 列出了 h，v，α 在可能取值范围内若干取值点上远度的计算结果和各变量变化时远度的极差值.

从表 1-3 中所列的极差值可以看出出手角度在它的可能取值范围内所引起的远度最大改变量在 0.05～0.42 m之间. 而出手速度在所列的取值范围内引起的最大距离改变量要在 12.47～12.89 m 之间. 类似地还可以算出出手高度变化时远度的极差值（表中未列). 它的变化范围在 0.16～0.22 m之间. 这些数据表明铅球的出手速度无疑是影响远度最重要的因素. 平均来说出手速度每增加 1 m，将导致远度提高 2 m的距离。这是任何其他两个因素的影响所不能相比的. 因此为了提高铅球投掷的成绩，提高出手速度比提

高出手高度及出手角度要有效得多. 另外比较其他两因素可以看出出手角度导致远度的极差变化的范围要比出手高度大，它表明在投掷过程中最佳出手角度的调整对于取得稳定的成绩是重要的. 但更进一步分析表明在最佳出手角度上下有 2° 的误差情形之下远度的极差不会超过0.06 m，也就是说，对角度的要求不必过分准确，只要在最佳出手角度的一定范围内就可以了. 这时角度与出手高度的极差相比就会发现较高的出手高度还会使远度增加 0.16～0.22 m. 因此它应该是在训练过程中不容忽视的第二个重要的因素.

表 1-3　影响铅球投掷因素的灵敏度分析

h	v \ α	37	38	39	40	41	42	43	极差
1.9	10	11.89	11.92	11.94	11.95	11.95	11.94	11.92	0.06
	11	14.01	14.05	14.09	14.11	14.12	14.12	14.10	0.11
	12	16.31	16.38	16.43	16.46	16.48	16.48	16.47	0.17
	13	18.80	18.89	18.96	19.01	19.04	19.05	19.04	0.25
	14	21.48	21.59	21.68	21.75	21.79	21.81	21.82	0.34
	15	24.36	24.49	24.60	24.68	24.74	24.78	24.78	0.42
极　差		12.47	12.57	12.66	12.73	12.79	12.84	12.86	
2.0	10	11.98	12.01	12.03	12.04	12.04	12.02	12.00	0.06
	11	14.10	14.15	14.18	14.20	14.21	14.20	14.18	0.11
	12	16.41	16.47	16.52	16.55	16.57	16.57	16.56	0.16
	13	18.90	18.99	19.05	19.10	19.13	19.14	19.13	0.24
	14	21.59	21.70	21.78	21.85	21.89	21.91	21.91	0.32
	15	24.46	24.60	24.70	24.79	24.84	24.87	24.88	0.42
极　差		12.48	12.59	12.67	12.75	12.80	12.85	12.88	
2.1	10	12.07	12.10	12.12	12.12	12.12	12.10	12.08	0.05
	11	14.20	14.24	14.27	14.29	14.29	14.28	14.26	0.09
	12	16.51	16.57	16.62	16.65	16.66	16.66	16.64	0.15
	13	19.01	19.09	19.15	19.20	19.22	19.23	19.22	0.22
	14	21.70	21.80	21.88	21.94	21.98	22.00	21.99	0.30
	15	24.57	24.70	24.80	24.88	24.94	24.97	24.97	0.40
极　差		12.50	12.60	12.68	12.76	12.82	12.87	12.89	

2. 模型 Ⅱ——铅球投掷模型

由表 1-1 我们发现关于李梅素的两组值得注意的数据：

1°）$h=1.90$ m，$\alpha=37.60°$，$v=13.75$ m/s，$s=20.68$ m，成绩为 20.95 m；

2°）$h=2.00$ m，$\alpha=39.69°$，$v=13.52$ m/s，$s=20.22$ m，成绩为 20.30 m.

第二组数据中的出手高度和出手角度比第一组都有所提高．然而第二组的出手速度和远度却降低了．教练和运动员都有这样的经验：运动员投掷铅球的出手角度提高了，即使更接近于最佳出手角度，而成绩非但没有提高，反而降低了．原因主要是随着出手角度的提高，出手速度降低了．这个事实告诉我们，出手角度与出手速度并不是相互独立的．它是运动员在投掷过程中用力过程的一个综合的结果．因此模型 Ⅰ 中的假设 3 是不恰当的．仔细分析模型 Ⅰ 我们就发现它只是描述了一个抛射体的运动规律，丝毫没有牵涉到投掷铅球的机制．因此必须对模型做进一步的讨论.

众所周知铅球的投掷过程大致可以分成滑步阶段和用力阶段.关于铅球的投掷过程我们假设：

（1）滑步阶段为水平运动，铅球随人的身体产生一个水平的初速度 v_0.

（2）在用力阶段，运动员从开始用力推铅球到铅球出手有一段时间，我们记为 $(0,\ t_0)$.

（3）在运动员用力的时间内，运动员作用在铅球上的推力大小 F 是不变的，力的方向与铅球的出手角度 α 相同。

用这三个假设代替模型 Ⅰ 中的假设（3）来进一步组建铅球的投掷模型。

模型（1.2）很好地描述了铅球出手以后的运动状况，因此模型 Ⅱ 主要在于建模描述铅球出手速度的形成过程以得到出手速度与出手角度之间的依赖关系.

若记 $x(t)$，$y(t)$ 为开始用力后铅球运动轨迹的水平和铅垂方向的坐标. 则根据牛顿第二运动定律，由假设 3 我们有

$$\begin{cases} mx''(t) = F\cos\alpha, \\ my''(t) = F\sin\alpha - mg, \end{cases} \tag{1.4}$$

式中 m 为铅球的质量，F 是对铅球的推力，α 为力的方向即铅球的出手角度.

根据假设 (2) 令 $t=0$ 时运动员开始用力推铅球，$t=t_0$ 时铅球出手. 在区间 $(0, t_0)$ 上积分 (1.4) 可得

$$\begin{cases} x'(t_0) = \dfrac{F}{m}t_0\cos\alpha + C_1, \\ y'(t_0) = \dfrac{F}{m}t_0\sin\alpha - gt_0 + C_2, \end{cases}$$

其中 C_1，C_2 分别是 $t=0$ 时铅球的水平与垂直的初速度. 由假设 (1)，有 $C_1=v_0$. $C_2=0$，于是我们得到

$$\begin{cases} x'(t_0) = \dfrac{F}{m}t_0\cos\alpha + v_0, \\ y'(t_0) = \dfrac{F}{m}t_0\sin\alpha - gt_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

由此可以得到铅球的合速度，即铅球的出手速度

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{F}{m}t_0\cos\alpha + v_0\right)^2 + \left(\frac{F}{m}t_0\sin\alpha - gt_0\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{F^2}{m^2} + g^2 - \frac{2F}{m}g\sin\alpha\right)t_0^2 + v_0^2 + \frac{2F}{m}t_0v_0\cos\alpha}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

式中 t_0 是推铅球时力的作用时间.

将 (1.6) 与 (1.2) 合并就得到了铅球投掷远度的模型.

分析出手速度模型 (1.6)，不难看出 v 随着 F 和 t_0 的增加而增大，显然 v 也随着 v_0 的增大而增大. 这与我们的常识也是一致